3-бөлім Раздел 3 Section 3

Қолданылмалы математика Прикладная математика Applied Mathematics

МРНТИ 27.41.19, 27.35.25

Метод численного анализа фильтрационных течений под каскадом гидросооружений

Подгорный А.Р., Харьковский национальный университет радиоэлектроники,
г. Харьков, Украина, E-mail: alex.aminuts@gmail.com
Сидоров М.В., Харьковский национальный университет радиоэлектроники
г. Харьков, Украина, E-mail: maxim.sidorov@nure.ua

Фильтрационные течения широко распространены в природе и к необходимости их рассмотрения часто приходят в ходе хозяйственной деятельности. В работе рассматривается задача теории стационарной фильтрации в грунте под каскадом гидросооружений в предположении, что выполняется закон Дарси. Математической моделью этой задачи является эллиптические уравнения для функции тока с краевыми условиями второго рода на участках границы водоема и краевыми условиями первого рода на участках границы, являющимися непроницаемыми для жидкости. При этом в постановку задачи входят неизвестные значения полных расходов жидкости под каждым из гидросооружений каскада, для нахождения которых формулируются дополнительные интегральные соотношения. Для численного анализа задачи предлагается использовать структурно-вариационный метод (метод R-функций), что позволит наиболее полно учесть в вычислительном алгоритме всю геометрическую и аналитическую информацию, которая входит в постановку задачи. В соответствии с принципом суперпозиции от исходной задачи осуществлен переход к набору краевых задач с известными краевыми условиями. Для каждой из этих задач согласно методу R-функций построены структуры решения, точно учитывающие все краевые условия, и обосновано использование вариационного метода Ритца для аппроксимации неопределенной компоненты. После этого из дополнительных интегральных соотношений находятся приближенные значения неизвестных расходов жидкости, а значит, и приближенное решение исходной задачи. Был проведен вычислительный эксперимент для случая постоянного коэффициента фильтрации в области, которая имеет вид нижней половины кольца с двумя полукруглыми заглублениями, расположенными симметрично. Предлагаемый метод численного анализа показал свою эффективность при решении тестовой задачи и может быть использован для решения прикладных задач. Преимуществами разработанного численного метода является возможность получения решения краевой задачи в виде единого аналитического выражения и точное удовлетворение всем краевым условиям.
Ключевые слова: фильтрационное течение, функция тока, принцип суперпозиции, метод R-функций, метод Ритца.

Method of numerical analysis of fluid flows in porous media under a cascade of hydraulic structures

Podhornyj A.R., Kharkiv National University of Radio Electronics,
Kharkiv, Ukraine, E-mail: alex.aminuts@gmail.com
Sidorov M.V., Kharkiv National University of Radio Electronics,
Kharkiv, Ukraine, E-mail: maxim.sidorov@nure.ua

Fluid flows in porous media are widespread in nature and they often come to the need for consideration in the course of economic activity. The paper deals with the problem of the theory of stationary fluid flows in porous media in the ground under the construction of hydraulic structures under the assumption that Darcy's law is fulfilled. The mathematical model of this problem is the elliptic equations for the stream function with boundary conditions of the second kind on sections of the boundary of the reservoir and boundary conditions of the first kind on sections of the boundary that are impermeable to liquid. At the same time, the formulation of the problem includes the unknown values of the total fluid flow rates under each of the hydraulic structures of the cascade, for the determination of which additional integral relations are formulated. For the numerical analysis of the problem, it is proposed to use the structural-variational method (the R-functions method), which will make it possible to fully take into account in the computational algorithm all the geometric and analytical information that is included in the formulation of the problem. In accordance with the principle of superposition from the original problem, a transition was made to a set of boundary-value problems with known boundary conditions. For each of these problems, according to the method of R-functions, the structures of the solution are constructed that accurately take into account all the boundary conditions, and the use of the Ritz variational method for approximation of the uncertain component is justified. After that, of the additional integral relations, the approximate values of the unknown flow rates of the fluid, and hence the approximate solution of the original problem, are found. A computational experiment was carried out for the case of a constant filtration coefficient in an area that has the form of the lower half of a ring with two semicircular burials located symmetrically. The proposed method of numerical analysis has shown its effectiveness in solving a test problem and can be used to solve applied problems. The advantages of the developed numerical method are the possibility of obtaining the solution of the boundary value problem in the form of a single analytical expression and the exact satisfaction of all the boundary conditions.
Key words: fluid flow in porous media, stream function, superposition principle, R-function method, Ritz method.

1 Введение

С самого начала хозяйственной деятельности человека одним из важнейших естественных природных ресурсов являются водные ресурсы. Их эффективное использование, в частности, для нужд энергетики, дало мощный толчок развитию цивилизации. Как следствие этого возникает необходимость для исследования соответствующих физических процессов совершенствовать численный аппарат математического моделирования. Важное место среди гидродинамических процессов занимают процессы просачивания жидкости (нефти, газа) в пористой среде - так называемые фильтрационные течения. К рассмотрению таких течений приводят процессы осушения и орошения, обтекания гидротехнических сооружений, просачивание воды сквозь земляные дамбы и др. [1]. Таким образом, разработка новых и усовершенствование существующих методов численного анализа фильтрационных течений является актуальной научной задачей.

Целью настоящей работы является разработка метода численного анализа плоских стационарных фильтрационных течений, математической моделью которого служит краевая задача для функции тока. Данная работа продолжает исследования, начатые в [2], и распространяет полученные там результаты на случай обтекания системы гидросооружений.

2 Обзор литературы

В качестве математических моделей течений жидкости в пористых средах обычно выступают краевые и начально-краевые задачи для уравнений в частных производных. Точные решения задач фильтрации можно получить лишь в некоторых простейших случаях [3, 4], поэтому более практичными и универсальными являются методы численные. Среди методов численного анализа фильтрационных течений можно выделить методы сеток, конечных элементов, мажорантных и фиктивных областей, стохастические методы [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки. Общим недостатком упомянутых методов является то, что при их использовании в геометрически сложных областях граница области аппроксимируется, например, вписанной ломаной, то есть происходит потеря точности в учете геометрической информации в численном алгоритме.

Наиболее точно и полно учесть геометрическую и аналитическую информацию, которая содержится в постановке задачи математической физики, позволяет структурный метод R-функций [20, 21], разрабатываемый школой академика Национальной академии наук Украины В.Л. Рвачёва. Для численного решения задач фильтрации метод R-функций был применен, например, в [22, 23, 24], но в этих работах были рассмотрены лишь задачи фильтрации под единичными гидротехническими сооружениями и при условии, что все величины, входящие в постановку задачи, в частности, полный расход жидкости, известны.

3 Материалы и методы

3.1 Постановка задачи

Рассматривается задача стационарной напорной фильтрации [1, 10, 11, 12] в области, показанной на рис. 1. Область фильтрации Ω ограничена непроницаемыми границами $\partial\Omega_0$ и $\partial\Omega_{2k}$, $k = 1, 2, ..., n$, которые являются линиями тока, а также проницаемыми границами (границами водоема) $\partial\Omega_{2k-1}$, $k = 1, 2, ..., n + 1$, которые являются потенциальными линиями.

Принимаем, что в заданной области действует закон Дарси, физический смысл которого означает, что потери напора при фильтрации пропорциональны скорости фильтрации. Вектор скорости фильтрации потока обозначим как $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Анализ плоских фильтрационных течений удобно проводить с помощью функции тока $\psi = \psi(x, y)$, вводимой соотношениями:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (1)$$

Тогда для функции тока получим следующую краевую задачу:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

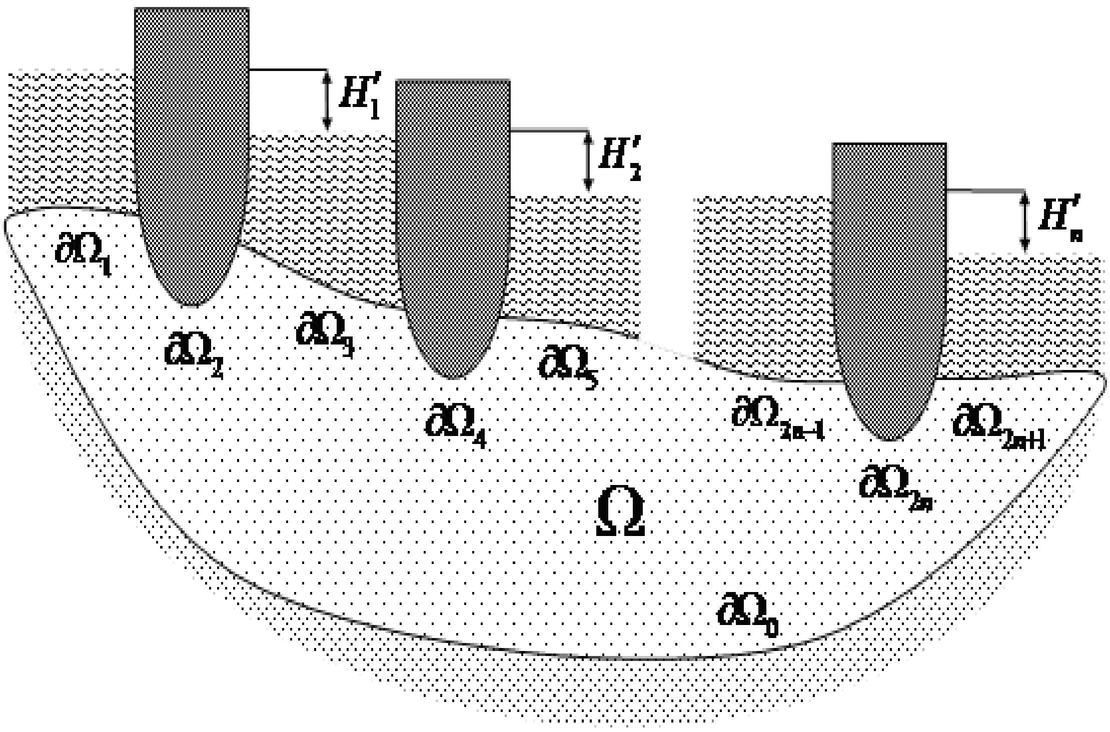

Рисунок 1: Область фильтрации Ω

$$\psi|_{\partial\Omega_0} = 0,\ \psi|_{\partial\Omega_{2k}} = Q_k,\ k = 1, 2, ..., n, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_{2k-1}} = 0,\ k = 1, 2, ..., n+1. \tag{4}$$

Здесь $\kappa = \kappa(x, y)$ - коэффициент фильтрации, $\mathbf{n}$ - внешняя нормаль к соответствующим участкам границы, Q_k - полный расход жидкости на участке границы $\partial\Omega_{2k}$, $k = 1, 2, ..., n$. Величины Q_k являются неизвестными и определяются следующими интегральными соотношениями:

$$\int\limits_{\partial\Omega_{2k}} \frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} ds = -H'_k,\ k = 1, 2, ..., n, \tag{5}$$

где H'_k - действующий напор на участке границы $\partial\Omega_{2k}$, $k = 1, 2, ..., n$.

Граница $\partial\Omega$ области фильтрации Ω представляет собой объединение линий $\partial\Omega_0$, $\partial\Omega_1$, ... , $\partial\Omega_{2k+1}$: $\partial\Omega = \bigcup\limits_{j=0}^{2n+1} \partial\Omega_j$.

Для анализа задачи (2) - (5) воспользуемся принципом суперпозиции [25] и структурным методом (методом R-функций), предложенным академиком Национальной академии наук Украины В.Л. Рвачевым.

3.2 Основные сведения из теории метода R-функций

Рассмотрим основные сведения из теории R-функций и общую схему применения методов этой теории в математическом моделировании физико-механических полей [20, 21].

Определение 1 *Функция* $y = f(x_1, ..., x_n)$, $f : \Re^n \to \Re$, *называется R-функцией (функцией В.Л. Рвачева), соответствующей разбиению множества* $\chi = (-\infty, +\infty) = \Re$ *на три градации*

$$S_3^{-1}(0) = \chi(0) = (-\infty, 0),\ S_3^{-1}(1) = \chi(1) = 0,\ S_3^{-1}(2) = \chi(2) = (0, +\infty),$$

если существует такая функция трехзначной логики $Y = F(X_1, ..., X_n)$, *что*

$$S_3[f(x_1, ..., x_n)] = F[S_3(x_1), ..., S_3(x_n)], \tag{6}$$

где $S_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t = 0, \\ 2, & t > 0. \end{cases}$

Функция трёхзначной логики F, удовлетворяющая условию (6), называется сопровождающей для R-функции f.

Таким образом, среди функций непрерывного аргумента выделен класс функций, имеющих свойства, схожие со свойствами функций дискретного аргумента - функций трёхзначной логики. Доказано [20, 21], что этот класс функций имеет непустое пересечение с множеством элементарных функций.

Наиболее употребляемой на практике является система R-функций вида

$$\bar{x} \equiv -x,\ x_1 \wedge_0 x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ x_1 \vee_0 x_2 \equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{7}$$

Для R-функций (7) сопровождающими являются функции трёхзначной логики отрицание, дизъюнкция и конъюнкция соответственно.

Схема применения аппарата теории R-функций при решении обратной задачи аналитической геометрии заключается в следующем. Пусть геометрический объект $\Omega \subset \Re^n$ построен из опорных множеств $\Sigma_i = (\sigma_i(\mathbf{x}) \geq 0)$, $i = 1, ..., m$, с помощью операций $-$, $\wedge$, $\vee$ алгебры логики над ними:

$$\Omega = F(\Sigma_1, ..., \Sigma_m). \tag{8}$$

Будем считать, что $\sigma_i(\mathbf{x})$, $i = 1, ..., m$, - простые непрерывные (элементарные) функции, то есть $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$ является границей множеств $\sigma_i(\mathbf{x}) \geq 0$ и $\sigma_i(\mathbf{x}) > 0$. Если в (8) произвести формальную замену Ω на $\omega(\mathbf{x})$, Σ_i на $\sigma_i(\mathbf{x})$, $i = 1, ..., m$, а символов $-$, $\wedge$, $\vee$ алгебры логики на символы соответствующих R-функций, то получим в виде единого аналитического выражения элементарную функцию $\omega(\mathbf{x})$, равную нулю на границе $\partial\Omega$. При этом для внутренних точек Ω выполняется неравенство $\omega(\mathbf{x}) > 0$.

Таким образом, уравнение $\omega(\mathbf{x}) = 0$ в неявной форме определяет геометрическое место точек, которое является границей геометрического объекта Ω.

Функцию $\omega(\mathbf{x})$ также можно подчинить дополнительным условиям, например, условию нормализованности

$$\omega(\mathbf{x}) = 0 \text{ на } \partial\Omega;\ \omega(\mathbf{x}) > 0 \text{ внутри } \Omega;\ \left.\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = -1, \tag{9}$$

где $\mathbf{n}$ - внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Для анализа краевых задач математической физики метод R-функций позволяет строить так называемые структуры решения краевых задач, то есть пучки функций, которые точно удовлетворяют всем краевым условиям задачи и зависят от некоторых неопределенных компонент.

Применение метода R-функций для численного анализа физико-механических полей состоит из следующих этапов:

1) точное аналитическое описание геометрии расчетной области, то есть построение функции $\omega(\mathbf{x})$ со свойствами (9);

2) продолжение краевых условий внутрь области, то есть доопределение во внутренних точках области функций и операторов, заданных на границе;

3) построение общей структуры решения, то есть такой формулы, зависящей от одной или нескольких неопределенных функций (компонент), которая при любом их выборе точно удовлетворяет всем краевым условиям задачи;

4) построение приближенного решения, то есть аппроксимация неопределенных компонент структуры некоторым численным методом.

Для продолжения краевых условий внутрь области используются следующие два основных подхода [20].

Пусть функция φ_0 в точках $\partial\Omega$ задана как составная в виде

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} \varphi_0^{(1)}(s), & s \in \partial\Omega_1, \\ \dots & \dots \\ \varphi_0^{(r)}(s), & s \in \partial\Omega_r, \end{cases}$$

где участки границы $\partial\Omega_1$,..., $\partial\Omega_r$ попарно различные, не имеют общих внутренних точек и $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \ldots \cup \partial\Omega_r$.

Пусть далее $\varphi_i(\mathbf{x})$, $i = 1,\ \ldots,\ r$, таковы, что $\varphi_i|_{\partial\Omega_i} = \varphi_0^{(i)}$, а $\omega_i(\mathbf{x})$, $i = 1,\ \ldots,\ r$, такие, что $\omega_i(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega_i$ и $\omega_i(\mathbf{x}) > 0$ в $\Omega \cup (\partial\Omega \backslash \partial\Omega_i)$. Тогда функция

$$\varphi = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} \varphi_i \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \omega_j}{\sum\limits_{i=1}^{r} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \omega_j}$$

имеет свойство $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0$.

Второй подход связан с продолжением дифференциальных операторов, заданных на $\partial\Omega$, внутрь области Ω. Пусть $\omega = 0$ - нормализованное уравнение границы $\partial\Omega$ области Ω. Тогда оператор D_1, действующий по правилу

$$D_1 u \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

в регулярных точках $\partial\Omega$ удовлетворяет равенству

$$-D_1 u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}},$$

где $\mathbf{n}$ - внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

При этом выражение $D_1 u$ имеет смысл всюду в $\Omega \cup \partial\Omega$.

Общий метод построения структурных формул рассмотрен в [21, 26]. Основные применения метода R-функций к расчету физико-механических полей различной природы содержатся, например, в [26, 27].

3.3 Метод численного анализа

Решение задачи (2) - (5) в соответствие с принципом суперпозиции будем искать в виде

$$\psi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} Q_i u_i(x, y), \tag{10}$$

где $u_i(x, y)$, $i = 1, 2, ..., n$, - решение задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u_i}{\partial y}\right) = 0 \text{ в } \Omega, \tag{11}$$

$$u_i|_{\partial\Omega_0} = 0,\ u_i|_{\partial\Omega_{2k}} = 0,\ k = 1, 2, ..., n,\ k \neq i,\ u_i|_{\partial\Omega_{2i}} = 1, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_{2k-1}} = 0,\ k = 1, 2, ..., n+1. \tag{13}$$

Пусть функции $\omega_j(x, y)$, $j = 0, 1, ..., 2n+1$, построенные с использованием конструктивного аппарата теории R-функций, таковы, что:

$$\omega_j(x, y) = 0 \text{ на } \partial\Omega_j;\ \omega_j(x, y) > 0 \text{ в } \Omega \cup (\partial\Omega \backslash \partial\Omega_j);$$

$$\left.\frac{\partial \omega_j}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial \Omega_j} = -1, \; j = 0, 1, ..., 2n+1.$$

Обозначим

$$\tau(x,y) = \omega_1(x,y) \wedge_0 \omega_1(x,y) \wedge_0 ... \wedge_0 \omega_{2n+1}(x,y),$$

$$\tau_i(x,y) = \omega_0(x,y) \wedge_0 \omega_2(x,y) \wedge_0 ... \wedge_0 \omega_{2j-2}(x,y) \wedge_0 \omega_{2j+2}(x,y) \wedge_0 ... \wedge_0 \omega_{2n}(x,y),$$

$i = 1, 2, ..., n.$

Тогда оператор $D_1^{(\tau)}$, определенный равенством

$$D_1^{(\tau)} u = \frac{\partial \tau}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y},$$

обладает свойством

$$\left. D_1^{(\tau)} u \right|_{\partial \Omega_{2k-1}} = -\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial \Omega_{2k-1}}, \; k = 1, 2, ..., n+1,$$

а функция $\tau_i(x,y)$, $i = 1, 2, ..., n$, такова, что

$$\tau_i(x,y) = 0 \text{ на } \partial\Omega \backslash \partial\Omega_i,$$

$$\tau_i(x,y) > 0 \text{ на } \partial\Omega_i.$$

Тогда из результатов работы [28] следует, что пучок функций

$$u_i = f_i - \frac{\tau_i \wedge_0 \omega_{2i}}{\tau_i + \omega_{2i}} D_1^{(\tau)} f_i + (\tau_i \wedge_0 \omega_{2i})\Phi_i - \frac{\tau_i \wedge_0 \omega_{2i}}{\tau_i + \omega_{2i}} D_1^{(\tau)}((\tau_i \wedge_0 \omega_{2i})\Phi_i), \tag{14}$$

где $\Phi_i = \Phi_i(x,y)$ - неопределенная компонента,

$$f_i(x,y) = \frac{\tau_i(x,y)}{\tau_i(x,y) + \omega_{2i}(x,y)},$$

является общей структурой решения краевой задачи (11) - (13), т.е. при любом выборе неопределенной компоненты Φ_i функция u_i вида (14) точно удовлетворяет краевым условиям (12), (13).

Для аппроксимации неопределенной компоненты Φ_i в каждой из задач (11) - (13), $i = 1, 2, ..., n$, воспользуемся вариационным методом Ритца [29, 30]. Для этого в задаче (11) - (13) сделаем замену

$$u_i = \varphi_i + v_i,$$

где $\varphi_i = f_i - \dfrac{\tau_i \wedge_0 \omega_{2i}}{\tau_i + \omega_{2i}} D_1^{(\tau)} f_i$, а v_i - новая неизвестная функция.

Тогда функция v_i будет решением краевой задачи с однородными краевыми условиями:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial v_i}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial v_i}{\partial y}\right) = F_i \text{ в } \Omega, \tag{15}$$

$$v_i|_{\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_2 \cup \ldots \cup \partial\Omega_{2n}} = 0, \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3 \cup \ldots \cup \partial\Omega_{2n+1}} = 0, \tag{17}$$

где $F_i = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y}\right)$.

С задачей (15) - (17) свяжем оператор A этой краевой задачи, действующий в пространстве $L_2(\Omega)$ по правилу

$$Av = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{18}$$

на области определения D_A, состоящей из тех функций пространства $L_2(\Omega)$, которые принадлежат множеству $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ и удовлетворяют краевым условиям (16), (17). Очевидно, D_A - линеал.

Лемма 1 *Оператор A вида (18) является линейным, симметричным, положительным и даже положительно определенным оператором.*

Доказательство Линейность оператора A тривиально следует из линейности операции дифференцирования и того, что D_A - линеал.

Для доказательства симметричности рассмотрим теперь скалярное произведение $(Av,\ w)$, где $v, w \in D_A$. Применяя первую формулу Грина [29], получим:

$$(Av, w) = \iint\limits_{\Omega} \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] w dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) dxdy - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{1}{\kappa}\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} w ds.$$

Интеграл по $\partial\Omega$ обнуляется в силу того, что $v, w \in D_A$, а значит,

$$(Av, w) = \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dxdy \tag{19}$$

и $(Av,\ w) - (v,\ Aw) = (Av,\ w) - (Aw,\ v) = 0$, то есть A - симметричный оператор.

Положительность оператора A следует из того, что для всех $v \in D_A$

$$(Av,\ v) = \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy \geq 0,$$

причем в силу условий (16), (17) равенство $(Av,\ v) = 0$ возможно лишь, если $v = 0$.

Докажем теперь положительную определенность оператора A вида (18). Как известно [30], для функций u из пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leq c \left\{ \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy + \int\limits_{\Gamma_1} u^2 ds \right\}, \tag{20}$$

где Ω - область с липшицевой границей $\partial\Omega$, Γ_1 - открытая часть границы $\partial\Omega$ области Ω положительной меры Лебега, $c > 0$ - постоянная, зависящая только от области Ω и от Γ_1.

Поскольку

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \iint\limits_{\Omega} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy,$$

то из неравенства (20) следует оценка

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \iint\limits_{\Omega} u^2 dxdy \leq c \left\{ \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy + \int\limits_{\Gamma_1} u^2 ds \right\}. \tag{21}$$

Пусть коэффициент фильтрации в области Ω удовлетворяет неравенству $0 < \kappa_1 \leq \kappa(x,y) \leq \kappa_2$. Тогда для всех $v \in D_A$

$$(Av,\ v) = \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy \geq \frac{1}{\kappa_2} \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy.$$

Выбирая далее в (21) $\Gamma_1 = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_2 \cup ... \cup \partial\Omega_{2n}$ и учитывая, что функции $v \in D_A$ удовлетворяют краевому условию (16), получаем неравенство

$$(Av,\ v) \geq (c\kappa_2)^{-1} \|u\|^2_{L_2(\Omega)},$$

означающее, что A - положительно определенный оператор.

Лемма доказана.

На основании равенства (19) введем на D_A энергетическое произведение $[v, w]$, положив

$$[v, w] = \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dxdy,\ v_1,\ v_2 \in D_A. \tag{22}$$

Пополняя D_A в смысле сходимости по энергетической норме

$$\|v\|_A = \sqrt{[v, v]} = \sqrt{\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy}, \tag{23}$$

порожденной скалярным произведением (22), получим энергетическое пространство H_A оператора A вида (18).

Тогда по теореме о функционале энергии [29] задача (15) - (17) при условии $F_i \in L_2(\Omega)$ имеет в H_A единственное (обобщенное) решение v_i^*, являющееся точкой минимума в H_A функционала энергии

$$J[v_i] = \|v_i\|^2_A - 2(F_i,\ v_i) = \int\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{\kappa} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial y} \right)^2 \right] - 2F_i v_i \right] dxdy.$$

Для минимизации функционала $J[v_i]$ воспользуемся методом Ритца, согласно которому приближенное решение задачи $J[v_i] \to \inf\limits_{H_A}$ ищем в виде

$$v_{i,N} = \sum_{k=1}^{N} c_k^{(i)} \varphi_k^{(i)},$$

где $\{\varphi_k^{(i)}\}$ - координатная последовательность.

Из вида структуры (14) следует, что координатную последовательность $\{\varphi_k^{(i)}\}$ можно составить из функций

$$\varphi_k^{(i)} = (\tau_i \wedge_0 \omega_{2i})\chi_k - \frac{\tau_i \wedge_0 \omega_{2i}}{\tau_i + \omega_{2i}} D_1^{(\tau)}((\tau_i \wedge_0 \omega_{2i})\chi_k),$$

где $\{\chi_k\}$ - любая полная в $L_2(\Omega)$ система функций.

Тогда для определения постоянных $c_k^{(i)}$, $k = 1, 2, ..., N$, будем иметь систему Ритца

$$\sum_{k=1}^{N}[\varphi_k^{(i)},\varphi_j^{(i)}]c_k^{(i)}=(F_i,\varphi_j^{(i)}),\ j=1,2,...,N,$$

где

$$[\varphi_k^{(i)},\varphi_j^{(i)}]=\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\kappa}\left[\frac{\partial\varphi_k^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_k^{(i)}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j^{(i)}}{\partial y}\right]dxdy,$$

$$(F_i,\varphi_j^{(i)})=\int\limits_{\Omega}F_i\cdot\varphi_j^{(i)}dxdy,\ k,\ j=1,2,...,n.$$

Из теорем сходимости метода Ритца [29] следует сходимость последовательности $\{v_{i,N}\}$ к v_i^* как в норме (23), так и в норме $L_2(\Omega)$.

Тогда функцию $u_i^*=\varphi_i+v_i^*$ можно рассматривать как обобщенное решение задачи (11) - (13), к которому в норме $L_2(\Omega)$ сходится последовательность $\{u_{i,N}\}$, где $u_{i,N}=\varphi_i+v_{i,N}$.

Если u_i^*, $i=1,2,...,n$, - решение задачи (11) - (13), то для определения величин Q_i, $i=1,2,...,n$, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}Q_i\int\limits_{\partial\Omega_{2k}}\frac{\partial u_i^*}{\partial\mathbf{n}}ds=-H_k',\ k=1,2,...,n,$$

которая в силу результатов [25] для видоизмененной задачи Дирихле имеет единственное решение.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1 *Пусть $F_i\in L_2(\Omega)$, $i=1,2,...,n$. Тогда последовательность*

$$\psi_N=\sum_{i=1}^{n}Q_i^{(N)}u_{i,N},$$

где $Q_i^{(N)}$, $i=1,2,...,n$, - решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}Q_i^{(N)}\int\limits_{\partial\Omega_{2k}}\frac{\partial u_{i,N}}{\partial\mathbf{n}}ds=-H_k',\ k=1,2,...,n,$$

сходится в $L_2(\Omega)$ к обобщенному решению задачи (2) - (5).

Заметим, что условия $F_i\in L_2(\Omega)$, $i=1,2,...,n$, являются условиями применимости к решению задачи метода R-функций.

Также отметим, что условие $\left.\dfrac{\partial v_i}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_3\cup...\cup\partial\Omega_{2n+1}}=0$ является естественным, поэтому при выборе координатной последовательности $\{\varphi_k\}$ ему можно не удовлетворять.

4 Результаты и обсуждение

Вычислительный эксперимент в задаче (2) - (5) при $\kappa = 1$ было проведено в области Ω, граница $\partial\Omega$ которой состоит из внешней полуокружности радиуса R, двух внутренних полуокружностей радиусов r_1 и r_2, $r_1 < R$, $r_2 < R$, трех отрезков горизонтальной прямой $y = 0$. Для области Ω функции $\omega_i(x, y)$, $i = 0, 1, ..., 5$, были выбраны следующим образом:

$$\omega_0(x, y) = \frac{1}{2R}(R^2 - x^2 - y^2),\ \omega_1(x, y) = \omega_3(x, y) = \omega_5(x, y) = -y,$$

$$\omega_2(x, y) = \frac{1}{2r_1}(r_1^2 - (x + x_0)^2 - y^2),\ \omega_4(x, y) = \frac{1}{2r_2}(r_2^2 - (x - x_0)^2 - y^2).$$

Область Ω при $R = 4$, $r_1 = r_2 = 1$, $x_0 = 2$ показана на рис. 2.

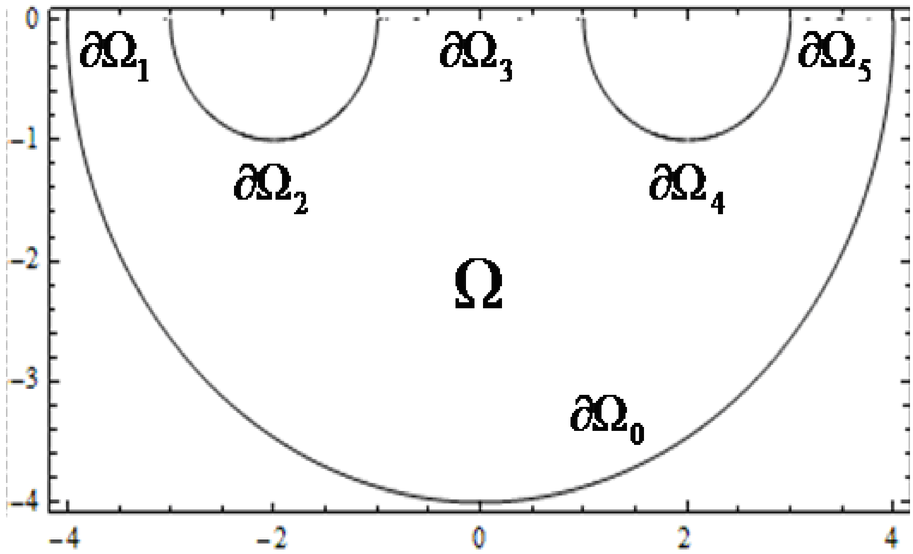

Рисунок 2: Область Ω для вычислительного эксперимента

В качестве функций $\{\chi_{ij}\}$ были выбраны произведения смещенных полиномов Лежандра:

$$\chi_{ij}(x, y) = P_i\left(\frac{x}{R}\right) P_j\left(\frac{2y}{R} + 1\right),\ i + j = 0, 1, 2, ...$$

В таблице 1 приведены значения полных расходов жидкости $Q_1^{(N)}$ и $Q_2^{(N)}$ ($H_1' = 1$, $H_2' = 1,1$) в зависимости от количества координатных функций N.

Как видно, значения $Q_1^{(N)}$ и $Q_2^{(N)}$ с ростом N стабилизируются. На рис. 3 приведены линии уровня приближенного решения $\psi_{28}(x, y)$, а на рис. 4 приведено векторное поле скоростей потока, восстановленное по формулам (1).

Таблица 1: Значения $Q_1^{(N)}$ и $Q_2^{(N)}$

N	6	10	15	21	28
$Q_1^{(N)}$	0,0933	0,0525	0,1086	0,1224	0,1351
$Q_2^{(N)}$	0,2314	0,1317	0,1293	0,1490	0,1676

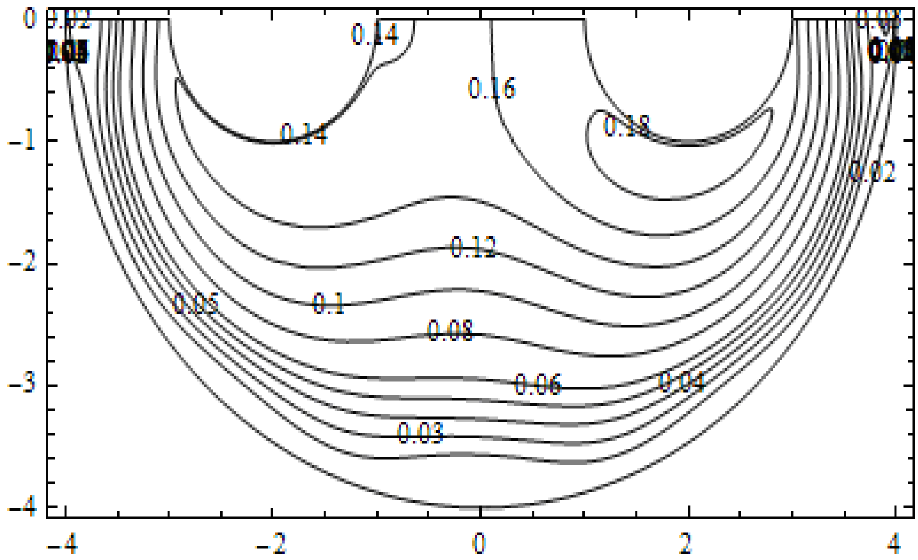

Рисунок 3: Линии уровня приближенного решения $\psi_{28}(x, y)$

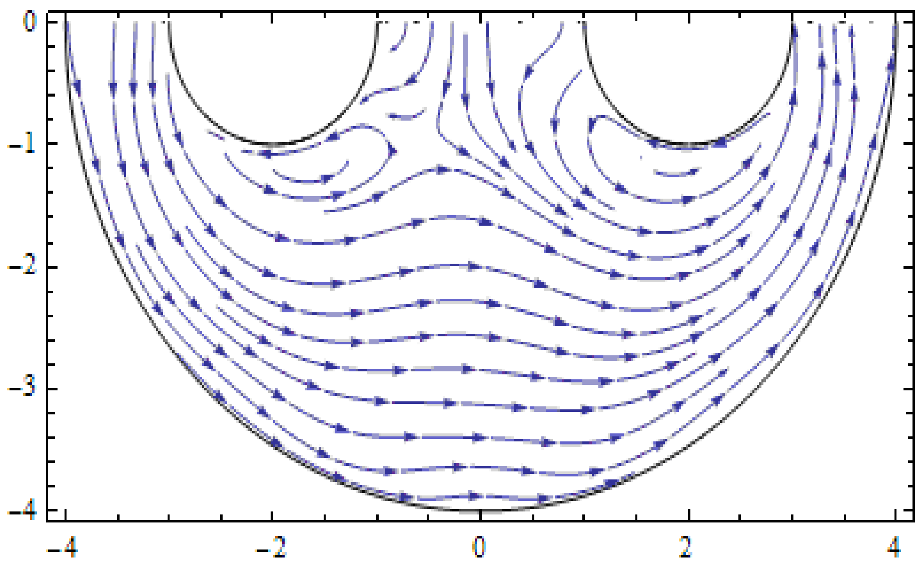

Рисунок 4: Векторное поле скоростей, восстановленное по $\psi_{28}(x, y)$

5 Заключение

Для численного анализа задачи фильтрации жидкости под каскадом гидросооружений в работе впервые предложено использовать метод R-функций в комбинации с методом Ритца. Особенностью постановки задачи при этом является то, что полные расходы жидкости под каждым из гидросооружений, входящих в каскад, заранее неизвестны и определяются из дополнительных интегральных соотношений. Вычислительный эксперимент, проведенный для тестовой задачи, продемонстрировал возможности и эффективность предлагаемого метода. Разработанный метод может найти применение при решении прикладных задач, связанных с расчетом фильтрационных течений. Этим определяется научная новизна и практическая значимость полученных в работе результатов.

Список литературы

[1] Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. - М.: Наука, 1977. - 664 с.

[2] Подгорний О.Р. Чисельний аналіз методом R-функцій фільтраційних течій у неоднорідному ґрунті. // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. - 2018. - Вип. 18. - С. 147-162.

[3] Khan W. et al. Exact Solutions of Navier Stokes Equations in Porous Media // International Journal of Pure and Applied Mathematics. - 2014. - Vol. 96. - № 2. - P. 235-247.

[4] Daly E., Basser H., Rudman M. Exact solutions of the Navier-Stokes equations generalized for flow in porous media // The European Physical Journal Plus. - 2018. - Vol. 133. - № 5. - С. 173.

[5] Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. - К.: Наук. думка, 2007. - 292 с.

[6] Brebbia C.A., Connor J.J. Finite element techniques for fluid flow. - Newness-Butterworths, London, 1976. - 310 p.

[7] Ferziger J.H., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. - Berlin: Springer, 2002. - 423 p.

[8] Chung T.J. Computational Fluid Dynamics. - United Kingdom: CUP, 2002. - 1022 p.

[9] Wessiling P. Principles of computational Fluid Dynamics. - Berlin: Springer, 2001. - 644 p.

[10] Ляшко И.И., Великоиваненко И.М., Лаврик В.И., Мистецький Г.Е. Метод мажорантных областей в теории фильтрации. - К.: Наук. думка, 1974. - 202 с.

[11] Ляшко Н.И., Великоиваненко Н.М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. - К.: Наук. думка, 1973. - 264 с.

[12] Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в математической физике. - М.: Изд-во МГУ, 1991. - 156 с.

[13] Zhang D. Stochastic methods for flow in porous media: coping with uncertainties. - San Diego: Academic Press, 2001. - 368 p.

[14] Jenny P., Lee S.H., Tchelepi H.A. Adaptive multiscale finite-volume method for multiphase flow and transport in porous media // Multiscale Modeling & Simulation. - 2005. - Vol. 3. - № 1. - P. 50-64.

[15] Wang J.G., Leung C.F., Chow Y.K. Numerical solutions for flow in porous media // International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics. - 2003. - Vol. 27. - № 7. - P. 565-583.

[16] Bastian P. Higher order discontinuous Galerkin methods for flow and transport in porous media // Challenges in Scientific Computing-CISC 2002. - Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. - P. 1-22.

[17] Lee H.K.H. et al. Markov random field models for high-dimensional parameters in simulations of fluid flow in porous media // Technometrics. - 2002. - Vol. 44. - № 3. - P. 230-241.

[18] Gray W. G., Miller C. T. Examination of Darcy's law for flow in porous media with variable porosity // Environmental science & technology. - 2004. - Vol. 38. - № 22. - P. 5895-5901.

[19] Hoteit H. et al. Numerical reliability for mixed methods applied to flow problems in porous media // Computational geosciences. - 2002. - Vol. 6. - № 2. - P. 161-194.

[20] Rvachev V.L., Sheiko T.I. R-functions in boundary value problems in mechanics // Appl. Mech. Rev. - 1995. - Vol. 48, №. 4. - P. 151-188.

[21] Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. - М.: Физматлит, 2006. - 416 с.

[22] Сидоров М.В., Стороженко А.В. Математическое и компьютерное моделирование некоторых фильтрационных течений // Радиоэлектроника и информатика. - 2004. - № 4. - С. 58-61.

[23] Блишун А.П., Сидоров М.В., Яловега И.Г. Математическое моделирование и численный анализ фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями с помощью метода R-функций // Радиоэлектроника и информатика. -2010. - № 2. - С. 40-46.

[24] Блишун А.П., Сидоров М.В., Яловега И.Г. Применение метода R-функций к численному анализу фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями // Вiсник Запорiзького нацiонального унiверситету. Серiя: фiзико-математичнi науки. - 2012. - № 1. - С. 50-56.

[25] Алексидзе М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. - М.: Наука, 1991. - 352 с.

[26] Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. - К.: Наук. думка, 1982. - 552 с.

[27] Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. - Харкiв, IПМаш НАН України, 2009. - 306 с.

[28] Подгорний О.Р. Математичнi моделi фiльтрацiйних течiй та застосування методу R-функцiй для їх чисельного аналiзу // Радiоелектронiка та iнформатика. - 2018. - №1. - С. 40-47.

[29] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. - М.: Наука, 1970. - 511 с.

[30] Rektorys K. Variational methods in mathematics, science and engineering. - Springer Science & Business Media, 2012. - 571 p.

References

[1] Polubarinova-Kochina P.Ya., Teoriya dvizheniya gruntovyh vod [Theory of groundwater movement] , (M.: Nauka, 1977): 664.

[2] Podgornij O.R., "Chisel'nij analiz metodom R-funkcij fil'tracijnih techij u neodnoridnomu grunti [Numerical analysis by the R-functions method of flow in porous inhomogeneous soils]" , *Matematichne ta komp'yuterne modelyuvannya. (ser. fiz.-mat. nauki)* vol. 18 (2018) : 147-162.

[3] Khan W. et al., "Exact Solutions of Navier Stokes Equations in Porous Media" , *International Journal of Pure and Applied Mathematics* vol. 96, no 2 (2014) : 235-247.

[4] Daly E., Basser H., Rudman M., "Exact solutions of the Navier-Stokes equations generalized for flow in porous media" , *The European Physical Journal Plus* vol. 133, no 5 (2018) : 173.

[5] Bomba A.Ja., Bulavac'kij V.M., Skopec'kij V.V., Nelinijni matematichni modeli procesiv geogidrodinamiki [Nonlinear mathematical models of processes of geohydrodynamics] , (K.: Nauk. dumka, 2007) : 292.

[6] Brebbia C.A., Connor J.J., Finite element techniques for fluid flow , (Newness-Butterworths, London, 1976) : 310.

[7] Ferziger J.H., Peric M., Computational Methods for Fluid Dynamics , (Berlin: Springer, 2002) : 423.

[8] Chung T.J., Computational Fluid Dynamics , (United Kingdom: CUP, 2002) : 1022.

[9] Wessiling P., Principles of computational Fluid Dynamics , (Berlin: Springer, 2001) : 644.

[10] Ljashko I.I., Velikoivanenko I.M., Lavrik V.I., Mistec'kij G.E., Metod mazhorantnyh oblastej v teorii fil'tracii [The method of majorant domains in filtration theory], (K.: Nauk. dumka, 1974) : 202.

[11] Ljashko N.I., Velikoivanenko N.M., Chislenno-analiticheskoe reshenie kraevyh zadach teorii fil'tracii [Numerical-analytical solution of boundary value problems of filtration theory], (K.: Nauk. dumka, 1973) : 264.

[12] Vabishhevich P.N., Metod fiktivnyh oblastej v matematicheskoj fizike [The method of fictitious areas in mathematical physics], (M.: Izd-vo MGU, 1991) : 156.

[13] Zhang D., Stochastic methods for flow in porous media: coping with uncertainties, (San Diego: Academic Press, 2001) : 368.

[14] Jenny P., Lee S.H., Tchelepi H.A., "Adaptive multiscale finite-volume method for multiphase flow and transport in porous media", *Multiscale Modeling & Simulation* vol. 3, no 1 (2005) : 50-64.

[15] Wang J.G., Leung C.F., Chow Y.K., "Numerical solutions for flow in porous media", *International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics* vol. 27, no 7 (2003) : 565-583.

[16] Bastian P., "Higher order discontinuous Galerkin methods for flow and transport in porous media", *Challenges in Scientific Computing-CISC 2002* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2003) : 1-22.

[17] Lee H.K.H. et al., "Markov random field models for high-dimensional parameters in simulations of fluid flow in porous media", *Technometrics* vol. 44, no 3 (2002). : 230-241.

[18] Gray W. G., Miller C. T., "Examination of Darcy's law for flow in porous media with variable porosity", *Environmental science & technology* vol. 38, no 22 (2004) : 5895-5901.

[19] Hoteit H. et al., "Numerical reliability for mixed methods applied to flow problems in porous media", *Computational geosciences* vol. 6, no 2 (2002) : 161-194.

[20] Rvachev V.L., Sheiko T.I., "R-functions in boundary value problems in mechanics", *Appl. Mech. Rev.* vol. 48, no 4 (1995) : 151-188.

[21] Kravchenko V.F., Rvachev V.L., Algebra logiki, atomarnye funkcii i vejvlety v fizicheskih prilozhenijah [Logic algebra, atomic functions and wavelets in physical applications], (M.: Fizmatlit, 2006) : 416.

[22] Sidorov M.V., Storozhenko A.V., "Matematicheskoe komp'juternoe modelirovanie nekotoryh fil'tracionnyh techenij [Mathematical and computer modeling of some fluid flows in porous media]", *Radiojelektronika i informatika* no 4 (2004) : 58-61.

[23] Blishun A.P., Sidorov M.V., Jalovega I.G., "Matematicheskoe modelirovanie i chislennyj analiz fil'tracionnyh techenij pod gidro-tehnicheskimi sooruzhenijami s pomoshh'ju [Mathematical modeling and numerical analysis of fluid flows in porous media under hydraulic structures using the R-function method]", *Radiojelektronika i informatika* no 2 (2010) : 40-46.

[24] Blishun A.P., Sidorov M.V., Jalovega I.G., "Primenenie metoda R-funkcij k chislennomu analizu fil'tracionnyh techenij pod gidrotehnicheskimi sooruzhenijami [Application of the method of R-functions to the numerical analysis of fluid flows in porous media under hydraulic structures]", *Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu (ser. fiz.-mat. nauki)* no 1 (2012) : 50-56.

[25] Aleksidze M.A., Fundamental'nye funkcii v priblizhennyh resheniyah granichnyh zadach [Fundamental functions in approximate solutions of boundary value problems], (M.: Nauka, 1991) : 352.

[26] Rvachev V.L., Teorija R-funkcij i nekotorye ejo prilozhenija [The R-functions theory and some of its applications], (K.: Nauk. dumka, 1982) : 552.

[27] Maksimenko-Shejko K.V., R-funkcii v matematicheskom modelirovanii geometricheskih ob"ektov i fizicheskih polej [R-functions in mathematical modeling of geometric objects and physical fields], (Harkiv, IPMash NAN Ukrayiny, 2009) : 306.

[28] Podgornij O.R., "Matematichni modeli fil'tratsijnikh techij ta zastosuvannya metodu R-funktsij dlya ikh chisel'nogo analizu [Mathematical modeling of flow in porous media and application of R-function's method for their numerical analysis", *Radioelektronika ta informatika* no 1 (2018) : 40-47.

[29] Mikhlin S.G., Variatsionnye metody v matematicheskoj fizike [Variational methods in mathematical physics], (M.: Nauka, 1970) : 511.

[30] Rektorys K., Variational methods in mathematics, science and engineering , (Springer Science & Business Media, 2012) : 571.