МРНТИ 27.29.19

Функция Грина дифференциального оператора на графе – звезде с общими граничными условиями

Жаруллаев Д.Б., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: dastan25102@mail.ru
Кангужин Б.Е., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: kanbalta@mail.ru
Коныркулжаева М.Н., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: maralkulzha@gmail.ru

Дифференциальные уравнения на графах – один из новых разделов теории дифференциальных уравнений и являются основополагающим понятием при анализе модели самых разных задач естествознания. Возникает оно и при анализе процессов в сложных системах, допускающих представление в виде набора одномерных континиуумов, взаимодействующих только через концы. Дифференциальный оператор на графах в настоящее время активно изучаются математиками и встречаются в самых различных приложениях, к примеру химическая кинетика, химическая технология, квантовая механика, нанотехнология, биология, органическая химия, марковские процессы и т.д. В настоящей работе построена функция Грина дифференциального оператора на графе – звезде с общими граничными условиями. Под звездообразном графом в данной работе понимается дерево с одним внутренним узлом и m листьями. Используются стандартные условия Кирхгофа во внутренних вершинах и смешанные условия в граничных вершинах. Ребра графа – это одномерное гладкое регулярное многообразие (кривая). Вершина графа – точка. Применимость результатов данного исследования высока как в теоретическом плане — развитие исследований в теории дифференциальных уравнений с памятью на графах, так и в плане приложений к биологическим процессам, в частности нейробиологии, нанотехнологиях, в химической и нефтяной промышленности.
Ключевые слова: звездообразный граф, условия Кирхгофа, вершины графа, дифференциальный оператор на графах, функция Грина.

Жұлдыз пішінді граф бойындағы жалпылама шекаралық шарттармен берілген дифференциалдық оператордың Грин функциясы

Жаруллаев Д.Б., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.,Қазақстан Республикасы, E-mail: dastan25102@mail.ru
Кангужин Б.Е., әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: kanbalta@mail.ru
Коныркулжаева М.Н., әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: maralkulzha@gmail.ru

Граф бойындағы дифференциалдық теңдеулер дифференциалдық теңдеулер теориясының жаңа тармақтарының бірі және жаратылыстану ғылымындағы көптеген мәселелерін і ң модельдері н талдау кезі нде олардың негізгі түсінігі болып табылады.Ол сондай-ақ, тек ұштар арқылы өзара әрекеттесетін біртұтас континуум жиынтығы ретінде ғана күрделі жүйелерде процестерді талдау кезінде пайда болады. Графтардағы дифференциалдық операторларды қазіргі уақытта математика ғалымдары белсенді зерттеуде және көптеген

түрліқолданбаларда, мысалы, химиялық кинетика, химиялық технология, кванттық механика, нанотехнология, биология, органикалық химия, Марков процестері және т.б. салаларда кездеседі. Осы мақалада біз дифференциалдық оператордың Грин функциясын жалпы шекаралас шарттарымен жұлдыз пішінді графта құрастырамыз. Жұлдыз пішінді граф дегеніміз бір ішкі төбесі бар және m жапырақтары бар ағаш болып табылады. Стандартты Кирхгоф шарттары ішкі төбелерде және шекаралық төбелерде аралас шарттары қолданылады. Графтың төбесі ол нүкте. Зерттеу нәтижелерінің қолданылуы теориялық тұрғыдан жиі кездеседі атап айтқанда, биологиялық процестерде, невробиологияға, нанотехнологияға, химиялық және мұнай өнеркәсі біне қолданылады.
Түйін сөздер: жұлдыз пішінді граф, Кирхгоф шарттары, графтың төбелері, графтың бойындағы дифференциалдық оператор, Грин функциясы.

Green's function of differential operator on a star shaped graph with common boundary conditions

Kanguzhin B.E., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazkhstan, +77081001131, E-mail: kanguzhin53@gmail.com
Konyrkulzhayeva M.N., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazkhstan, +77010143306, E-mail: maralkulzha@gmail.com
Zharullayev D.B., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazkhstan, +77076918702, E-mail: dastan25102@mail.ru

Differential equations on graphs are one of the new sections of the theory of differential equations and their fundamental concepts when analyzing models of a wide variety of problems in natural science. It also arises when analyzing processes in complex systems, allowing as a set of one-dimensional continuum that interact only through the ends. The differential operator on graphs is currently actively studying by mathematics and is found in many different applications, for example, chemical kinetics, chemical technology, quantum mechanics, nanotechnology, biology, organic chemistry, Markov processes, etc. In this paper, we construct the Green function of a differential operator on a star shaped graph with common boundary conditions. In this paper, a star shaped graph is a tree with one internal vertex and m leaves. Standard Kirchhoff conditions are used at the interior vertices and mixed conditions at the boundary vertices. The edges of the graph is a one-dimensional smooth regular manifold (curve). The top of the graph is a point. The applicability of the results of this study is high both in theoretical terms - the development of research in the theory of differential equations with memory on graphs, and in terms of applications to biological processes, in particular neurobiology, nanotechnology, in the chemical and petroleum industries.
Key words: star shaped graph, Kirchhoff's conditions, graph vertices, differential operator on graphs, Green's function.

1 Введение

Граф – звезда – это связанный граф, в котором не более одной вершины имеет степень больше единицы. Вершина, имеющая степень больше единицы, называется внутренней вершиной граф-звезды. Вершины, не являющиеся внутренними, называются граничными вершинами. Пусть задан ориентированный граф-звезда $\Im = (\upsilon, \varepsilon)$, где υ, ε – множества. Элементы множества υ – называются вершинами графа, через ε обозначено множество его дуг. При $j = \overline{1, m}$ исходящую дугу e_j из вершины j. В дальнейшем считаем, что длина каждой дуги $|e_j| = \pi$. На каждой дуге e_j введем переменную $x_j \in [0, \pi]$. Для удобства обозначим значением $x_j = 0$ соответствующую граничную вершину дуги e_j, а значением $x_j = \pi$ внутреннюю вершину.
В предлагаемой работе исследуются свойства функций Грина краевой задачи для дифференциальных уравнений второго порядка на графе – звезде.

2 Обзор литературы

В последние 25-30 лет теория дифференциальных уравнений и краевых задач на геометрических графах (пространственных сетях) интенсивно развивается, тому свидетельствуют многочисленные научные работы. Начало исследований было положено в работах (Б.С. Павлов [1], Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин ([2], [3]) и др.) и зарубежных (J. von Below ([4], [5]), G. Lumer [6], S. Nicaise [7]) математиков и касалось задач, описывающих различные модели: диффузии, колебаний упругих сеток, распространения нервного импульса и др. Работы зарубежных математиков, в основном, посвящены обоснованию разрешимости краевых задач на графах, исследованию структуры спектра этих задач, асимптотики спектра, получению оценок резольвенты. В настоящее время наиболее активные исследования проводятся творческой группой Ю.В.Покорного (А.В. Боровских, К.П. Лазарев, О.М. Пенкин, В.J1. Прядиев, С.А. Шабров), Б.Е.Кангужина (Л.К.Жапсарбаева), Н.П. Бондаренко, основные результаты которых отражены в [8,9,10,11,12,13,14,15] (см. также библиографию в [8,9,10,11,12,13,14,15]). В частности, в работе [9] исследована функция Грина для задачи Дирихле на графе – звезде и приведены теоремы о разложений.

3 Материал и методы

В данной работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. Выведена функция Грина для линейного дифференциального оператора второго порядка на графе-звезде с общими граничными условиями. Используются методы теорий дифференциальных уравнений на геометрических графах.

3.1 Определение дифференциального оператора на графе – звезде

В этом разделе приведены известные определения и обозначения согласно работе [9]. Для дальнейших целей удобно ввести пространство

$$L_2(\Im) \doteq \prod_{e\in\varepsilon} L_2(e)$$

с элементами

$$\overrightarrow{Y}(\overrightarrow{X}) \doteq [y_e(x_e), e\in\varepsilon]^T$$

(где $\overrightarrow{X} = (x_e, e\in\varepsilon)$ и $\prod_{e\in\varepsilon}$ декартово призведение подпространств) и конечной нормой

$$\|\overrightarrow{Y}\|_{L_2(\Im)} = \sqrt{\sum_{e\in\varepsilon}\int_e |y_e(x_e)|^2 dx_e}.$$

Точно также стандартным образом вводится пространство

$$W_2^2(\Im) \doteq \prod_{e\in\varepsilon} W_2^2(e).$$

множество $D \subset W_2^2(\Im)$, элементы которого $\overrightarrow{Y}(\overrightarrow{X}) \doteq [y_e(x_e)]^T, e \in \varepsilon$, удовлетворяют во внутренней вершине графа – звезды условиям Кирхгофа [11]:

$$y_1(\pi) = y_2(\pi) = ... = y_m(\pi), \tag{1}$$

$$y_1'(\pi) + ... + y_m'(\pi) = 0. \tag{2}$$

На множестве D рассмотрим систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j) + f_j(x_j), \qquad x_j \in (0, \pi), \qquad j = \overline{1, m}. \tag{3}$$

с условиями в граничных вершинах графа $\Im$

$$\sum_{j=1}^{m} (\alpha_{js}y_j(0) + \beta_{js}y_j'(0)) = 0, \qquad s = \overline{1, m}, \tag{4}$$

где α_{js} и β_{js} -комплексные числа.
При этом $\{\ q_j(x_j), 0 < x_j < \pi\}-$ набор вещественных непрерывных функций обычно называют потенциалами, λ - спектральный параметр.
Новым моментом данной работы является изучение общих граничных условии (4). В известных нам работах исследовались частные граничные условия [9,10]. Также надо обратить внимание на то, что условия Кирхгофа (1), (2) играют роль операции, определяющих максимальный оператор. В монографии [8] ставилась именно такая постановка задачи. Однако в работах [12] эти условия отнесены к граничным. Вследствие чего заключения и выводы работы [12] довольно громоздки. В данной статье внутренние условия определяют максимальный оператор, а граничные условия определяют его корректные сужение.

3.2 Функция Грина задачи (1)-(4)

В данном пункте вычислим решения $y_j(x_j), 0 < x_j < \pi, j = \overline{1, m}$ задачи (1)-(4) для любых правых частей $f_1(x_1), \ldots, f_m(x_m)$ уравнения (3).

Сначала рассмотрим частный случай, когда $f_1(x_1) \neq 0$ и $f_j(x_j) = 0, \quad j = \overline{2, m}$. По набору функций $f_1(x_1), f_j(x_j) \equiv 0, \quad j = \overline{2, m}$ находим решения $y_1(x_1), \ldots, y_m(x_m)$.

Пусть e_j- j–ая дуга графа $\Im$. На дуге e_j вводим функций $S_{0j}(x_j, \lambda), S_{\pi j}(x_j, \lambda), C_{0j}(x_j, \lambda), C_{\pi j}(x_j, \lambda)$, которые являются решениями однородных уравнений с условиями Коши

$$\begin{aligned} &-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad 0 < x_j < \pi \\ &S_{0j}(0) = 0, S_{0j}'(0) = 1, C_{0j}(0) = 1, C_{0j}'(0) = 0 \\ &S_{\pi j}(\pi) = 0, S_{\pi j}'(\pi) = 1, C_{\pi j}(\pi) = 1, C_{\pi j}'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Решение задачи (1)-(4) ищем в виде

$$\begin{cases} y_2(x_2, \lambda) = A_1C_{\pi 2}(x_2, \lambda) + B_2S_{\pi 2}(x_2, \lambda), \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ y_m(x_m, \lambda) = A_1C_{\pi m}(x_m, \lambda) + B_mS_{\pi m}(x_m, \lambda), \\ y_1(x_1, \lambda) = A_1C_{\pi 1}(x_1, \lambda) + B_1S_{\pi 1}(x_1, \lambda) + \int_0^{x_1} \frac{S_{01}(t,\lambda)S_{\pi 1}(x_1,\lambda)}{D_1(t,\lambda)} f_1(t)dt + \int_{x_1}^{\pi} \frac{S_{01}(x_1,\lambda)S_{\pi 1}(t,\lambda)}{D_1(t,\lambda)} f_1(t)dt, \end{cases}$$

(5)

где $A_1, B_1, B_2, ..., B_m$– некоторые константы.

$$D_1(t,\lambda) = \begin{vmatrix} S_{\pi 1}(t,\lambda) & S_{01}(t,\lambda) \\ S'_{\pi 1}(t,\lambda) & S'_{01}(t,\lambda) \end{vmatrix}$$

Покажем, что функций заданные системой (5) удовлетворяют уравнениям (3) и условиям (1),(2).

Продифференцировав по t обе части заданного равенства, получим:

$$D'_j(t_j,\lambda) = -S_{0j}(t,\lambda)S''_{\pi j}(t,\lambda) + S''_{0j}(t,\lambda)S_{\pi j}(t,\lambda)$$

Из того, что

$$S''_{\pi j}(t_j,\lambda) = (q_j(t_j) - \lambda)S_{\pi j}(t_j,\lambda)$$

$$S''_{0j}(t_j,\lambda) = (q_j(t_j) - \lambda)S_{0j}(t_j,\lambda)$$

вытекает

$D'_j(t,\lambda) = 0 \Rightarrow D_j(t_j,\lambda) \equiv const \equiv S_{\pi j}(0,\lambda) \equiv -S_{0j}(\pi,\lambda).$

Непосредственным вычислениями убедимся в том, что система функции (5) удовлетворяет соотношению (1) условиям Кирхгофа

$$y_j(\pi,\lambda) = A_1 C_{\pi j}(\pi,\lambda) + B_j S_{\pi j}(\pi,\lambda) = A_1, \qquad j = \overline{2,m}$$

так как $C_{\pi j}(\pi,\lambda) = 1$ и $S_{\pi j}(\pi,\lambda) = 0$.

$$y_1(\pi,\lambda) = A_1 C_{\pi 1}(\pi,\lambda) + B_1 S_{\pi 1}(\pi,\lambda) + \int_0^\pi \frac{S_{01}(t,\lambda)S_{\pi 1}(\pi,\lambda)}{D_1(t,\lambda)} f_1(t)dt = A_1,$$

так как $C_{\pi 1}(\pi,\lambda) = 1$, $S_{\pi 1}(\pi,\lambda) = 0$. Проверим, что система функции (5) удовлетворяет дифференциальным уравнениям (3).

Вычислим

$$y''_j(x_j,\lambda) = A_1 C''_{\pi j}(x_j,\lambda) + B_j S''_{\pi j}(x_j,\lambda) \qquad j = \overline{2,m}.$$

Так как $C_{\pi j}(x_j,\lambda)$ и $S_{\pi j}(x_j,\lambda)$ являются решениями однородных уравнений,

$$C''_{\pi j}(x_j,\lambda) = (q_j(x_j) - \lambda)C_{\pi j}(x_j,\lambda),$$

$$S''_{\pi j}(x_j,\lambda) = (q_j(x_j) - \lambda)S_{\pi j}(x_j,\lambda).$$

то

$$y''_j(x_j,\lambda) = A_1(q_j(x_j) - \lambda)C_{\pi j}(x_j,\lambda) + B_j(q(x_j) - \lambda)S_{\pi j}(x_j,\lambda) = \\ = (q_j(x_j) - \lambda)y_j(x_j,\lambda)$$

при $x_j \in (0,\pi)$, $\quad j = \overline{2,m}$.

Теперь вычислим $y''_1(x_1,\lambda)$

$$y''_1(x_1,\lambda) = A_1 C''_{\pi 1}(x_1,\lambda) + B_1 S''_{\pi 1}(x_1,\lambda) + \int_0^{x_1} \frac{S_{01}(t,\lambda)S''_{\pi 1}(x_1,\lambda)}{S_{\pi 1}(0,\lambda)} f_1(t)dt +$$

$$+\int_{x_1}^{\pi}\frac{S''_{01}(x_1,\lambda)S_{\pi1}(t,\lambda)}{S_{\pi1}(0,\lambda)}f_1(t)dt-f_1(x_1).$$

Поскольку

$$C''_{\pi1}(x_1,\lambda)=(q_1(x_1)-\lambda)C_{\pi1}(x_1,\lambda),$$
$$S''_{01}(x_1,\lambda)=(q_1(x_1)-\lambda)S_{01}(x_1,\lambda),$$
$$S''_{\pi1}(x_1,\lambda)=(q_1(x_1)-\lambda)S_{\pi1}(x_1,\lambda),$$

то

$$y''_1(x_1,\lambda)=(q_1(x_1)-\lambda)\left[A_1C_{\pi1}(x_1,\lambda)+B_1S_{\pi1}(x_1,\lambda)+\int_0^{\pi}G_{D1}(x_1,t,\lambda)f_1(t)dt\right]-f_1(x_1).$$

Учитывая, что $y_1(x_1,\lambda)=A_1C_{\pi1}(x_1,\lambda)+B_1S_{\pi1}(x_1,\lambda)+\int_0^{\pi}G_{D1}(x_1,t,\lambda)f_1(t)dt$, получаем

$$y''_1(x_1,\lambda)=(q_1(x_1)-\lambda)y_1(x_1,\lambda)-f_1(x_1),$$

которое показывает, что система функции (5) удовлетворяет дифференциальным уравнениям (1).

Для краткости введем обозначения

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & ... & 1 & ... & 1\\ U_1 & V_{11} & V_{21} & ... & V_{k1} & ... & V_{m1}\\ U_2 & V_{12} & V_{22} & ... & V_{k2} & ... & V_{m2}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ U_m & V_{1m} & V_{2m} & ... & V_{km} & ... & V_{mm}\end{vmatrix},$$

$$M_1(t_1,\lambda)=\begin{vmatrix}1 & 1 & ... & 1 & ... & 1 & \frac{S_{01}(t_1,\lambda)}{S_{\pi1}(t_1,\lambda)}\\ V_{11} & V_{21} & ... & V_{k1} & ... & V_{m1} & \beta_{11}\\ V_{12} & V_{22} & ... & V_{k2} & ... & V_{m2} & \beta_{12}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ V_{1m} & V_{2m} & ... & V_{km} & ... & V_{mm} & \beta_{1m}\end{vmatrix},$$

$$M_2(t_1,\lambda)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & ... & 1 & \frac{S_{01}(t_1,\lambda)}{S_{\pi1}(t_1,\lambda)}\\ U_1 & V_{11} & V_{21} & ... & V_{(k-1)1} & V_{(k+1)1} & ... & V_{m1} & \beta_{11}\\ U_2 & V_{12} & V_{22} & ... & V_{(k-1)2} & V_{(k+1)2} & ... & V_{m2} & \beta_{12}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ U_m & V_{1m} & V_{2m} & ... & V_{(k-1)m} & V_{(k+1)m} & ... & V_{mm} & \beta_{1m}\end{vmatrix}$$

Сформулируем следующую теорему:

Теорема 1 *Если $f_1(x)\neq 0$ и $f_2(x_2)=f_3(x_3)=...=f_m(x_m)=0$, то решение задачи (1)-(4) может быть записано в виде*

$$y_k(x_k,\lambda)=(-1)^{(m+3)}\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^{\pi}C(x_k,\lambda)M_1(t_1,\lambda)\frac{S_{\pi1}(t_1,\lambda)}{S_{\pi1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1+$$

$$+(-1)^{m+k+3}\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^{\pi}S(x_k,\lambda)M_2(t_1,\lambda)\frac{S_{\pi1}(t_1,\lambda)}{S_{\pi1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1+$$

$$+\delta_{1k}\int_0^{\pi} G_{D_1}(x_1,t_1,\lambda)f_1(t_1)dt_1, k=\overline{1,m}$$

где $\delta_{ij}-$ символ Кронекера.

$$G_{D_j}(x_j,t_j,\lambda)=\begin{cases}\frac{S_{0j}(t_j,\lambda)S_{\pi j}(x_j,\lambda)}{S_{\pi j}(0,\lambda)}, & 0<t_j<x_j\\ \frac{S_{0j}(x_j,\lambda)S_{\pi j}(t_j,\lambda)}{S_{\pi j}(0,\lambda)}, & x_j<t_j<\pi\end{cases} \qquad j=\overline{1,m}$$

Доказательство:
Решение задачи (1)-(4) ищем в виде:

$$\begin{cases} y_2(x_2,\lambda)=A_1C_{\pi 2}(x_2,\lambda)+B_2S_{\pi 2}(x_2,\lambda),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_m(x_m,\lambda)=A_1C_{\pi m}(x_m,\lambda)+B_mS_{\pi m}(x_m,\lambda),\\ y_1(x_1,\lambda)=A_1C_{\pi 1}(x_1,\lambda)+B_1S_{\pi 1}(x_1,\lambda)+\int_0^{\pi}G_{D_1}(x_1,t_1,\lambda)f_1(t_1)dt_1\end{cases}$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$U_s=\sum_{i=1}^{m}(\alpha_{js}C_{\pi j}(0,\lambda)+\beta_{js}C'_{\pi j}(0,\lambda)), \quad V_{js}=\alpha_{js}S_{\pi j}(0,\lambda)+\beta_{js}S'_{\pi j}(0,\lambda)$$

$$\begin{cases} B_1+...+B_k+...+B_m+\int_0^{\pi}\frac{S_{01}(t_1,\lambda)}{S_{\pi 1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1=0\\ A_1U_1+B_1V_{11}+...+B_kV_{k1}+...+B_mV_{m1}+\beta_{11}\int_0^{\pi}\frac{S_{\pi 1}(t_1,\lambda)}{S_{\pi 1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1=0\\ A_1U_2+B_1V_{12}+...+B_kV_{k2}+...+B_mV_{m2}+\beta_{12}\int_0^{\pi}\frac{S_{\pi 1}(t_1,\lambda)}{S_{\pi 1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ A_1U_m+B_1V_{1m}+...+B_kV_{km}+...+B_mV_{mm}+\beta_{1m}\int_0^{\pi}\frac{S_{\pi 1}(t_1,\lambda)}{S_{\pi 1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1=0\\ A_1C_{\pi k}(x_k,\lambda)+B_kS_{\pi k}(x_k,\lambda)+\delta_{1k}\int_0^{\pi}G_{D_1}(x_1,t_1,\lambda)f_1(t_1)dt_1-y_k(x_k,\lambda)=0\end{cases} \tag{6}$$

Запишем заданную систему в матричном виде:

$$Q\cdot\vec{h}=\vec{\theta}$$

где $\vec{h}=[A_1,B_1,...,B_m,1]^T$, $\quad\vec{\theta}-$ нулевой вектор;

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 & ... & 1 & \int_0^{\pi}\frac{S_{01}(t_1,\lambda)}{S_{\pi 1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1\\ U_1 & V_{11} & V_{21} & ... & V_{k1} & ... & V_{m1} & \beta_{11}\int_0^{\pi}\frac{S_{\pi 1}(t_1,\lambda)}{S_{\pi 1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1\\ U_2 & V_{12} & V_{22} & ... & V_{k2} & ... & V_{m2} & \beta_{12}\int_0^{\pi}\frac{S_{\pi 1}(t_1,\lambda)}{S_{\pi 1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ U_m & V_{1m} & V_{2m} & ... & V_{km} & ... & V_{mm} & \beta_{1m}\int_0^{\pi}\frac{S_{\pi 1}(t_1,\lambda)}{S_{\pi 1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1\\ C_{\pi k}(x_k,\lambda) & 0 & 0 & ... & S_{\pi k}(x_k,\lambda) & ... & 0 & \delta_{1k}\int_0^{\pi}G_{D_1}(x_1,t_1,\lambda)f_1(t_1)dt_1-y_k(x_k,\lambda)\end{pmatrix}$$

Так как однородная квадратная система (6) имеет ненулевое решение, то определитель матрицы Q равен нулю:

$$\det Q=0$$

Если разложить последний определитель по последней строке, то получим

$$(-1)^{m+3}C_{\pi k}(x_k,\lambda)\int_0^\pi \frac{S_{\pi 1}(t_1,\lambda}{S_{\pi 1}(0,\lambda)}M_1(t_1,\lambda)f_1(t)dt+$$

$$+(-1)^{m+k+3}S_{\pi k}(x_k,\lambda)\int_0^\pi \frac{S_{\pi 1}(t_1,\lambda)}{S_{\pi 1}(0,\lambda)}M_2(t_1,\lambda)f_1(t)dt+$$

$$+\Bigg(\delta_{1k}\int_0^\pi G_{D_1}(x_1,t_1,\lambda)f_1(t_1)dt-y_k(x_k,\lambda))\Delta(\lambda)=0$$

Отсюда вытекает

$$y_k(x_k,\lambda)=\frac{(-1)^{m+3}}{\Delta(\lambda)}\int_0^\pi C_{\pi k}(x_k,\lambda)\frac{S_{\pi 1}(t_1,\lambda)}{S_{\pi 1}(0,\lambda)}M_1(t_1,\lambda)f_1(t_1)dt_1+$$

$$+\frac{(-1)^{m+k+3}}{\Delta(\lambda)}\int_0^\pi S_{\pi k}(x_k,\lambda)\frac{S_{\pi 1}(t_1,\lambda)}{S_{\pi 1}(0,\lambda)}M_1(t_1,\lambda)f_1(t_1)dt_1+$$

$$+(-1)^{m+k+3}S(x_k,\lambda)\int_0^\pi \frac{S_{\pi 1}(t_1,\lambda)}{S_\pi 1(0,\lambda)}M_2(t_1,\lambda)f_1(t)dt+\delta_{1k}\int_0^\pi G_{D_1}(x_1,t_1,\lambda)f_1(t_1)dt_1$$

Теорема доказана.

Теорема 2 *Для произвольных $f_1(x_1),...,f_m(x_m)$ функция Грина задачи (1)-(4) имеет представление*

$$G_{\Im}(\vec{x},t,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\cdot\begin{bmatrix} A_1C_{\pi 1}(x_1,\lambda)+B_1S_{\pi 1}(x_1,\lambda)\\ A_1C_{\pi 2}(x_2,\lambda)+B_2S_{\pi 2}(x_2,\lambda)\\ A_1C_{\pi 3}(x_3,\lambda)+B_3S_{\pi 3}(x_3,\lambda)\\ ...\\ A_1C_{\pi m}(x_m,\lambda)+B_mS_{\pi m}(x_m,\lambda)\end{bmatrix}\left[\frac{S_{\pi 1}(t,\lambda)}{S_{\pi 1}(0,\lambda)},\frac{S_{\pi 2}(t,\lambda)}{S_{\pi 2}(0,\lambda)},...,\frac{S_{\pi m}(t,\lambda)}{S_{\pi m}(0,\lambda)}\right]+$$

$$+diag\left\{G_{D_1}(x_1,t,\lambda),G_{D_2}(x_2,t,\lambda),...,G_{D_m}(x_m,t,\lambda)\right\}$$

где

$$A_1=(-1)^{m+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & ... & 1 & \frac{S_{01}(t,\lambda)}{S_{\pi 1}(t,\lambda)}\\ V_{11} & V_{21} & ... & V_{k1} & ... & V_{m1} & \beta_{11}\\ V_{12} & V_{22} & ... & V_{k2} & ... & V_{m2} & \beta_{12}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ V_{1m} & V_{2m} & ... & V_{km} & ... & V_{mm} & \beta_{1m}\end{vmatrix}$$

$$B_k=(-1)^{m+k+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & ... & 1 & 1 & ... & 1 & \frac{S_{0k}(t,\lambda)}{S_{\pi k}(t,\lambda)}\\ U_1 & V_{11} & ... & V_{(k-1)1} & V_{(k+1)1} & ... & V_{m1} & \beta_{k1}\\ U_2 & V_{12} & ... & V_{(k-1)2} & V_{(k+1)2} & ... & V_{m2} & \beta_{k2}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ U_m & V_{1m} & ... & V_{(k-1)m} & V_{(k+1)m} & ... & V_{mm} & \beta_{km}\end{vmatrix}$$

Доказательство: Для краткости введем следующее обозначение

$$\vec{Y_j}(\vec{X}) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \cdot \int_0^{\pi} \begin{bmatrix} A_1 C_{\pi 1}(x_1,\lambda) + B_1 S_{\pi 1}(x_1,\lambda) \\ A_1 C_{\pi 2}(x_2,\lambda) + B_2 S_{\pi 2}(x_2,\lambda) \\ ... \\ A_1 C_{\pi j}(x_j,\lambda) + B_3 S_{\pi j}(x_j,\lambda) \\ ... \\ A_1 C_{\pi m}(x_m,\lambda) + B_m S_{\pi m}(x_m,\lambda) \end{bmatrix} \frac{S_{\pi j}(t_j,\lambda)}{S_{\pi j}(0,\lambda)} f_j(t_j) dt_j +$$

$$+ \int_0^{\pi} \begin{bmatrix} G_{D_j}(x_j,t_j,\lambda) \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix} f_j(t_j) dt_j$$

Тогда для произвольных $f_j(x_j)$, $j = \overline{1,m}$ решение задачи (1)-(4) может быть представлена в виде

$$\vec{Y}(\vec{X}) = \vec{Y_1}(\vec{X}) + \vec{Y_2}(\vec{X}) + ... + \vec{Y_m}(\vec{X}) =$$

$$= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \cdot \int_0^{\pi} \begin{bmatrix} A_1 C_{\pi 1}(x_1,\lambda) + B_1 S_{\pi 1}(x_1,\lambda) \\ A_1 C_{\pi 2}(x_2,\lambda) + B_2 S_{\pi 2}(x_2,\lambda) \\ A_1 C_{\pi 3}(x_3,\lambda) + B_3 S_{\pi 3}(x_3,\lambda) \\ ... \\ A_1 C_{\pi m}(x_m,\lambda) + B_m S_{\pi m}(x_m,\lambda) \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{S_{\pi 1}(t,\lambda)}{S_{\pi 1}(0,\lambda)} f_1(t) + \frac{S_{\pi 2}(t,\lambda)}{S_{\pi 2}(0,\lambda)} f_2(t) + ... + \frac{S_{\pi m}(t,\lambda)}{S_{\pi m}(0,\lambda)} f_m(t) \right] dt +$$

$$+ \int_0^{\pi} diag \left\{ G_{D_1}(x_1,t,\lambda), G_{D_2}(x_2,t,\lambda), ..., G_{D_m}(x_m,t,\lambda) \right\} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ ... \\ f_m(t) \end{bmatrix} dt$$

Теорема доказана

4 Результаты и обсуждение

В настоящей работе выведена функция Грина для дифференциального оператора на звездообразном графе с общими граничными условиями. Значительную трудность представляет построение функции Грина на геометрических графах при значениях независимых переменных близких к вершинам графа. Нами использованы стандартные условия склейки во внутренних вершинах и смешанные краевые условия в граничных вершинах. Предлагается конструктивная схема построения функции Грина краевой задачи для уравнения Штурма-Лиувилля.

5 Заключение

В настоящей работе построена функция Грина дифференциального оператора на звезообразном графе. Доказывается существование разложения произвольной функции, заданного на графе, по собственным функциям. Под звездным графом понимается граф состоящий из ребер, входящих в одну внутреннюю вершину. Задача является моделью колебании простой системы из нескольких стержней с примыкающим концом.

6 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК (грант "Конечномерные возмущения фредгольмовых операторов и их спектральный анализ 2018-2020 годы.)

Список литературы

[1] Павлов Б.С., М.Д. Фадеев Модель свободных электронов и задача рассеяния //Теор. и мат. физика. - 1983. - Т. 55, № 2. - С.257-269.

[2] Покорный Ю.В. О спектре некоторых задач на графах// Успехи мат. наук. -1987. - Т. 42, №4. - С.128-129.

[3] Пенкин О.М. О краевой задаче на графе // Дифференциальные уравнения. - 1988. - Т.24, №4. - С.701-703.

[4] Von Below J. Classical solvability of linear parabolic equations on networks // Differential Equation. - 1988. - V. 72, № 2. - P.316-337.

[5] Von Below J. Sturm-Liouville eigenvalue problems on networks // Math. Metli. Appl. Sc. - 1988. - V. 10, № 2. - P.383-395.

[6] Lumer G. Connecting of local operators and evolution equations on network //Lect. Notes Math. - 1980. - V. 787. - P.219-234.

[7] Nicaise S. Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impuls transmission // Lect.Notes Math. №1771. - Berlin, 1985. - P.532-541.

[8] Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах - М. : Физматлит, 2004. - 272 с.

[9] Кангужин Б.Е. Функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на графе-звезде // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. - 2018. - № 1(97) - P.67-90.

[10] Bondarenko N.P. Partial inverse problems for the Sturm-Liouville operator on star-shaped graph with mixed boundary conditions // J. Inverse Ill - Posed Probl. - 2018. - № 26(1)- P.1-12.

[11] Афанасьева Н.А., Булот Л.П. Электротехника и электроника. Учебное пособие. - СПб.: СПбГУН и П.Т., - 2010. - С.181.

[12] Завгородный М.Г. Сопряженные и самосопряженные краевые задачи на геометрическом графе// Дифференциальные уравнения. - 2014. Т. 50, №4. - С.446-456.

[13] Kurasov P., Stenberg F. On the inverse scattering problem on branching graphs // J. Phys. A. Math. Gen. - 2002. - V.20. - P.647-672.

[14] Покорный Ю.В., Приядиев В.Л., Аль-Обейд А. Об осциляционных свойствах спектра краевой задачи на графе // Матем. заметки. - 1996. - Т.60, №3. - С.468-469.

[15] Покорный Ю.В., Приядиев В.Л. Некоторые проблемы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственных сетях // Успехи мат. науки. - 2004. - Т.59. №6. - С.115-150.

References

[1] Pavlov B.S. and Phadeev M.D., *"Model svobodnyh electronov i zadacha rasseiyaniya [Model of free electrons and scattering problem]", Teor.i.matphizika.* vol. 55, no 2(1983): 257-269.

[2] Pokornyi U.V., *"O spectre nekotoryh zadach na graphah [About the spectrum of some problems on the graph]", Uspehi mat.nauk.* vol. 42, no 4(1987): 128-129.

[3] Penkin O.M., *"O krayevoi zadache na graphe [About boundary value problems on a graph]",* Differenciyalnye uravneniya vol. 24, no 3 (1988): 701-703.

[4] Von Below J., *"Classical solvability of linear parabolic equations on networks",* Differential Equation. vol.72, no 2(1988): 316-337.

[5] Von Below J., *"Sturm-Liouville eigenvalue problems on networks",* Math. Metli. Appl. Sc. vol.10, no 2(1988): 383-395.

[6] Lumer G., *"Connecting of local operators and evolution equations on network",* Lect. Notes Math. vol.787, 13(1980): 219-234.

[7] Nicaise S., *"Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impuls transmission", Lect.Notes Math.* no 1771 (1985): 532-541.

[8] Pokornyi U.B., *"Differenciyalnye uravneniya na geometricheskih graphah [Differenciail equations on geometric graphs]", M.: Phizmatlit* (2004),272-274.

[9] Kanguzhin B.E., *"Funkciya Grina zadachi Dirihle dlya differencialnogo operatora na grafe-zvezde[Green's function of Dirichlet problem for differential operators on a star-shaped graphs]", Vestnik KazNU* 1(2018): 67-90.

[10] Bondarenko N.P., *"Partial inverse problems for the Sturm-Liouville operator on star-shaped graph with mixed boundary conditions", J. Inverse Ill - Posed Probl.* 26(2018): 1-12.

[11] Afanasev N.A., Bulot L.P., *"Electrotehnika i electronika[Electrotechnik and electronik]",* SPbGUN and P.T.(2010): 181-183.

[12] Zavgorodnii M.G., *"Sopryazhennye i samosopryajennye krayvye zadachi na geometricheskom graphe [Conjugate and self-adjoint boundary value problems on a geometric graph]",* Differencial equations vol. 50, no 4 (2014): 446-456.

[13] Kurasov P., Stenberg F., *"On the inverse scattering problem on branching graphs",* J. Phys. A. Math. Gen vol. 20. 45(2002): 647-672.

[14] Pokornyi U.V., Priadiev V.L., Al-Obeid A. *"Ob oscilyacionnyh svoistvah spectra kraevoi zadachi na graphe",* Matem.zametki vol.60, 3(1996): 468-469.

[15] Pokornyi U.V., Priadiev V.L., *"Nekotorye problemy kachestvennoi teorii Shturma-Liuvillya na prostranstvennyh setyah [Some problems of the qualitative theory of Sturm-Liouville on spatial networks]",* Uspehi mat. nauk. vol. 59, no 6 (2004): 115-150.