Краевая задача с отходом от характеристики для многомерного уравнения Геллерстедта

Т.Т. Шериyздан
Актюбинский государственный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан
e-mail: talgatsher72@inbox.ru

Аннотация

В работе доказана однозначная разрешимость краевой задачи с отходом от характеристики для многомерного уравнения Геллерстедта

При исследовании смешанной задачи M в [1, 2], для уравнения колебания струны изучалась краевая задача с отходом от характеристики, где обращено внимание на исследование таких задач для гиперболических уравнений. Для вырождающихся гиперболических уравнений эта задача на плоскости рассмотрены [3, 4]. Однако, многомерные задачи с отходом от характеристики не изучены.

П.1. Постановка задач и результаты. Пусть D_β - конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная плоскостью $t = 0$ и при $t > 0$ коноидами

$$K_0 : r = \frac{2}{2+p} t^{\frac{(2+p)}{2}},\ 0 \le r \le r_0,\ 0 < r_0 = const < \frac{1}{2},$$

$$K_\beta : \beta(r - r_0) + r_0 = \frac{2}{2+p} t^{\frac{(2+p)}{2}},\ r_0 \le r \le r_1,$$

$$K_1 : r = 1 - \frac{2}{2+p} t^{\frac{(2+p)}{2}},\ 0 \le t \le t_0,\ r_1 \le r \le 1,$$

где $r = |x|$ - длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$, а $p = const > 0$, $0 < \beta = const < 1$, $r_1 = \frac{(1-r_0+r_0\beta)}{(1+\beta)}$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через S, S_0, S_β, S_1 соответственно.

В области D_β рассмотрим многомерное уравнение Геллерстедта

$$t^p \Delta_x u - u_{tt} = 0, \tag{1}$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \ge 2$.

В качестве многомерных аналогов краевой задачи с отходом от характеристики рассмотрим следующую

Задача 1. *Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D_\beta} \cap C^2(D_\beta))$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_S = \tau(x),\ u|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x),\ u|_{S_1} = \sigma_1(x), \tag{2}$$

или

$$u_t|_S = \tau(x),\ u|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x),\ u|_{S_1} = \sigma_1(x). \tag{3}$$

Как отмечено в [4], сформулированные задачи возникают при исследовании трансзвуковых проблем.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$.

Пусть Ω_β-проекция области D_β на плоскость (r, t) с границами

$$\Gamma_0 : r = \frac{2}{2+p} t^{\frac{(2+p)}{2}},\ 0 \leq r \leq r_0,\ \Gamma_\beta : \beta(r - r_0) + r_0 = \frac{2}{2+p} t^{\frac{(2+p)}{2}},\ r_0 \leq r \leq r_1,$$

$$\Gamma_1 : r = 1 - \frac{2}{2+p} t^{\frac{(2+p)}{2}},\ \ r_1 \leq r \leq 1,\ \Gamma : t = 0,\ 0 \leq r \leq 1;$$

$\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2), \theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$, $W^l_2(S)$, $l = 0, 1, ...$– пространства Соболева.

Имеет место ([5])

Лемма 1. *Пусть $f(r,\theta) \in W^l_2(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд*

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\bar{\tau}^k_n(r)$, $\bar{\nu}^k_n(r)$, $\bar{\sigma}^k_{\beta n}(r)$, $\bar{\sigma}^k_{1n}(r)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (6) соответственно функций $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma_\beta(r,\theta)$, $\sigma_1(r,\theta)$.

Введем множество функций

$$B^l(S) = \Big\{ f(r,\theta) :\ f \in W^l_2(S),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left(\|f^k_n(r)\|^2_{C^2((0,1))} + \|f^k_n(r)\|^2_{C([0,1])} \right) \exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty,\ l > m-1 \Big\}.$$

Пусть $\tau(r,\theta) = r^3 \tau^*(r,\theta), \nu(r,\theta) = r^3 \nu^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta)$, $\nu^*(r,\theta) \in B^l(S)$, $\sigma_\beta(r,\theta) \in B^l(S_\beta)$, $\sigma_1(r,\theta) \in B^l(S_1)$.

Тогда справедлива

Теорема 1. *Задача 1 однозначно разрешима.*

Отметим, что при $p = 0$ эта теорема получена в [6].

Доказательство:

Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнение 1 имеет вид

$$t^p u_{rr} + \frac{m-1}{r} t^p u_r - \frac{t^p}{r^2} \delta u - u_{tt} = 0, \tag{5}$$

где $\delta \equiv -\sum\limits_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j} \left(sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j} \right)$, $g_1 = 1$, $g_j = (sin\theta_1 ... sin\theta_{j-1})^2$, $j > 1$.

Так как искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C\left(\bar{D}_\beta\right) \cap C^2\left(D_\beta\right)$, то его будем искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению. Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([5]), получим

$$t^p\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}t^p\bar{u}_{nr}^k - \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n t^p}{r^2}\bar{u}_n^k = 0,\ \lambda_n = n(n+m-2),\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,.... \quad (7)$$

При этом краевые условия (2),(3), с учетом леммы 1, соответственно запишутся в виде

$$\begin{gathered}\bar{u}_n^k|_\Gamma = \bar{\tau}_n^k(r), 0\le r\le 1,\ \bar{u}_n^k|_{\Gamma_\beta} = \bar{\sigma}_{\beta n}^k(r), r_0\le r\le r_1,\\ \bar{u}_n^k|_{\Gamma_1} = \bar{\sigma}_{1n}^k(r), r_1\le r\le 1,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...;\end{gathered} \quad (8)$$

$$\begin{gathered}\bar{u}_{nt}^k|_\Gamma = \bar{\nu}_n^k(r), 0\le r\le 1,\ \bar{u}_n^k|_{\Gamma_\beta} = \bar{\sigma}_{\beta n}^k(r), r_0\le r\le r_1,\\ \bar{u}_n^k|_{\Gamma_1} = \bar{\sigma}_{1n}^k(r), r_1\le r\le 1,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,....\end{gathered} \quad (9)$$

В (9) произведя замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$ и положив затем $r=r$, $x_0 = \frac{2}{2+p}t^{\frac{(2+p)}{2}}$, получим

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^k \equiv u_{\alpha,nrr}^k - u_{\alpha,nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0}u_{\alpha,nx_0}^k + \frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4r^2}u_{\alpha,n}^k = 0, \quad (10_\alpha)$$

$0<\alpha=\frac{p}{2+p}<1$, причем краевые условия (8) и (9), соответственно примут вид

$$\begin{gathered}u_{\alpha,n}^k(r,0) = \tau_n^k(r),\ 0\le r\le 1,\ u_{\alpha,n}^k(r,\beta(r-r_0)+r_0) = \sigma_{\beta n}^k(r),\ r_0\le r\le r_1,\\ u_{\alpha,n}^k(r,1-r) = \sigma_{1n}^k(r),\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,...,\quad 0\le r\le 1;\end{gathered} \quad (11)$$

$$\begin{gathered}\lim_{x_0\to 0} x_0^\alpha \tfrac{\partial}{\partial x_0}u_{\alpha,n}^k = \nu_n^k(r),\ u_{\alpha,n}^k(r,\beta(r-r_0)+r_0) = \sigma_{\beta n}^k(r),\ r_0\le r\le r_1,\\ u_{\alpha,n}^k(r,1-r) = \sigma_{1n}^k(r),\ r_1\le r\le 1,\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,...,\quad 0\le r\le 1;\end{gathered} \quad (12)$$

$$\tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}_n^k(r),\ \nu_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\nu}_n^k(r),\ \sigma_{\beta n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\sigma}_{\beta n}^k(r),\ \sigma_{1n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\sigma}_{1n}^k(r).$$

Наряду с уравнением (10_α), рассмотрим уравнение

$$L_\alpha u_{0,n}^k \equiv u_{0,nrr}^k - u_{0,nx_0x_0}^k + \frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4r^2} = 0. \quad (10_0)$$

Как доказано в [7, 8] (см. также [9]) существует следующая связь между решениями задачи для уравнений (10_α) и (10_0).

Утверждение 1. *Если $u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$- решение задачи Коши для уравнения (10_0), удовлетворяющее условию*

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0) = \tau_n^k(r), \qquad \frac{\partial}{\partial x_0}\omega_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \quad (13)$$

то функция

$$u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) = \gamma_\alpha\int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi \equiv \frac{\gamma_\alpha}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)D_{0x_0^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^{\frac{\alpha}{2}}}\right] \quad (14)$$

при $\alpha>0$ есть решение уравнения (10_α) с условиями (13).

Утверждение 2. *Если $u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ является решением задачи Коши для уравнения (10_0), удовлетворяющее условиям*

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0)=\frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)},\quad \frac{\partial}{\partial x_0}\omega_{0,n}^{k,1}(r,0)=0, \tag{13'}$$

то при $0<\alpha<1$ функция

$$\begin{gathered}u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)=\gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q\left[x_0^{1-\alpha+2q}\int\limits_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right]\equiv\\ \equiv\gamma_{2-k+2q}2^{q-1}\Gamma\left(q-\tfrac{\alpha}{2}+1\right)D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0}\right]\end{gathered} \tag{15}$$

является решением уравнения (10_α) с начальными данными

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,0)=0,\quad \lim_{x_0\to 0}x_0^\alpha\frac{\partial}{\partial x_0}u_{\alpha,n}^{k,2}=\nu_n^k(r), \tag{16}$$

где $\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\gamma_\alpha=2\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})$, $\Gamma(z)$ - гамма-функция, D_{0t}^α - оператор Римана-Лиувилля ([10]), а $q\geq 0$ - наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2-\alpha+2q\geq m-1$.

Теперь будем решать задачу (10_α), (11). Ее решение ищем в виде

$$u_{\alpha,n}^k(r,x_0)=u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)+u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0),$$

где $u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ - решение задачи Коши (10_α), (13), а $u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ - решение краевой задачи для уравнения (10_α) с данными

$$\begin{gathered}u_{\alpha,n}^{k,2}(r,0)=0,\ 0\leq r\leq 1,\ u_{\alpha,n}^{k,2}(r,\beta(r-r_0)+r_0)=\\ =\sigma_{\beta n}^k(r)-u_{\alpha,n}^{k,1}(r,\beta(r-r_0)+r_0),r_0\leq r\leq r_1,\\ u_{\alpha,n}^{k,2}(r,1-r)=\sigma_{1n}^k(r)-u_{\alpha,n}^{k,1}(r,1-r),\ r_1\leq r\leq 1,k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots.\end{gathered} \tag{17}$$

Учитывая формулы (14), (15), а также обратимость оператора D_{0t}^α ([10]), задачи (10_α), (13) и (10_α), (17) соответственно сводим к задаче Коши (10_α), (13) и к задаче для (10_0) с данными

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_0}u_{0,n}^{k,2}(r,0)=0,\ 0\leq r\leq 1,\ u_{0,n}^{k,2}(r,\beta(r-r_0)+r_0)=\varphi_{1n}^k(r),r_0\leq r\leq r_1,\\ u_{0,n}^{k,2}(r,1-r)=\varphi_{2n}^k(r),\ r_1\leq r\leq 1,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots,\end{gathered} \tag{18}$$

которое имеет единственное решение ([6]), где $\varphi_{1n}^k(r)$, $\varphi_{2n}^k(r)$ функции, выражающихся через $\tau_n^k(r)$, $\sigma_{\beta n}^k(r)$, $r_0\leq r\leq r_1$ и $\tau_n^k(r)$,$\sigma_{1n}^k(r)$, $r_1\leq r\leq 1$.

Далее, используя утверждения 1 и 2, устанавливается, что задача (10_α), (11) также имеет бесчисленное множество решений.

Таким образом, задача (1), (2) имеет множество решений вида

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{19}$$

где $u_n^k(r,t)$ определяются единственным образом из двумерных задач.

Теперь рассмотрим задачу (1), (3) и ее решение также будем искать в виде (6). Тогда она сведется к задаче (10_α), (12).

Решение задачи (10_α), (12) ищем в виде

$$u^k_{\alpha,n}(r,x_0)=u^{k,1}_{\alpha,n}(r,x_0)+u^{k,2}_{\alpha,n}(r,x_0),$$

где $u^{k,2}_{\alpha,n}(r,x_0)$ – решение задачи Коши (10_α), (16), а $u^{k,1}_{\alpha,n}(r,x_0)$ – решение краевой задачи для уравнения (10_α) с условиями

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial}{\partial x_0}u^{k,1}_{\alpha,n}(r,0)=0,\ 0\le r\le 1,\ u^{k,1}_{\alpha,n}(r,\beta(r-r_0)+r_0)=\\ \sigma^k_{\beta n}(r)-u^{k,2}_{\alpha,n}(r,\beta(r-r_0)+r_0),\ r_0\le r\le r_1,\\ u^{k,1}_{\alpha,n}(r,1-r)=\sigma^k_{1n}(r)-u^{k,2}_{\alpha,n}(r,1-r),\ r_1\le r\le 1, k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots\ .\end{gathered}\qquad(20)$$

Учитывая формулы (15), (14), задачи (10_α), (16) и (10_α), (20), соответственно, сведем к задаче Коши $(10_0),(13')$ и к задаче для (10_0) с данными (18).

Таким образом, задача (1),(3) также имеет единственное решение вида (19), где $u^k_n(r,t)$ находятся из двумерных задач.

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r,\theta),\nu(r,\theta),\sigma_\beta(r,\theta),\sigma_1(r,\theta)$, аналогично [7, 8], можно доказать, что полученное решение $u(r,\theta,t)$ (19) принадлежит искомому классу.

Теорема доказана.

Литература

[1] *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. - М.: Изд-во АН СССР, 1959. - 164 с.

[2] *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. - М.: Наука, 1981. - 448 с.

[3] *Protter M.N.* - Dure Math. J., 1954. Vol.21. N1. P. 1-7

[4] *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. - М.: Наука, 1973. - 711 с.

[5] *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. - М.: Физматгиз, 1962. - 254 с.

[6] *Шерияздан Т.Т.* Задача Дарбу с отходом от характеристики для многомерного волнового уравнения. // Известия НАН РК, серия физико-математическая. N3. 2009. С. 15-19.

[7] *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. - Алматы: Fылым, 1994. - 170 с.

[8] *Алдашев С.А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. - Орал: ЗКАТУ, 2007. - 139 с.

[9] *Терсенов С.А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. - Новосибирск: НГУ, 1973. - 143 с.

[10] *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. - М.: Высшая школа, 1985. - 301 с.