МРНТИ 27.29.19

Функция Грина задачи Дирихле дифференциального оператора на графе - звезде при m

Аймал Раса Гулам Хазрат, Университет образования Шахида Устад Раббани, г. Кабул, Афганистан, Казахский национальный университет им.аль-Фараби, г.Алматы, Республика Казахстан, E-mail: aimal.rasa14@gmail.com
Аузерхан Г.С., Казахский национальный университет им.аль-Фараби , г.Алматы, Республика Казахстан, E-mail: auzerkhanova@gmail.com
Конырkулжаева М. Н., Казахский национальный университет им.аль-Фараби, г.Алматы, Республика Казахстан, E-mail: maralkulzha@gmail.com

В данной работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. Задачи для дифференциальных операторов на графах в настоящее время активно изучаются математиками и имеют приложения в квантовой механике, органической химии, нанотехнологиях, теории волноводов и других областях естествознания. Граф представляет собой структуру, состоящую из «абстрактных» отрезков и вершин, примыкание которых друг к другу описывается некоторым отношением. Для определения оператора на заданном графе необходимо выделить множество граничных вершин. Вершины не являющиеся граничными называются внутренними вершинами. Дифференциальный оператор на заданном графе определяется не только заданными дифференциальными выражениями на дугах, но и условиями типа Кирхгофа во внутренних вершинах графа. В данной статье решена задача Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе. Нами использованы стандартные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Также в этой работе представлено функция Грина дифференциального оператора на графе-звезде. Вопросы из спектральной теории, как построение функции Грина и разложение по собственным функциям для моделей из соединенных стрежней мало изучены. Спектральный анализ дифференциальных операторов на графах является основным математическим аппаратом при решении современных проблем квантовой механики.
Ключевые слова: ориентированный граф, вершины графа, условия Кирхгофа, колебания упругих сетей, задача Дирихле, разложение по собственным функциям.

Жұлдыз пішінді граф бойындағы дифференциалдық оператордың Грин функциясы m үшін

Аймал Раса Гулам Хазрат, Шахид Устад Раббани атындағы Білім беру университеті, Кабул қ, Афганистан, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: aimal.rasa14@gmail.com
Аузерхан Г.С, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: auzerkhanova@gmail.com
Коныркулжаева Марал. Н., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: maralkulzha@gmail.com

Бұл жұмыста стерженді құрылымды тербелмелі жүйелердің моделі болып табылатын екінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі зерттеледі. Графтағы дифференциалдық операторларға қойылған есептерді қазіргі уақытта математиктер белсене зерттеуде және кванттық механика, органикалық механика, нанотехнология, толқындар теориясы мен ғылымның басқа да салаларында қолданыс табады. Граф-төбелер деп аталатын шектеулі нүктелердің жиынтығы; төберлердің кейбіреулері графтың қырлары деп аталатын сызықтарымен байланысқан болады. Граф бойында төбелерді анықтау үшін шекаралық төбелер жиынын белгілеу қажет. Шекаралық төбелерден өзге ішкі төбелер бар. Берілген граф бойындағы дифференциалдық оператор дифференциалдық өрнекпен және ішкі төбелерде анықталған Кирхгоф шарттарымен анықталады. Бұл мақалада жұлдыз тәрізді бағанда дифференциалдық оператор үшін Дирихле есебі шешілді. Біз ішкі шыңдарда желімдеудің стандартты шарттарын және шекаралық шыңдарда Дирихленің шеттік шарттарын пайдаландық. Сондай-ақ, бұл жұмыста дифференциалдық оператордың Грин функциясы ұсынылған. Спектрлік теориядан алынған сұрақтар, Грин функциясын құру және құрама стрежнейден модельдер үшін өз функциялары бойынша жіктеу сияқты аз зерттелген. Графтағы дифференциалдық операторлардың спектралдық талдауы кванттық механиканың қазіргі мәселелерін шешудегі негізгі математикалық аппарат болып табылады.
Түйін сөздер:бағытталған граф, графтың төбелері, Кирхгоф шарты, серпімді желілердің тербелістері, Дирихле есебі, меншікті функциялар бойынша жіктеу.

Green's function for differential operator on a star shaped graph for m

Ghulam Hazrat Aimal Rasa, Shaheed Ustad Rabbani University of Education
Kabul, Afganistan al-Farabi Kazakh National University,Almaty, Kazakhstan,
E-mail: aimal.rasa14@gmail.com
Auzerkhan G.S., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
E-mail: auzerkhanova@gmail.com
Konyrkulzhayeva M.N, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
E-mail: maralkulzha@gmail.com

In this paper, we investigate a system of second-order differential equations, which is a model of oscillatory systems with a rod structure. Problems for differential operators on graphs are currently being actively studied by mathematicians and have applications in quantum mechanics, organic chemistry, nanotechnology, the theory of waveguides and other fields of natural science. A graph is a structure consisting of "abstract"segments and vertices whose adjoining to each other is described by a certain relation. To define an operator on a given graph, it is necessary to select a set of boundary vertices. Vertices that are not boundary are called internal vertices. The differential operator on a given graph is determined not only by given differential expressions on arcs, but also by conditions of the Kirchhoff type at the internal vertices of the graph. This article solved the Dirichlet problem for a differential operator on a star graph. We used the standard gluing conditions at inner vertices and Dirichlet boundary conditions at the boundary vertices. Also in this paper, the subtraction of Green's function of a differential operator on a star shaped graph is presented. Questions from spectral theory, such as the construction of the Green function and the expansion in eigenfunctions for models from connected rods, have been little studied. Spectral analysis of differential operators on graphs is the main mathematical apparatus in solving modern problems of quantum mechanics.
Key words: oriented graph, vertices of graph, Kifchhoff condition, vibrations of elastic networks, Dirichlet problem, extension by eigenfunctions.

1 Введение

В работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией.
Основное внимание в этой статье уделяется спектру дифференциальных операторов второго порядка на графах. Различные функциональные пространства на графах

определены, и мы определяем, с точки зрения как дифференциальных систем, так и вышеупомянутых функциональных пространств, краевые задачи на графах. Показано, что краевая задача на графе спектрально эквивалентна системе с разделенным граничным условием. Основная цель этой статьи - решить задачу Дирихле и построить его функцию Грина для зведообразного графа.
Граф-звезда - это связанный граф, в котором не более одной вершины имеет степень больше единицы. Вершина, имеющая степень больше единицы, называются внутренней вершиной граф-звезды. Вершины, не являющиеся внутренними, называются граничными вершинами. Пусть задан ориентированный графа-звезда $G = \{\nu, \varepsilon\}$ где ν, ε - два множества. Элементы множества ν - называются вершинами графа, через ε обозначено множество его дуг. Количество дуг обозначим через m. Пусть $\Gamma = \{0\}$ - внутреняя вершина, $\Gamma = \{1, ..., m\}$ -граничные вершины. При $j = \overline{1, m}$ исходящую из вершины j дугу обозначим e_j. В дальнейшем считаем, что длина каждой дуге $|e_j| = a_j$. На каждой дуге e_j введем переменную $x_j \in [0, a_j]$. Для удобства обозначим значением $x_j = a_j$ соответствующую граничную вершину дуги e_j, а значением $x_j = 0$ внутреннюю вершину. В предлагаемой работе исследуются свойства функций Грина краевой задачи для дифференциальных уравнений второго порядка на графе-звезде.

2 Обзор литературы

В последние 25-30 лет теория дифференциальных уравнений и краевых задач на геометрических графах (пространственных сетях) интенсивно развивается, тому свидетельствуют многочисленные научные работы. Начало исследований было положено в работах (Б.С. Павлов [1], Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин ([2], [3]) и др.) и зарубежных (J. von Below ([4], [5]), G. Lumer [6], S. Nicaise [7]) и других [10-20] математиков и касалось задач, описывающих различные модели: диффузии, колебаний упругих сеток, распространения нервного импульса и др. Работы зарубежных математиков, в основном, посвящены обоснованию разрешимости краевых задач на графах, исследованию структуры спектра этих задач, асимптотики спектра, получению оценок резольвенты. В настоящее время наиболее активные исследования проводятся творческой группой Ю.В.Покорного (А.В. Боровских, К.П. Лазарев, О.М. Пенкин, В.J1. Прядиев, С.А. Шабров), Б.Е.Кангужина (Л.К.Жапсарбаева), Н.П. Бондаренко, основные результаты которых отражены в [8,9,10] (см. также библиографию в [8,9,10]). В частности, в работе [9] исследована функция Грина для задачи Дирихле на графе-звезде и приведены теоремы о разложений.

3 Материал и методы

Более подробно остановимся на результатах, касающиеся решения задачи Дирихле для дифференциальных операторов второго порядка на многообразиях типа сети. В данной работе для полного описания и решения задачи Дирихле для дифференциального оператора второго порядка на графе-звезде использован синтетический подход.

4 Определение дифференциального оператора на графе-звезде

В дальнейшем полезно ввести пространство

$$L_2(G) = \prod_{e\in\varepsilon} L_2(e)$$

с элементами

$$\overrightarrow{Y}(\overrightarrow{x}) = [y_e(x_e), e \in \varepsilon]^T$$

(где $\overrightarrow{x} = x_e, e \in \varepsilon$ и $\prod\limits_{e\in\varepsilon}$ -декартово произведение подпространств) и с конечной нормой

$$||\overrightarrow{Y}||_{L_2(G)} = \sqrt{\sum_{e\in\varepsilon} \int_e |y_e(x_e)|^2 dx_e}.$$

Точно также стандартным образом вводится пространство

$$W_2^2(G) = \prod_{e\in\varepsilon} W_2^2(e).$$

Введем множество функций $D(\wedge) \subset W_2^2(G)$, элементы которых в каждой внутренней вершине удовлетворяют условиям Кирхгофа[1].

$$\begin{cases} y_1(0) = y_j(0), j = 2, ..., m \\ \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{m} y_j'(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

В электрических сетях они выражают закон Кирхгофа, при колебаниях упругих сетей - баланс напряжений. Рассмотрим дифференциальный оператор $\wedge$, задаваемый линейными дифференциальными выражениями

$$-y_j''(x_j) = \lambda y_j(x_j) + f_j(x_j), e_j \in \varepsilon, 0 < x_j < a_j, j = 1, ..., m. \tag{2}$$

с областью определения $D(\wedge)$. λ - спектральный параметр, $\{f_j(x_j), 0 < x_j < a_j\}$ - плотность распределения внешней силы. В данной работе показано решение задачи (1), (2) с условиями Дирихле в граничных вершинах

$$y_1(a_1) = ... = y_m(a_m) = 0. \tag{3}$$

4.1 Построение функции Грина задачи Дирихле

В настоящем пункте изучается вопрос о существовании функции Грина для задачи Дирихле

$$-y''(x) = \lambda y(x) + F(x), 0 < x < a, \tag{4}$$

$$y(a) = 0, y(0) = 0. \tag{5}$$

Под функцией Грина мы понимаем матричную функцию двух переменных $G(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{t}, \lambda)$ при каждой $F(\cdot)$ непрерывной на графе G и заданную формулой

$$y(\overrightarrow{x}, \lambda) = \int_G G(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{t}, \lambda)F(t)dt.$$

Лемма 1 Решение задачи (4), (5) может быть представлено в виде

$$y(x,\lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t,\lambda,)s_a(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt + \int_x^a \frac{s_a(t,\lambda)s_0(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt, \tag{6}$$

где $D(t,\lambda) = -s'_a(t,\lambda)s_0(t,\lambda) + s_a(t,\lambda)s'_0(t,\lambda)$ и функций $s_0(x,\lambda)$ и $s_a(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями однородной задачи Коши

$$-s''_0(x) = \lambda s_0(x), 0 < x < a, s_0(0,\lambda), s'_0(0,\lambda) = 1,$$
$$-s''_a(x) = \lambda s_a(x), 0 < x < a, s_a(0,\lambda), s'_a(0,\lambda) = 1.$$

Доказательство. Покажем, что правая часть выражения (6) является решением задачи (4), (5). Сначала вычислим первую производную

$$y'(x,\lambda) = \int_0^x \tfrac{s_0(t,\lambda)s'_a(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt + \int_x^a \tfrac{s_a(t,\lambda)s'_0(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt,$$

Теперь вычислим вторую производную

$$y''(x,\lambda) = \int_0^x \tfrac{s_0(t,\lambda)s''_a(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt + \int_x^a \tfrac{s_a(t,\lambda)s''_0(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt - F(x).$$

Так как

$s''_0(x,\lambda) = -\lambda s_0(x,\lambda), s''_a(x,\lambda) = -\lambda s_a(x,\lambda)$ тогда с учетом (6). Получим

$$y''(x,\lambda) = -\lambda(\int_0^x \tfrac{s_0(t,\lambda)s_a(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt + \int_x^a \tfrac{s_a(t,\lambda)s_0(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt - F(x) = -\lambda y(x,\lambda) - F(x).$$

отсюда следует соотношение (4). Теперь проверим выполнение граничных условий (5). Значение x = 0 подставляя в (6), получим

$$y(0,\lambda) = \int_x^a \frac{s_a(t,\lambda)s_0(0,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt = 0,$$

так как $s_0(0,\lambda) = 0$. Значение $x = a$ подставляя в (6), получим

$$y(a,\lambda) = \int_x^a \frac{s_0(t,\lambda)s_a(a,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt = 0,$$

так как $s_a(a,\lambda) = 0$. Лемма 1 доказана.
Из Леммы 1 следует следующая теорема.

5 Функция Грина задачи Дирихле (1),(2),(3)

Мы решаем задачи дифференциального оператора на графе-звезде при m

$$\begin{cases} -y_1''(x_1) = \lambda y_1(x_1) + f_1(x_1); x_1 \in e_1 \\ -y_2''(x_2) = \lambda y_2(x_2) + f_2(x_2); x_2 \in e_2 \\ \text{.........} \\ -y_m''(x_m) = \lambda y_m(x_m) + f_m(x_m); x_m \in e_m \end{cases}$$

В первом уравнение $y_1(x_1), y_2(x_2), .., y_m(x_m)$ неизвестно, известны функций $f_1(x_1), f_2(x_2), .., f_m(x_m), \lambda$. Также условия Дирихле: $y_1(a_1) = y_2(a_2) = ... = y_m(a_m) = 0$ и условия Кирхгофа:

$$y_1(0) = y_2(0) = ... = y_m(0); \sum_{k=1}^{m} y_j'(0) = 0$$

Теорема 1. Если $f_1(x_1) \neq 0, .., f_m(x_m) \neq 0, \lambda$, то решение задачи (1),(2),(3) может быть записано в виде

$$y_j(x_j) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k} \left\{ \begin{array}{c} \sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m} \int_0^{a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin\sqrt{\lambda} a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j - x_j)}{\sin\sqrt{\lambda} a_j} f_k(t_k) dt_k + \\ \\ + \int_0^{x_j} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j - x_j)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} a_j} (\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m} \sqrt{\lambda} \sin\sqrt{\lambda} t_j \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k + \\ + \cos\sqrt{\lambda} t_j) f_j(t_j) dt_j + \\ \\ + \int_{x_j}^{a_j} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j - t_j)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} a_j} (\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m} \sqrt{\lambda} \sin\sqrt{\lambda} x_j \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k + \\ + \cos\sqrt{\lambda} x_j) f_j(t_j) dt_j \end{array} \right\},$$

Это теорема общее решение линейного дифференциального уравнения и задачи при m имеет вид

Доказательство Нам надо показать теорему 1, сначала вычислим первую производную

$$y'_j(x_j)=\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{m}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{\lambda}a_k}\left\{\begin{array}{c}\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\int_0^{a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k}\frac{-\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}(a_j-x_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}f_k(t_k)dt_k-\\ \\ -\int_0^{x_j}\frac{\cos\sqrt{\lambda}(a_j-x_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}(\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{\lambda}a_j\sin\sqrt{\lambda}t_j+\\ +\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t_j)f_j(t_j)dt_j+\\ \\ +\int_{x_j}^{a_j}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j-t_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}(\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x_j\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{\lambda}a_k-\\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x_j)f_j(t_j)dt_j\end{array}\right\},$$

Теперь вычислим вторую производную

$$y''_j(x_j)=\frac{1}{\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{\lambda}a_k}\left\{\begin{array}{c}\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\int_0^{a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k}\frac{(-\lambda)\sin\sqrt{\lambda}(a_j-x_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}f_k(t_k)dt_k-\\ \\ -\lambda\int_0^{x_j}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j-x_j)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_j}(\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sin\sqrt{\lambda}t_j\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{\lambda}a_k+\\ +\cos\sqrt{\lambda}t_j)f_j(t_j)dt_j-\\ \\ -\lambda\int_{x_j}^{a_j}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j-t_j)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_j}(\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sin\sqrt{\lambda}x_j\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{\lambda}a_k+\\ +\cos\sqrt{\lambda}x_j)f_j(t_j)dt_j-\\ \\ -f_j(x_j)\end{array}\right\},$$

Мы можем общее решение задачи (1),(2),(3) записать в следующим виде

$$y_j(x_j)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\begin{array}{c}\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\int\limits_0^{a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j-x_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}f_k(t_k)dt_k+\\ \\ +\int\limits_0^{x_j}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j-x_j)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_j}(\Psi_j(t_j,\lambda))f_j(t_j)dt_j+\int\limits_{x_j}^{a_j}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j-t_j)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_j}(\Psi_j(x_j,\lambda))f_j(t_j)dt_j\end{array}\right\},$$

где здесь $\Delta(\lambda)$ обозначается через $\Delta(\lambda)=\sum\limits_{k=1}^{m}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{\lambda}a_k, \Psi_j(t_j,\lambda)=\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t_j\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{\lambda}a_k+\cos\sqrt{\lambda}t_j,$

$$\Psi_j(x_j,\lambda)=\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x_j\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{\lambda}a_k+cos\sqrt{\lambda}x_j,$$

Вводим решение задачи (1),(2),(3) для функций в следующим виде $y_1(x_1), y_2(x_2), .., y_m(x_m)$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(x_1) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{\begin{array}{c} \sum\limits_{k=1,k\neq 1}^{m} \int\limits_0^{a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1} f_k(t_k)dt_k + \\ + \int\limits_0^{x_1} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_1} (\Psi_1(t_1,\lambda)) f_1(t_1)dt_1 + \\ + \int\limits_{x_1}^{a_1} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_1} (\Psi_1(x_1,\lambda)) f_1(t_1)dt_1 \end{array}\right\} \\ y_2(x_2) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{\begin{array}{c} \sum\limits_{k=1,k\neq 2}^{m} \int_0^{a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-x_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2} f_k(t_k)dt_k + \\ + \int\limits_0^{x_2} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-x_2)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_2} (\Psi_2(t_2,\lambda)) f_2(t_2)dt_2 + \\ + \int\limits_{x_2}^{a_2} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_2} (\Psi_2(x_2,\lambda)) f_2(t_2)dt_2 \end{array}\right\} \\ \qquad\qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ y_m(x_m) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{\begin{array}{c} \sum\limits_{k=1,k\neq m}^{m} \int\limits_0^{a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m} f_k(t_k)dt_k + \\ + \int\limits_0^{x_m} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_m} (\Psi_m(t_m,\lambda)) f_m(t_m)dt_m + \\ + \int\limits_{x_m}^{a_m} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_m} (\Psi_m(x_m,\lambda)) f_m(t_m)dt_m \end{array}\right\} \end{array}\right\} \tag{7}$$

Покажем, что функций заданные системой (7) удовлетворяют уравнениям (2), граничным условиям (3) и условиям

$$y_1(0) = y_j(0), j = 2, ..., m. \tag{8}$$

Затем проверяем выполнения граничных условий (1). Тогда получим

$$\left\{\begin{array}{c} y_1(0) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \sum\limits_{k=1,k\neq 1}^{m} \int\limits_0^{a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k} f_k(t_k)dt_k + \int\limits_0^{a_1} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_1} (\Psi_1(0,\lambda)) f_1(t_1)dt_1 \right\} \\ y_2(0) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \sum\limits_{k=1,k\neq 2}^{m} \int\limits_0^{a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k} f_k(t_k)dt_k + \int\limits_0^{a_2} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_2} (\Psi_2(0,\lambda)) f_2(t_2)dt_2 \right\} \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ y_m(0) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \sum\limits_{k=1,k\neq m}^{m} \int\limits_0^{a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k} f_k(t_k)dt_k + \int\limits_0^{a_m} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_m} (\Psi_m(0,\lambda)) f_m(t_m)dt_m \right\} \end{array}\right. \tag{9}$$

Отсюда мы проверим вторую часть уравнения (1).

$$y_1'(0) + y_2'(0) + ... + y_m'(0) = 0$$

$$-\int\limits_0^{a_2}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a_1}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}f_2(t_2)dt_2-\int\limits_0^{a_3}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_3-t_3)}{\sin\sqrt{\lambda}a_3}\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a_1}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}f_3(t_3)dt_3-...-$$
$$\int\limits_0^{a_m}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a_1}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}f_m(t_m)dt_m+$$
$$\int\limits_0^{a_1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}(\sqrt{\lambda}\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}a_2+\sqrt{\lambda}\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}a_3+...+\sqrt{\lambda}\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}a_m)f_1(t_1)dt_1-$$
$$\int\limits_0^{a_1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a_2}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}f_1(t_1)dt_1-\int\limits_0^{a_3}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_3-t_3)}{\sin\sqrt{\lambda}a_3}\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a_2}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}f_3(t_3)dt_3-...-$$
$$\int\limits_0^{a_m}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a_2}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}f_m(t_m)dt_m+$$
$$\int\limits_0^{a_2}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}(\sqrt{\lambda}\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}a_1+\sqrt{\lambda}\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}a_3+...+\sqrt{\lambda}\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}a_m)f_2(t_2)dt_2-$$
$$...\qquad ...$$
$$...\quad\int_0^{a_1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a_{m-1}}{\sin\sqrt{\lambda}a_{m-1}}f_1(t_1)dt_1-\int_0^{a_2}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a_{m-1}}{\sin\sqrt{\lambda}a_{m-1}}f_2(t_2)dt_2-...-$$
$$\int_0^{a_m}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a_{m-1}}{\sin\sqrt{\lambda}a_{m-1}}f_m(t_m)dt_m+\int_0^{a_m}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}(\sqrt{\lambda}\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}a_1+\sqrt{\lambda}\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}a_2+$$
$$...+\sqrt{\lambda}\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}a_m)f_m(t_m)dt_m=0$$

Теперь проверим выполнение условия (3).

$$\left\{\begin{array}{c}
y_1(a_1)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\begin{array}{c}
\sum\limits_{k=1,k\neq1}^{m}\int\limits_0^{a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-a_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}f_k(t_k)dt_k+\\
\\
+\int\limits_0^{a_1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-a_1)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_1}(\Psi_1(t_1,\lambda))f_1(t_1)dt_1+\\
+\int_{a_1}^{a_1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_1}(\Psi_1(a_1,\lambda))f_1(t_1)dt_1=0
\end{array}\right\}\\
\\
y_2(a_2)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\begin{array}{c}
\sum\limits_{k=1,k\neq2}^{m}\int\limits_0^{a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-a_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}f_k(t_k)dt_k+\\
\\
+\int\limits_0^{a_2}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-a_2)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_2}(\Psi_2(t_2,\lambda))f_2(t_2)dt_2+\\
+\int_{a_2}^{a_2}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_2}(\Psi_2(a_2,\lambda))f_2(t_2)dt_2=0
\end{array}\right\}\\
\\
...\qquad ...\qquad ...\\
\\
y_m(a_m)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\begin{array}{c}
\sum\limits_{k=1,k\neq m}^{m}\int\limits_0^{a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-a_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}f_k(t_k)dt_k+\\
+\int\limits_0^{x_m}f_m(t_m)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-a_m)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_m}(\Psi_m(t_m,\lambda))dt_m+\\
+\int\limits_{a_m}^{a_m}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_m}(\Psi_m(a_m,\lambda))dt_m=0
\end{array}\right\}
\end{array}\right\}$$

В итоге получили, что (7) является решением задачи (1), (2), (3). Теорема доказана.
Теорема 2 Для функций Грина задачи (1), (2), (3) справедливо представление

$$G(\vec{x},t,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{bmatrix}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\\ \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}\\ \vdots\\ \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1} & \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2} & \dots & \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\end{bmatrix}$$

$$-diag\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\dots\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\right]$$

$$+diag\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_1}\Psi_1(t_1,\lambda)\quad\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-x_2)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_2}\Psi_2(t_2,\lambda)\quad\dots\quad\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_m}\Psi_m(t_m,\lambda)\right]+$$

$$+diag\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_1}\Psi_1(x_1,\lambda)\quad\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_2}\Psi_2(x_2,\lambda)\quad\dots\quad\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_m}\Psi_m(x_m,\lambda)\right].$$

Доказательство Решение задачи (1), (2), (3) в матрично-векторном виде $\vec{y}_m(\vec{x})$ для $f_1(x_1)\neq 0,\dots,f_m(x_m)\neq 0$

$$\vec{y}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} y_1(x_1) \\ y_2(x_2) \\ \vdots \\ y_m(x_m) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{r} \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq 1}}^{m} \int\limits_0^{a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k} \cdot \frac{\sin\lambda(a_1 - x_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1} f_k(t_k)dt_k + \\ + \int\limits_0^{x_1} f_1(t_1)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_1}\left(\Psi_1(t_1,\lambda)\right)dt_1 + \\ + \int\limits_{x_1}^{a_j} f_1(t_1)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_1}\left(\Psi_1(x_1,\lambda)\right)dt_1 \\ \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq 2}}^{m} \int\limits_0^{a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k} \cdot \frac{\sin\lambda(a_2 - x_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2} f_k(t_k)dt_k + \\ + \int\limits_0^{x_2} f_2(t_2)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2 - x_2)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_2}\left(\Psi_2(t_2,\lambda)\right)dt_2 + \\ + \int\limits_{x_2}^{a_j} f_2(t_2)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_2}\left(\Psi_2(x_2,\lambda)\right)dt_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{m} \int\limits_0^{a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k} \cdot \frac{\sin\lambda(a_m - x_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m} f_k(t_k)dt_k + \\ + \int\limits_0^{x_m} f_m(t_m)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m - x_m)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_m}\left(\Psi_m(t_m,\lambda)\right)dt_1 + \\ + \int\limits_{x_m}^{a_j} f_m(t_m)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_m}\left(\Psi_m(x_m,\lambda)\right)dt_m \end{array} \right\}$$

Тогда для произвольных $f_1(x_1) \neq 0, \ldots, f_m(x_m) \neq 0$ решение задачи (1), (2), (3) может быть представлена в виде

$$\left[\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3\right] = \left[\vec{A}_1\right] + \left[\vec{A}_2\right] + \left[\vec{A}_3\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1} \\ \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2} \\ \vdots \\ \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1} & \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2} & \cdots & \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m} \end{bmatrix} - \\ -diag\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1} \ldots \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m - x_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\right] \end{array} \right\} \times \begin{bmatrix} f_1(t_1)dt_1 \\ f_2(t_2)dt_2 \\ \vdots \\ f_m(t_m)dt_m \end{bmatrix} +$$

$$+diag\begin{bmatrix}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_1}\Psi_1(x_1,\lambda) & \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-x_2)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_2}\Psi_2(x_2,\lambda) & \dots & \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_m}\Psi_m(x_m,\lambda)\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}f_1(t_1)dt_1\\ f_2(t_2)dt_2\\ \vdots\\ f_m(t_m)dt_m\end{bmatrix}+$$

$$+diag\begin{bmatrix}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_1}\Psi_1(x_1,\lambda) & \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_2}\Psi_2(x_2,\lambda) & \dots & \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_m}\Psi_m(x_m,\lambda)\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}f_1(t_1)dt_1\\ f_2(t_2)dt_2\\ \vdots\\ f_m(t_m)dt_m\end{bmatrix}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1 Функция Грина задачи Дирихле (1), (2), (3) имеет представление если $0 \le t_1 \le x_1, \dots, 0 \le t_m \le x_m$.

$$G(x_1,...,x_m;t_1,...,t_m;\lambda) = diag\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_1}\Psi_1(t_1,\lambda)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-x_2)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_2}\Psi_2(t_2,\lambda)\dots\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_m}\Psi_m(t_m,\lambda)\right]+$$

$$+\left\{\begin{matrix} \left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}\dots\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\right]\\ -diag\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\dots\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\right]\end{matrix}\right\}\times\begin{bmatrix}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\\ \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}\\ \vdots\\ \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\end{bmatrix}.$$

Следствие 2 Функция Грина задачи Дирихле (1), (2), (3) имеет представление если $x_1 < t_1 < a_1, \dots, x_m < t_m < a_m$

$$G(x_1,...,x_m;t_1,...,t_m;\lambda) = diag\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_1}\Psi_1(x_1,\lambda)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_2}\Psi_2(x_2,\lambda)\dots\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a_m}\Psi_m(x_m,\lambda)\right]+$$

$$+\left\{\begin{matrix} \left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}\dots\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\right]-\\ -diag\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\dots\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\right]\end{matrix}\right\}\times\begin{bmatrix}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\\ \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}\\ \vdots\\ \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\end{bmatrix}.$$

Где $0 \le t_1 \le x_1, \dots, 0 \le t_m \le x_m$, $G(x_1,\dots,x_m;t_1,\dots,t_m;\lambda) = A_1 + A_2$
$x_1 < t_1 < a_1, \dots, x_m < t_m < a_m$, $G(x_1,\dots,x_m;t_1,\dots,t_m;\lambda) = A_1 + A_3$

6 Результаты и обсуждение

В данной работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. В данной статье показано решение задачи Дирихле для дифференциального операторана звездообразном графе. Значительную трудность представляет решение дифференциального уравнения на геометрических графах при значениях независимых переменных близких к вершинам графа. Нами использованы стандартные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Доказывается самосопряженность дифференциального оператора, порожденного краевой задачей для уравнения Штурма-Лиувилля на графе-звезде. А также проводится спектральный анализ дифференциального оператора на графе. Установлено существование разложения всякой функций из области определения рассматриваемого дифференциального оператора на графе в ряд Фурье по собственным функциям данной краевой задачи.

7 Заключение

На плоском графе, состоящем из нескольких дуг с одним общим концом строится функция Грина краевой задачи для уравнения Штурма-Луивилля. Задача является моделью колебании простой системы из нескольких стержней с примыкающим концом. В работе выведена формула функции задачи Дирихле для уравнения второго порядка на ориентированным графе. Доказывается существование разложения произвольной функции, заданного на графе, по собственным функциям. Вопросы из спектральной теории, как простроение функции Грина и разложение.

8 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК (проект на тему «Конечномерные возмущения фредгольмовых операторов и их спектральный анализ», 2019-2021 гг.).

Список литературы

[1] Павлов Б.С., М.Д. Фадеев Модель свободных электронов и задача рассеяния //Теор. и мат. физика. 1983. - Т. 55, № 2. - С.257-269.

[2] Покорный Ю.В. О спектре некоторых задач на графах// Успехи мат. наук. 1987. - Т. 42, №4. - С.128-129.

[3] Пенкин О.М. О краевой задаче на графе // Дифференциальные уравнения. 1988. - Т.24, №4. - С.701-703.

[4] Von Below J. Classical solvability of linear parabolic equations on networks // Differential Equation. 1988. - V. 72, № 2. - P.316-337.

[5] Von Below J. Sturm-Liouville eigenvalue problems on networks // Math. Metli. Appl. Sc. 1988. - V. 10, № 2. - P.383-395.

[6] Lumer G. Connecting of local operators and evolution equations on network //Lect. Notes Math. 1980. - V. 787. - P.219-234.

[7] Nicaise S. Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impuls transmission // Lect.Notes Math. №1771. - Berlin, 1985. - P.532-541.

[8] Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах - М. : Физматлит, 2004. - 272 с.

[9] Кангужин Б.Е. Функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на графе-звезде // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. 2018. - № 1(97) - P.67-90.

[10] Bondarenko N.P. Partial inverse problems for the Sturm-Liouville operator on star-shaped graph with mixed boundary conditions // J. Inverse Ill - Posed Probl. 2018. - № 26(1)- P.1-12.

[11] Афанасьева Н.А., Булот Л.П. Электротехника и электроника. Учебное пособие. - СПб.: СПбГУН и П.Т., 2010. - С.181.

[12] Завгородный М.Г. Сопряженные и самосопряженные краевые задачи на геометрическом графе// Дифференциальные уравнения. 2014. - Т. 50, №4. - С.446-456.

[13] Kurasov P., Stenberg F. On the inverse scattering problem on branching graphs // J. Phys. A. Math. Gen. 2002. - V.20. - P.647-672.

[14] Покорный Ю.В., Приядиев В.Л., Аль-Обейд А. Об осциляционных свойствах спектра краевой задачи на графе // Матем. заметки. 1996. - Т.60, №3. - С.468-469.

[15] Покорный Ю.В., Приядиев В.Л. Некоторые проблемы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственных сетях // Успехи мат. науки. 2004. - Т.59. №6. - С.115-150.

[16] M. Znojil Quantum star-graph analogues of PT-symmetric square wells // Can. J. Phys. V.90, iss 12. 2012. - P.1287-1293 .

[17] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы - М.: Наука. - 1969. - 526 с.

[18] F.Harary, Graph theory, Addison-Wesley Publishing Company. 1969. - 274 p.

[19] P. Kurasov, M. Garjiani, Quantum graphs: PT-symmetry and reflection symmetry of the spectrum. // Journal of Mathematical Physics. - V.58. - 2017.

[20] M. Astudillo, P. Kurasov, M. Usman, RT -symmetric laplace operators on star graphs: Real spectrum and selfadjointness. // Adv. Math. Phys. - 2015.

References

[1] Pavlov B.S., Phadeev M.D. Model svobodnyh electronov i zadacha rasseiyaniya [Model of free electrons and scattering problem], Teor.i.matphizika. 1983. - V. 55, P. 257-269.

[2] Pokornyi U.V. O spectre nekotoryh zadach na graphah [About the spectrum of some problems on the graph], Uspehi mat.nauk. 1987. - V. 42, P. 128-129.

[3] Penkin O.M. O krayevoi zadache na graphe [About boundary value problems on a graph], Differenciyalnye uravneniya 1988. - V. 24, - P. 701-703.

[4] Von Below J. Classical solvability of linear parabolic equations on networks, Differential Equation. 1988. - V.72, P. 316-337.

[5] Von Below J. Sturm-Liouville eigenvalue problems on networks, Math. Metli. Appl. Sc. 1988. - V.10, P.383-395.

[6] Lumer G. Connecting of local operators and evolution equations on network, Lect. Notes Math. 1980.- V.787 - P. 219-234.

[7] Nicaise S. Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impuls transmission, Lect.Notes Math. 1985. - no 1771- P. 532-541.

[8] Pokornyi U.B. Differenciyalnye uravneniya na geometricheskih graphah [Differenciail equations on geometric graphs]. M.: Phizmatlit. 2004. - P. 272-274.

[9] Kanguzhin B.E. Funkciya Grina zadachi Dirihle dlya differencialnogo operatora na grafe-zvezde[Green's function of Dirichlet problem for differential operators on a star-shaped graphs], Vestnik KazNU 2018. - P. 67-90.

[10] Bondarenko N.P. Partial inverse problems for the Sturm-Liouville operator on star-shaped graph with mixed boundary conditions, J. Inverse Ill - Posed Probl. 2018.- P.1-12.

[11] Afanasev N.A., Bulot L.P. Electrotehnika i electronika[Electrotechnik and electronik], SPbGUN and P.T. 2010. P.181-183.

[12] Zavgorodnii M.G. Sopryazhennye i samosopryajennye krayvye zadachi na geometricheskom graphe [Conjugate and self-adjoint boundary value problems on a geometric graph], Differencial equations. 2014. - V. 50, no 4- P. 446-456.

[13] Kurasov P., Stenberg F. On the inverse scattering problem on branching graphs, J. Phys. A. Math. Gen, 2002. - V. 20. - P. 647-672.

[14] Pokornyi U.V., Priadiev V.L., Al-Obeid A. Ob oscilyacionnyh svoistvah spectra kraevoi zadachi na graphe, Matem.zametki, 1996 - V.60. - P. 468-469.

[15] Pokornyi U.V., Priadiev V.L. Nekotorye problemy kachestvennoi teorii Shturma-Liuvillya na prostranstvennyh setyah [Some problems of the qualitative theory of Sturm-Liouville on spatial networks], Uspehi mat. nauk.2004. - V. 59, - P. 115-150.

[16] Znojil M. Quantum star-graph analogues of PT-symmetric square wells // Can. J. Phys. 2012 - V.90, iss 12. - P.1287-1293 .

[17] Naimark M.A. Lineinye differenciyalnye operatory [Linear differential operators] - M.: Nauka. 1969. - P.526.

[18] F.Harary, Graph theory, Addison-Wesley Publishing Company. 1969. - 274 p.

[19] P. Kurasov, M. Garjiani, Quantum graphs: PT-symmetry and reflection symmetry of the spectrum.// Journal of Mathematical Physics. 2017. - V.58.

[20] M. Astudillo, P. Kurasov, M. Usman, RT -symmetric laplace operators on star graphs: Real spectrum and selfadjointness. // Adv. Math. Phys. 2015.