УДК 661:532.546

А.Н. Темирбеков [1], Н.Т. Данаев [2]

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д.Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан [1]
E-mail: almas_tem@mail.ru
Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан [2]
E-mail:Nargozy.Danaev@kaznu.kz

Метод фиктивных областей для модели пограничного слоя атмосферы

В данной работе математически обоснован метод фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам для модели пограничного слоя атмосферы. Задача решается методом расщепления по физическим процессам, для учета орографии местности применяется метод фиктивных областей. Доказана разрешимость математической модели и изучены качественные свойства решений. Доказана теорема существования и единственности решения вспомогательной задачи метода фиктивных областей для уравнения пограничного слоя атмосферы. Получены основные априорные оценки для решения задачи. Доказана теорема сходимости решения вспомогательной задачи метода фиктивных областей к решению исходной.

Ключевые слова: уравнения пограничного слоя атмосферы, метод фиктивных областей, неравенство Юнга, неравенство Гельдера.

A.N. Temirbekov, N.T. Danaev

The fictitious domain method for boundary-layer model of the atmosphere

In this paper, fictitious domain method, following the lower-order coefficients for the model of the atmospheric boundary layer, is mathematically justified. The problem is solved with the use of the method of splitting into physical processes. To account for the orographic terrain, the fictitious domain method is used. The theorem of existence and uniqueness of solutions of the auxiliary problem of the fictitious domain method for the equation of the boundary layer of the atmosphere is proved. The convergence theorem for the solution of the auxiliary problem of the fictitious domain method to the solution of the original one is proved.

Key words: equations of the atmospheric boundary layer, the method of fictitious domains, Young's inequality, Holder's inequality.

А.Н. Темірбеков, Н.Т. Данаев

Атмосфера қабатының моделі үшін жалған аймақтар әдісі

Бұл жұмыста атмосфера қабатының моделі үшін кіші коэффициенттермен жалғастырылған жалған аймақтар әдісінің математикалық мәселелері негізделген. Мекеннің жер бедерін ескеру үшін жалған аймақтар әдісі қолданылып, есеп физикалық процесстерге ыдырату әдісі арқылы шешіледі. Математикалық модельдің шешімі болатындығы және модельдің сапалы қасиеттері зерттелді. Атмосфера қабатының теңдеулері үшін жалған аймақтар көмекші есебінің шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы теорема дәлелденеді. Есептің шешімі үшін, негізгі априорлы бағалар алынды. Жалған аймақтар әдісінің көмекші есебінің шешімі алғашқы есепке жинақталуы туралы теорема дәлелденді.

Түйін сөздер: атмосфера қабатының теңдеулері, жалған аймақтар әдісі, Юнг теңсіздігі, Гельдер теңсіздігі.

Введение

Для численного решения задач гидродинамики в областях сложной формы эффективно использовать метод фиктивных областей [1, 2]. Применению метода фиктивных областей посвящены работы Бугрова А.Н., Коновалова А.Н., Щербака В.А.[3], Войцеховского С.А.[4], Мухамбетжанова А.Т., Отелбаева М.О., Смагулова Ш.С.[5], Орунханова М.К., Смагулова Ш.С.[6]. Обоснование метода фиктивных областей для нелинейной модели гидродинамики рассмотрено в работе Смагулова Ш.С., Бугрова А.Н.[7]. В работе Коновалова А.Н., Коробицыной Ж.А. [8] метод фиктивных областей применен для моделирования краевых условий в задачах фильтрации. Метод фиктивных областей для задач гидродинамики в переменных "функция тока"и "вихрь скорости"изучен в работе [9]. В работе [10] исследуются численные методы решения уравнений Навье-Стокса в двухсвязных областях. Рассматривается два метода решения задачи. Первый метод основан на построении разностной задачи в переменных "функция тока"и "вихрь скорости"с использованием условия однозначности давления. Численное решение эллиптического уравнения для функций тока находится как сумма решений двух простых задач эллиптического типа. Одна задача является с однородными граничными условиями, а другая - с однородным уравнением. Альтернативным подходом к решению поставленной задачи является метод фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам. Этот метод не требует удовлетворения условия однозначности давления и является простым в реализации.

Постановка задачи.

В области $Q_T^0 = \Omega_0 \times (0,T)$, $S_T^0 = S^0 \times (0,T)$ рассмотрим начально-краевую задачу для уравнений пограничного слоя атмосферы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{\nu}}{\partial t} + \vartheta_k \vec{\nu}_{x_k} + grad\pi = \mu\Delta\vec{\nu} + l\vec{k} \times \vec{\nu} + f(x,t), \\ div\vec{\nu} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\vec{\nu}|_{t=0} = a(x), \ \ \vec{\nu}|_{S_T^0} = 0, \tag{2}$$

$$\Omega_0 = \{(x_1, x_2, x_3), 0 \le x_1 \le X, 0 \le x_2 \le Y, \delta(x_1, x_2) \le x_3 \le Z\}. \tag{3}$$

В работе Ладыженской О.А. [11] приводится подробный обзор результатов, полученных для обоснования начально-краевой задачи вида (1), (2). Доказана однозначная разрешимость "в целом"краевой задачи вида (1), (2) в случае двух пространственных переменных. Для общего трехмерного случая задача (1), (2) однозначно разрешима в близи гладких начальных данных, т.е. для малых интервалов $(0,T)$ изменения времени t.Решения задачи (1), (2) зависят непрерывно от входных данных, и их гладкость f, a, S увеличивается по мере увеличения гладкости и порядка согласования входных данных задачи. Эти результаты были получены благодаря переходу от классической постановки задачи (1), (2) к обобщенной, позволяющей исключить из задачи давление без повышения дифференциального порядка системы.

Задача (1), (2) решается методом расщепления по физическим процессам, для учета орографии местности применяется метод фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам. Дополним область Ω_0 до прямоугольного параллелепипеда $\Omega = \Omega_0 \bigcup \Omega_1$ и рассмотрим в $Q_T = \Omega \times (0, T)$ следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial \nu^\varepsilon}{\partial t} + \vartheta_k^\varepsilon \vec{\nu}_{x_k}^\varepsilon + grad\pi^\varepsilon = \mu\Delta\vec{\nu}^\varepsilon + l \cdot \vec{k} \cdot \vec{\nu}^\varepsilon - \dfrac{\xi(x)}{\varepsilon}\vec{\nu}^\varepsilon + f^\varepsilon(x,t), \\ di\nu\vec{\nu}^\varepsilon = 0, \end{array} \tag{4}$$

где

$$\xi(\vec{x}) = \begin{cases} 1, \vec{x} \in \Omega_1, \\ 0, \vec{x} \in \Omega_0, \end{cases} \quad f^\varepsilon(x,t) = \begin{cases} f(\vec{x},t), (\vec{x},t) \in Q_T^0, \\ 0, (x,t) \in Q_T / Q_T^0. \end{cases} \tag{5}$$

Через Ω_1 обозначено дополнение основной области Ω_0 до прямоугольного параллелепипеда Ω. Граница области Ω_0 при $x_3 = \delta(x_1, x_2)$ теперь стала границей раздела между подобластями Ω_0, Ω_1, и на ней должны выполнятся условия

$$\lfloor \vec{\nu}^\varepsilon \rfloor_{X_3=\delta(x_1,x_2)} = 0, \lfloor (\mu\nabla\vec{\nu}^\varepsilon - \delta\pi^\varepsilon)\vec{n} \rfloor_{x_3=\delta(x_1,x_2)} = 0, \tag{6}$$

где $\vec{n}$ - нормальный вектор к границе $x_3 = \delta(x_1, x_2)$.

На границе области Ω ставятся следующие начально-граничные условия:

$$\vec{\nu}^\varepsilon|_{t=0} = a^\varepsilon(x), \ \ \vec{\nu}^\varepsilon|_{S_T} = 0, \tag{7}$$

где

$$a^\varepsilon(x) = \begin{cases} a(x), x \in \Omega_0, \\ 0, x \in \Omega_1. \end{cases}$$

Для исследования задачи (4)-(7) используем пространства $L_m(\Omega), L_m(Q_T), L_{q,r}(Q_T)$, где $Q_T = \Omega \times (0, T)$, и введем скалярное произведение, соответствующие нормы:

$$\begin{array}{l} (u, \vartheta) = \int\limits_\Omega u_{x_k}\vartheta_{x_k}dx = \int\limits_\Omega u_x\vartheta_x dx, \\ \|u\|_{m,\Omega} = \left(\int\limits_\Omega |u|^m dx\right)^{1/m}, \\ \|u\|_{m,Q_T} = \left[\int\limits_0^T \left(\int\limits_\Omega |u|^m dx\right) dt\right]^{1/m}, \\ \|u\|_{q,r,Q_T} = \left[\int\limits_0^T \left(\int\limits_\Omega |u|^q dx\right)^{r/q} dt\right]^{1/r}. \end{array}$$

Обозначим через $M(Q_T)$ следующее множество функций:

$$M(Q_T) = \{\vec{\nu} \in C^\infty(Q_T), \ \ di\nu\vec{\nu} = 0, \ \ \vec{\nu}|_{S_T} = 0\},$$

где $C^\infty(Q_T)$ - множество бесконечно дифференцируемых функций в области Q_T. Замыкания множества $M(Q_T)$ в нормах $L_2(Q_T), W_2^1(Q_T), W_2^2(Q_T)$ обозначим, соответственно,

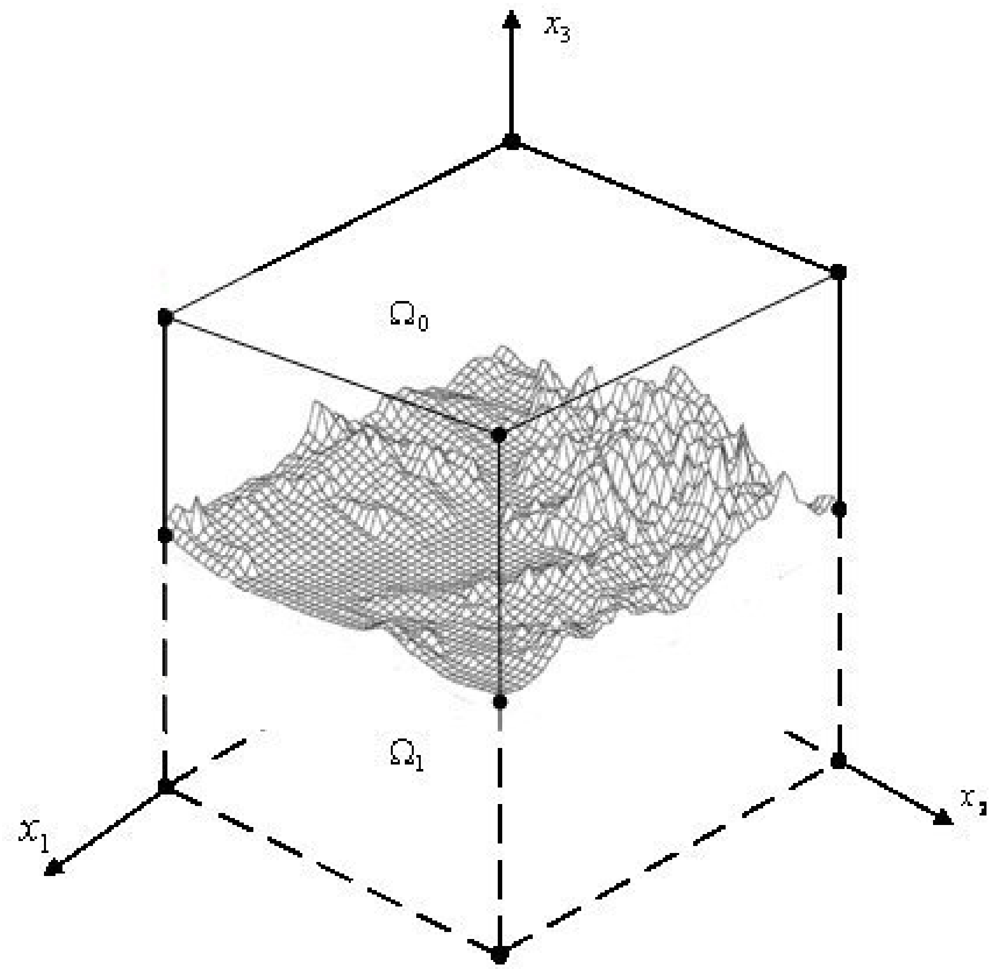

Рисунок 1 – Область решения задачи

через $V_0(Q_T), V_1(Q_T), V_2(Q_T)$. Умножая уравнение (4) скалярно на $\vec{\nu}^\varepsilon$ в Q_T, получим уравнение баланса энергии:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \left(\int\limits_\Omega \nu^\varepsilon \frac{d\nu^\varepsilon}{dt} dx \right) dt + + \int\limits_0^t \left(\int\limits_\Omega \vec{\nu}^\varepsilon grad \pi^\varepsilon dx \right) dt - \mu \int\limits_0^t \left(\int\limits_\Omega \Delta \vec{\nu}^\varepsilon \vec{\nu}^\varepsilon dx \right) dt + \\ + l \int\limits_0^t \left(\int\limits_\Omega \vec{k} \vec{\nu}^\varepsilon \vec{\nu}^\varepsilon dx \right) dt + \int\limits_0^t \left(\int\limits_\Omega \frac{\xi(x)}{\varepsilon} (\vec{\nu}^\varepsilon)^2 dx \right) dt - \int\limits_0^t \left(\int\limits_\Omega f \vec{\nu}^\varepsilon dx \right) dt = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

С помощью граничных условий и интегрирования по частям имеем:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2} \int\limits_0^t \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega (\nu^\varepsilon)^2 dx dt - \int\limits_0^t \left(\int\limits_\Omega \pi^\varepsilon div \vec{\nu}^\varepsilon dx \right) dt + \\ + \mu \int\limits_0^t \|\nu_x^\varepsilon\|^2 dt + \int\limits_0^t \left(\int\limits_\Omega \left(\sqrt{\frac{\xi(x)}{\varepsilon}} \vec{\nu}^\varepsilon \right) dx \right) dt - \int\limits_0^t \left(\int\limits_\Omega f \vec{\nu}^\varepsilon dx \right) dt = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Оно получается с учетом равенства

$$\vec{k}\cdot\vec{\nu}^{\varepsilon}\cdot\vec{\nu}^{\varepsilon}=\begin{vmatrix}0 & 0 & \vec{k}\\ \nu_1^{\varepsilon} & \nu_2^{\varepsilon} & \nu_3^{\varepsilon}\\ \nu_1^{\varepsilon} & \nu_2^{\varepsilon} & \nu_3^{\varepsilon}\end{vmatrix}=0. \tag{10}$$

Далее, учитывая, что $div\vec{\nu}^{\varepsilon}=0$, получим:

$$\frac{1}{2}(\|\vec{\nu}^{\varepsilon}\|^2_{t=T}-\|\vec{\nu}^{\varepsilon}\|^2_{t=0})+\mu\int\limits_0^T\|\vec{\nu}^{\varepsilon}_x\|^2dt+\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega}\left(\sqrt{\frac{\xi(x)}{\varepsilon}}\vec{\nu}^{\varepsilon}\right)^2dx\right)dt-\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega}f^{\varepsilon}\vec{\nu}^{\varepsilon}dx\right)dt=0. \tag{11}$$

Используя неравенство Гельдера и начальное условие, имеем:

$$\|\vec{\nu}^{\varepsilon}(x,T)\|^2+2\mu\|\vec{\nu}^{\varepsilon}_x\|^2_{2,Q_T}+\frac{2\xi(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\|\vec{\nu}^{\varepsilon}\|^2_{2,Q_T}\leq\|a^{\varepsilon}(x)\|^2+2\|f^{\varepsilon}\|_{2,Q_T}\|\vec{\nu}^{\varepsilon}\|_{2,Q_T}. \tag{12}$$

Для получения дальнейшей оценки необходимо дополнительное неравенство оценки решения. Умножая (4) скалярно на $\vec{\nu}^{\varepsilon}$ в $L_2(\Omega)$, получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nu^{\varepsilon}\|^2+\mu\|\nu^{\varepsilon}_x\|^2=(f^{\varepsilon},\nu^{\varepsilon}). \tag{13}$$

Из (13) в силу положительности $\mu\|\nu^{\varepsilon}_x\|^2$ имеем:

$$\|\nu^{\varepsilon}\|\frac{d\|\nu^{\varepsilon}\|}{dt}\leq\|f^{\varepsilon}\|\|\nu^{\varepsilon}\|. \tag{14}$$

Это неравенство выполняется, если $\|V^{\varepsilon}(x,t)\|=0$ или

$$\frac{d}{dt}\|\nu^{\varepsilon}(x,t)\|\leq\|f^{\varepsilon}(x,t)\|. \tag{15}$$

Так как $\|\nu(x,t)\|$ - непрерывная функция аргумента t, интегрируя (15) по t, имеем:

$$\|\nu^{\varepsilon}(x,t)\|\leq\|\nu^{\varepsilon}(x,0)\|+\int\limits_0^t\|f(x,t)\|dt \tag{16}$$

или

$$\|\nu^{\varepsilon}(x,t)\|\leq\|a^{\varepsilon}(x)\|+\int\limits_0^t\|f^{\varepsilon}(x,t)\|dt. \tag{17}$$

Из (12) и (17) имеем:

$$\begin{gathered}\|\vec{\nu}^{\varepsilon}(x,T)\|^2+2\mu\|\vec{\nu}^{\varepsilon}_x\|^2_{2,Q_T}+\frac{2\xi(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\|\vec{\nu}^{\varepsilon}\|^2_{2,Q_T}\leq\\ \leq\|a^{\varepsilon}(x)\|^2+2\left(\|a^{\varepsilon}(x)\|+\int\limits_0^T\|f^{\varepsilon}\|dt\right)\|f^{\varepsilon}\|_{2,Q_T}.\end{gathered} \tag{18}$$

Определение. Обобщенным решением задачи (4)-(7) называется функция

$$\nu^\varepsilon(x,t) \in V_2(Q_T) \cap L_{q,r}(Q_T),$$

удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} &\int\limits_{Q_T} \left[-\nu^\varepsilon \cdot \phi_t + \mu\nu_x^\varepsilon \cdot \phi_x - \vartheta_k^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon \cdot \phi_{x_k}\right] dxdt + \\ &+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_t} \xi(x)\cdot \nu^\varepsilon \phi dxdt + \int\limits_{\Omega} \nu^\varepsilon \phi|_{t=t} dx - \int\limits_{\Omega} a\phi|_{t=0} dx = \int\limits_{Q_t} f\phi dxdt, \end{aligned} \tag{19}$$

при $\forall \phi \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$.

Теорема 1. Пусть $\nu^\varepsilon(x,t) \in V_2(Q_T) \cap L_{q,r}(Q_T), f(x,t) \in V_2(Q_T) \cap L_{q,r}(Q_T)$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (4)-(7), и для решения имеет место оценка (18).

Доказательство. Опустив параметр ε, предполагая, что имеются два решения ν' и ν'', для их разности $u = \nu' - \nu''$ из тождества (19) получим:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{Q_T} \left[-u\phi_t + \mu u_x \phi_x - (\vartheta_k' u + u_k \nu'')\phi_{x_k}\right] dxdt + \\ &+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_t} \xi(x) u\phi dxdt + \int\limits_{\Omega} u\phi|_{t=t} dx = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Рассуждая аналогично, как в работе [11], $\vec{u}$ можно рассматривать как обобщенное решение из $L_2(Q_T)$ задачи

$$\begin{aligned} &u_t - \mu\Delta u = -gradq - \frac{\xi(x)}{\varepsilon}u - \frac{\partial \vec{f}^k}{\partial x_k}, \\ &di\nu u = 0, u|_{S_T} = 0, u|_{t=0} = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

где $\vec{f}^k \equiv \vartheta_k' \vec{u} + u_k \cdot \vec{\nu}'', k = 1,2,3$ рассматриваются как свободные члены.

В работе [11] доказана теорема единственности для $\vec{u}(x,t) \in V_2(Q_T) \cap L_{q,r}(Q_T)$ с q и r, удовлетворяющим условиям:

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} \leq \frac{1}{2}, r \in [2,\infty), q \in (n,\infty] \tag{22}$$

или

$$q > n, r = \infty. \tag{23}$$

После скалярного умножения (21) имеем

$$\frac{1}{2}\|u(x,t)\|^2 + \mu\int\limits_0^t \|u_x\|^2 dt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \xi(x)u^2(x) dxdt = \int\limits_{Q_t} f^k u_{x_k} dxdt = \int\limits_{Q_t} u_k \vec{\nu}'' u_{x_k} dxdt, \tag{24}$$

правая часть которого

$$\int\limits_{Q_t} \vec{f}^k \vec{u}_{x_k} dxdt = \int\limits_{Q_t} u_k \vec{\nu}'' \vec{u}_{x_k} dxdt \tag{25}$$

в классе функций, удовлетворяющим условиям (22) и (23), оценивается используя неравенство Гельдера специальным образом [11].

$$
\begin{aligned}
&\left|\int\limits_{Q_t} u_k \cdot \vec{\nu}'' \vec{u}_{x_k} dxdt\right| \le \left(\int\limits_{Q_t} \vec{u}_x^2 dxdt\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{Q_t} \vec{\nu}''^2 \cdot \vec{u}^2 dxdt\right)^{1/2} \le \\
&\le \|\vec{u}_x\|_{2,Q_t} \cdot \left[\int\limits_0^t \left(\int\limits_\Omega |\vec{\nu}''|^{2\cdot\frac{q}{2}} dx\right)^{2/q} \cdot \left(\int\limits_\Omega |u|^{2\frac{q}{q-2}} dx\right)^{\frac{q-2}{q}} dt\right]^{1/2} \le \\
&\le \|\vec{u}_x\|_{2,Q_t} \left[\int\limits_0^t \left(\int\limits_\Omega |\vec{\nu}''|^q dx\right)^{\frac{2}{q}\cdot\frac{r}{2}} dt\right]^{\frac{1}{r}} \cdot \left[\int\limits_0^t \left(\int\limits_\Omega |u|^{\frac{2q}{q-2}} dx\right)^{\frac{q-2}{2q}\cdot\frac{2r}{r-2}}\right]^{\frac{r-2}{r}} = \\
&= \|\vec{u}_x\|_{2,Q_t} \cdot \|\vec{\nu}''\|_{q,r,Q_t} \cdot \|\vec{u}\|_{\frac{2q}{q-2},\frac{2r}{r-2},Q_t}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Далее, используя неравенство

$$
\|\vec{u}_x\|_{2,Q_t} \cdot \|\vec{u}\|_{\vec{q},\vec{r},Q_t} \le 0,5\beta \cdot \left(\sup_t \|\vec{u}(x,t)\|_{2,\Omega} + \|\vec{u}_x\|_{2,Q_t}\right)^2 = \frac{\beta}{2} \| u \|^2_{Q_t},
$$

где $\vec{q} = \dfrac{2q}{q-2}, \vec{r} = \dfrac{2r}{r-2}$, $\| \vec{u} \| = \sup\limits_t \|\vec{u}(x,t)\| + \|\vec{u}_x\|_{2,Q_t}$, из (26) получим:

$$
\| \vec{u} \|_{Q_t} \le (1 + (2\mu)^{-1/2} + (\varepsilon/2)^{1/2})\beta^{1/2} \|\vec{\nu}''\|^{1/2}_{q,r,Q_t} \| \vec{u} \|_{Q_t},
\tag{27}
$$

из которого следует, что $\vec{u} \equiv 0$ для t, удовлетворяющих требованию

$$
(1 + (2\mu)^{-1/2} + (\varepsilon/2)^{1/2})\beta^{1/2} \|\vec{\nu}''\|^{1/2}_{q,r,Q_t} < 1.
$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда решение задачи (4)-(7) сходится к решению задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Для решения задачи (4)-(7) получена оценка (18). Следовательно, из последовательности $\{\nu^\varepsilon\}$ можно выделить подпоследовательность, для которой при $\varepsilon \to 0$ получим, что $\nu^\varepsilon \to \nu$ слабо в $\overset{\circ}{V}_2(Q_T) \cap L_{q,r}(Q_T)$. В интегральном тождестве (19) положим $\phi_t \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\Omega_0), \phi = 0$ в Ω_1. Далее, учитывая, что $\xi(x) = 0$ в Ω_0, получим интегральное тождество, которое дает обобщенное решение задачи (1), (2).

Из (18) получается оценка:

$$
\|\vec{\nu}^\varepsilon\|^2_{2,Q_T/Q_T^0} \le \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \left(\|a^\varepsilon(x)\|^2 + 2\left(\|a^\varepsilon(x)\| + \int\limits_0^T \|f^\varepsilon\| dt\right) \cdot \|f^\varepsilon\|_{2,Q_T} \right)
\tag{28}
$$

из которой при $\varepsilon \to 0$ следует $\|\vec{\nu}^\varepsilon\|_{2,Q_T/Q_T^0} \to 0$.

Далее, оценим скорость сходимости решения задачи (4)-(7) к решению задачи (1)-(3) по степеням ε. Из уравнения (1) отнимаем уравнение (4) и, обозначив $\omega = \vartheta - \vartheta^\varepsilon, p = \pi - \pi^\varepsilon, \vartheta$, продолжаем нулем в Ω_1. Получим:

$$
\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vartheta_k \cdot \vec{\nu}_{x_k} - \vartheta_k^\varepsilon \cdot \vec{\nu}^\varepsilon_{x_k}) + gradp = \mu\Delta\vec{\omega} - l \cdot \vec{k} \cdot \vec{\omega} + \frac{\xi(x)}{\varepsilon} \cdot \vec{\nu}^\varepsilon + g(x,t),
\tag{29}
$$

$$div\vec{\omega} = 0. \tag{30}$$

Преобразуем нелинейные слагаемые следующим образом:

$$\vartheta_k \cdot \vec{V}_{x_k} - \vartheta_k^\varepsilon \cdot \vec{V}_{x_k}^\varepsilon = \vartheta_k \cdot \vec{V}_{x_k} - \vartheta_k^\varepsilon \cdot \vec{V}_{x_k} + \vartheta_k^\varepsilon \cdot \vec{V}_{x_k} - \vartheta_k^\varepsilon \cdot \vec{V}_{x_k}^\varepsilon = \omega_k \cdot \vec{V}_{x_k} + \vartheta_k^\varepsilon \cdot \vec{\omega}_{x_k}$$

и перепишем уравнение (29) в виде

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \vartheta_k^\varepsilon \cdot \vec{\omega}_{x_k} + \omega_k \cdot \vec{V}_{x_k} + gradp = \mu\Delta\vec{\omega} - l \cdot \vec{k} \cdot \vec{\omega} + \frac{\xi(x)}{\varepsilon}\vec{V}^\varepsilon + g(x,t). \tag{31}$$

Умножим (31) на $\vec{\omega} \in V_2(Q_T) \cap L_{q,r}(Q_T)$ и, интегрируя по частям в Q_T, получим:

$$\frac{1}{2}dt\|\vec{\omega}\|^2 + \int\limits_{Q_t} \omega_k \vec{V}_{x_k} \cdot \vec{\omega}dxdt + \mu\int\limits_0^t \|\vec{\omega}_x\|^2 dt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \xi(x) \cdot \vec{V}^\varepsilon \cdot \vec{\omega}dxdt = 0. \tag{32}$$

Оценим нелинейное слагаемое в (32) по модулю, используя неравенство Юнга:

$$J = \left|\int\limits_{Q_t} \omega_k \vec{V}_{x_k} \cdot \vec{\omega}dxdt\right| \leq \left|c\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \omega_k^2 \cdot \vec{V}_{x_k}dxdt\right| \leq$$
$$\leq c\int\limits_0^t \left(\int\limits_\Omega V_x^2 dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_\Omega \omega^4(x,t)dx\right)^{1/2} dt = c\int\limits_0^t \|\vec{V}_x\|_\Omega \cdot \|\omega\|_{L_4(\Omega)}^2 dt$$

Далее, используя неравенство теоремы вложения, получим:

$$J \leq c \cdot \int\limits_0^t (4/3)^{3/4}\|\vec{V}_x\|_\Omega \|\vec{\omega}\|_\Omega^{1/2}.$$

Литература

[1] Коновалов А.Н., Конюх Г.В., Цуриков Н.В. О принципах построения итерационных процессов в методе фиктивных областей // Вариационные методы в задачах численного анализа: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. Отделение. ВЦ. 1986.

[2] Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. - М.: Изд-во МГУ, 1991.

[3] Бугров А.Н., Коновалов А.Н., Щербак В.А. Метод фиктивных областей в плоских статических задач теории упругости // Численные методы механики сплошной среды.-Новосибирск, 1974. -Т.5, №1.-С.20-30.

[4] Войцеховский С.А. Метод фиктивных областей для эллиптических уравнений второго порядка // Вычислительная и прикладная математика. Киев, 1981. - № 58.-С.21-26.

[5] Мухамбетжанов А.Т., Отелбаев М.О., Смагулов Ш.С. Об одном методе фиктивных областей для нелинейных краевых задач // Вычислительные технологии.-Новосибирск: СО РАН, 1998.-Т.3,№4.-С.41-64.

[6] Орунханов М.К., Смагулов Ш.С. Метод фиктивных областей для уравнения Навье-Стокса в терминах функции тока и вихря скоростей с неоднородными граничными условиями // Вычислительные технологии.-Новосибирск: СО РАН, 2000.-Т.5, №3.-С.46-53.

[7] Бугров А.Н., Смагулов Ш.С. Метод фиктивных областей в краевых задачах для уравнений Навье-Стокса // Математические модели течения жидкости.- Новосибирск, 1971.-С.79-90.

[8] Коновалов А.Н., Коробицина Ж.Л. Моделирование краевых условий в задачах с помощью метода фиктивных областей // Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Труды III - Всесоюз. Конф.-Новосибирск, 1977.-С.115-120.

[9] Бугров А. Н. Метод фиктивных областей в уравнениях относительно функции тока для вязкой несжимаемой жидкости. Препр. Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1977.

[10] Темирбеков А.Н. Численное решение уравнений Навье-Стокса в двухсвязной области с использованием условия однозначности давления // Вестник КазНПУ, серия «физико-математические науки» №4(44), 2013. - С.141-146.

[11] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Наука, 1970.

References

[1] *Konovalov A.N., Konyuh G.V., Tsurikov N.V.* O principah postroenija iteracionnyh processov v metode fiktivnyh oblastej // Variacionnye metody v zadachah chislennogo analiza: Sb. nauch. tr. / AN SSSR. Sib. Otdelenie. VC. 1986.

[2] *Vabishhevich P.N.* Metod fiktivnyh oblastej v zadachah matematicheskoj fiziki. - M.: Izd-vo MGU, 1991.

[3] *Bugrov A.N., Konovalov A.N., Shherbak V.A.* Metod fiktivnyh oblastei v ploskih staticheskih zadach teorii uprugosti // Chislennye metody mehaniki sploshnoj sredy.-Novosibirsk, 1974. -T.5, №1.-S.20-30.

[4] *Vojcehovskij S.A.* Metod fiktivnyh oblastej dlja jellipticheskih uravnenij vtorogo porjadka // Vychislitel'naja i prikladnaja matematika. Kiev, 1981. - № 58.-S.21-26.

[5] *Muhambetzhanov A.T., Otelbaev M.O., Smagulov Sh.S.* Ob odnom metode fiktivnyh oblastej dlja nelinejnyh kraevyh zadach // Vychislitel'nye tehnologii.-Novosibirsk: SO RAN, 1998.-T.3,№4.-S.41-64.

[6] *Orunhanov M.K., Smagulov Sh.S.* Metod fiktivnyh oblastej dlja uravnenija Nav'e-Stoksa v terminah funkcii toka i vihrja skorostej s neodnorodnymi granichnymi uslovijami // Vychislitel'nye tehnologii.-Novosibirsk: SO RAN, 2000.-T.5, №3.-S.46-53.

[7] *Bugrov A.N., Smagulov Sh.S.* Metod fiktivnyh oblastej v kraevyh zadachah dlja uravnenij Nav'e-Stoksa // Matematicheskie modeli techenija zhidkosti.- Novosibirsk, 1971.-S.79-90.

[8] *Konovalov A.N., Korobicina Zh.L.* Modelirovanie kraevyh uslovij v zadachah s pomoshh'ju metoda fiktivnyh oblastej // Chislennoe reshenie zadach fil'tracii mnogofaznoj neszhimaemoj zhidkosti. Trudy III - Vsesojuz. Konf.-Novosibirsk, 1977.-S.115-120.

[9] *Bugrov A. N.* Metod fiktivnyh oblastej v uravnenijah otnositel'no funkcii toka dlja vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti. Prepr. In-t matematiki SO AN SSSR, Novosibirsk, 1977.

[10] *Temirbekov A.N.* Chislennoe reshenie uravnenij Nav'e-Stoksa v dvuhsvjaznoj oblasti s ispol'zovaniem uslovija odnoznachnosti davlenija. Vestnik KazNPU, serija «fiziko-matematicheskie nauki» №4(44)2013 str. 141-146.

[11] *Ladyzhenskaja O.A.* Matematicheskie voprosy dinamiki vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti. - M.: Nauka, 1970.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. *Абденова Азиза Мустафаевна* - магистр, инженер лаборатории Интеллектуальных систем управления и прогнозирования

2. *Аипенова Азиза Сраиловна* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби

3. *Айсагалиев Серикбай Абдигалиевич* - профессор механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор технических наук

4. *Ақпан Даурен Болатұлы* - магистр, инженер лаборатории Интеллектуальных систем управления и прогнозирования

5. *Бектемесов Аманжол Тохтямович* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби

6. *Буренков Виктор Иванович* - профессор Евразийского национального университета имени Л. Н Гумилева

7. *Данаев Наргозы Турсынбаевич* - профессор механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор физико-математических наук

8. *Жунусова Жанат Хафизовна* - доцент механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, кандидат физико-математических наук

9. *Иманбаев Нурлан Сайрамович* - профессор Международного Казахско-Турецкого университета им. Х. А. Ясави

10. *Исахов Алибек Абдиашимович* - PhD доктор механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби

11. *Исахов Асылбек Абдиашимович* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби

12. *Кангужин Балтабек Есматович* - профессор механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор физико-математических наук

13. *Кыдырмина Нургуль Алимовна* - научный сотрудник РГКП Институт прикладной математики, Караганда, Казахстан

14. *Ланца де Кристофорис Массимо* - профессор математического факультета Университета Падуи

15. *Садыбеков Махмуд Абдысаметович* - профессор, Институт математики и математического моделирования, заведующий отделом прикладных исследований, доктор физико-математических наук

16. *Самигулина Галина Ахметовна* - доцент, заведующая лабораторией Интеллектуальных систем управления и прогнозирования, доктор технических наук

17. *Севрюгин Илья Валерьевич* - научный сотрудник механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби

18. *Темирбеков Алмас Нурланович* - PhD докторант факультета информационных технологий и энергетики Восточно-Казахстанчкого государственного технического университета им. Д. Серикбаева

19. *Токмагамбетов Нияз Есенжолович* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби