# Решение сингулярно возмущенной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнении с переменными коэффициентами методом отклоняющегося аргумента

А.Ш. Шалданбаев
*Южно-Казахстанский государственный университет имени М.О. Ауэзова, Шымкент, Казахстан*
*e-mail: shaldanbaev51@mail.ru*

**Аннотация**

В настоящей работе, методом отклоняющегося аргумента, получено асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи Коши для системы уравнений с переменными коэффициентами.

## 1 Постановка задачи

Рассмотрим в пространстве $H = L^2\{[0,1], R_n\}$ векторнозначенных функции $\vec{x} = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ с суммарным квадратом сингулярно возмущенную задачу Коши:

$$L_\varepsilon \vec{x}(t) = \varepsilon \vec{x}(t) + A(t)\vec{x} = \vec{f}(t), t \in [0,1] \tag{1}$$

$$\vec{x}(0) = 0, \tag{2}$$

где $\vec{f}(t) \in H, A(t)-$ $n$-мерная матрица с непрерывными коэффициентами, а $\varepsilon$ - положительный малый параметр. Эта задача, с точки зрения, метода регуляризации была исследована С.А.Ломовым [1, с.38]. Этот метод предполагает выполнения следующих условий: $1^0 - 4^0$.

**Условие** $1^0$. Спектр матрицы A(t) простой: $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ при $i \neq j$, $\forall t \in [0,1]$, $\lambda_i(t) \neq 0$ в отдельных точках или на частях множества $[0,1], i = 1, ..., n$. Это условие называется условием стабильности спектра.

**Условие** $2^0$. Точки спектра $\lambda_i \neq 0, i = 1, ...n$;

**Условие** $2^0$. $A(t), \vec{f}(t) \in C^\infty[0,1]$;

**Условие** $4^0$. Спектр матрицы $A(t)$ можно упорядочить так, что выполняются неравенства $Re\lambda_1(t) \leq Re\lambda_2(t) \leq ...Re\lambda_n(t), \forall t \in [0,1]$.

При изменении переменного $t$ собственные значения $\lambda_i(t)$ так же меняются, поэтому проверка условий $1^0$ и $4^0$ почти не возможна. В связи с этими обстоятельствами возникает следующая задача. Можно ли получить асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) выраженных в других, более легко проверяемых терминах.

Было бы желательным приминение спектральной теории линейных операторов, но к сожалению, оператор $L_\varepsilon$ является "вольтерровым" т.е. не имеет собственных значений.

Оказывается, что при определенных условиях на коэффициенты матрицы $A(t)$, все же можно, обойти эту трудность.

Для формулировки основных результатов настоящей работы приведем соответствующих определении к вспомогательных утверждении.

## 2 Вспомогательные предложения

**Лемма 2.1** Для любой непрерывный функции $\vec{f}(t)$ задача Коши

$$L_\varepsilon \vec{x}(t) = \varepsilon \dot{\vec{x}}(t) + A(t)\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \tag{3}$$

$$\vec{x}(0) = 0, \tag{4}$$

$$\begin{array}{l} \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), ...x_n(t))^T, \\ A(t) = (a_{ij}(t)), i, j = 1, ..n \quad \vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), ...f_n(t))^T \end{array} \tag{5}$$

имеет единственное решение

$$\vec{x}(t) = \tfrac{1}{\varepsilon} \int_0^t K_\varepsilon(t, \tau)\vec{f}(\tau) d\tau,$$

где $K_\varepsilon(t, \tau) = x_\varepsilon(t) X_\tau^{-1}(t)$, а $-x_\varepsilon(t)$ есть матрицант системы уравнении

$$\varepsilon \dot{X}(t) + A(t)X(t) = 0, \quad x(0) = I \ \text{(единичная матрица)}$$

**Лемма 2.2.**Если $A(t)$ непрерывная матрица-функция удовлетворяющая условию

$$A(1 - t) = A^+(t),$$

то имеет место формула

$$SL_\varepsilon = L_\varepsilon^+ S,$$

где $S\vec{u}(t) = \vec{u}(1 - t)$, $L_\varepsilon^+$ - оператор сопряженный к оператору $L_\varepsilon$.

**Определение 2.1.** Интегрального оператора $K_\varepsilon \vec{f}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K_\varepsilon(t, \tau)\vec{f}(\tau) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \theta(t-\tau) K_\varepsilon(t, \tau)\vec{f}(\tau)$ назовем оператором Коши.

**Лемма 2.3.** Если $A(t)$ непрерывная матрица-функция удовлетворяющая условию $A(1 - t) = A^+(t)$, то имеет место формула $SK_\varepsilon = K_\varepsilon^+ S$, где $K_\varepsilon^+$ сопряженный оператор Коши, а оператор $S$ определен формулой

$$S\vec{u}(t) = \vec{u}(1 - t), \vec{u} \in R_n.$$

**Лемма 2.4.** Если имеет место неравенство $(A\vec{u}, \vec{u})_H \geq \alpha \parallel \vec{u} \parallel_H^2, \alpha > 0$, то справедлива оценка

$$\parallel L_\varepsilon^{-1} \parallel \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Из лемм 2.1-2.3 и теоремы Гильберта-Шмидта легко выводится следующая теорема, которая имеет вспомогательное значение.

**Теорема 2.1.** Если $S\vec{u}(t) = \vec{u}(1 - t)$ и $A(1 - t) = A^+(t)$, то
(а) оператор $\overline{SK_\varepsilon}$ вполне непрерывен и самосопряжен в пространстве $H$;
(б) ортонормированные собственные векторы оператора $\overline{SK_\varepsilon}$ образуют базис пространства $H$.

## 3 Основные результаты

**Теорема 3.1.** Если $A(t)$ непрерывная матрица-функция удовлетворяющая условию $A(1-t) = A^{+}(t)$, то задача Коши

$$L_\varepsilon \vec{x} = \varepsilon \vec{x}(t) + A(t)\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \tag{6}$$

$$\vec{x}(0) = 0. \tag{7}$$

сильно разрешима в пространстве $H$ и ее сильное решение имеет вид

$$\vec{x}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(S\vec{f}, \vec{\varphi_m(t)})}{\lambda_m} \vec{\varphi_m}(t) \tag{8}$$

и принадлежит пространству Соболева $W_2^1[0,1]$, где $SL_\varepsilon \vec{\varphi_m}(t) = \lambda_m \vec{\varphi_m}(t), S\vec{f}(t) = \vec{f}(1-t), \vec{f}(t) \in H$.

**Теорема 3.2.** Если вещественная и непрерывная матрица $A(t)$ удовлетворяет условий

$$(a) A(1-t) = A^{+}(t), t \in [0,1]; \tag{9}$$

$$(b)(A\vec{u}, \vec{u}) \geq \alpha \parallel \vec{u} \parallel^2, t > 0, \forall \vec{u} \in H \tag{10}$$

то
1) задача Коши $\varepsilon \dot{\vec{x}}(t) + A(t)\vec{x}(t) = \vec{f}(t)$, $\vec{x}(0) = 0$ сильно разрешима в пространстве $H$,
2) если, кроме того, $\vec{f}(t) \in W_2^m[0,1]$ , то ее сильное решение допускает асимптотическое представление вида

$$\vec{x}(t, \varepsilon, \vec{f}) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i A^{-1} D^i \vec{f}(t) - \sum_{k=1}^{n} [A^{-1} D^i \vec{f}(0)]_k \vec{e_k}(\varepsilon, t) \varepsilon^i + (-1)^m \varepsilon^m \vec{x}(t, \varepsilon, D^m \vec{f}), \tag{11}$$

где $D^0 = I, D\vec{f}(t) = \frac{d}{dt} A^{-1}(t) \vec{f}(t)$, и остаток допускает оценку

$$\parallel \vec{x}(t, \varepsilon, D^m \vec{f}) \parallel \leq \frac{\parallel D^m \vec{f} \parallel}{\alpha}. \tag{12}$$

Условие (9) является необходимым для применимости спектрального метода, как показали последующие исследования формула (11) верна и без этого условия, в частности справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.3.** Если непрерывная матрица $A(t)$ с комплексными и непрерывными коэффициентами удовлетворяет условию $(A\vec{u}, \vec{u}) \geq \alpha \parallel \vec{u} \parallel^2, \alpha > 0, \forall \vec{u}(t) \in H$и$\vec{f}(t) \in W_2^1[0,1]$ то задача Коши $\varepsilon \dot{\vec{x}}(t) + A(t)\vec{x}(t) = \vec{f}(t)$ $\quad \vec{x}(0) = 0$ имеет единственное решение из класса $W_2^2[0,1]$, которое допускает представление вида

$$\vec{x}(t, \varepsilon, \vec{f}) = A^{-1}\vec{f}(t) - x_\varepsilon(t) x_\varepsilon^{-1}(0) A^{-1} \vec{f}(0) - \varepsilon \vec{x}(t, \varepsilon, \frac{d}{dt} A^{-1} \vec{f}(t)),$$

где $x_\varepsilon(t)$ - фундаментальная матрица соответствующей однородной системе.

# Литература


[1] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 400с.