МРНТИ 27.29.17, 27.29.23

Абсолютная устойчивость многомерных регулируемых систем. Проблема Айзермана

Айсагалиев С.А., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Аязбаева А.М., Научно-исследовательский институт математики и механики КазНУ имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан,
E-mail: asem.ayazbayeva@kaznu.kz

Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику многомерных регулируемых систем с единственным положением равновесия с нелинейностями из заданного множества. Такая неопределенность нелинейной функции порождает неединственность решения, что приводит к исследованию свойств решений уравнений с дифференциальными включениями. Предлагается новый метод исследования абсолютной устойчивости положения равновесия регулируемых систем со многими непрерывными нелинейностями при неполной информации о них. Путем неособого преобразования исходная система приводится к специальному виду, который позволяет использовать сведения о свойствах нелинейностей. Исследованы свойства решений, получены оценки на решения исходной системы и преобразованной системы, доказана их ограниченность. Получены тождества относительно компонентов нелинейной функции и установлена их связь с фазовыми переменными. Получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы и они использованы для получения условий абсолютной устойчивости.
Выделен класс многомерных нелинейных регулируемых систем, для которого проблема Айзермана имеет решение. Для данного класса регулируемых систем получены необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости.
Ключевые слова: Неособое преобразование, несобственные интегралы, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана, свойства решений.

Көпөлшемді реттелетін жүйелердің абсолюттік орнықтылығы. Айзерман есебі

Айсағалиев С.Ә., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Аязбаева А.М., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Математика және механика ғызыми-зерттеу институты, Алматы қ., Қазақстан Республикасы,
E-mail: asem.ayazbayeva@kaznu.kz

Берілген жиыннан сызықты емес біртекті тепе-теңдікке ие көп өлшемді реттелетін жүйелер динамикасын сипаттайтын жай дифференциалдық теңдеулер классы қарастырылады. Сызықты емес функцияның мұндай белгісіздігі шешімнің жалғыз болмауын тудырады, ал бұл дифференциалды қосылыстары бар теңдеулер шешімдерінің қасиеттерін зерттеуге әкеледі. Көптеген үздіксіз сызықтық емес функциялары бар және олар туралы ақпараттың толық болмау жағдайында реттелінетін жүйелердің тепе-теңдік күйінің абсолюттік орнықтылығын зерттеудің жаңа әдісі ұсынылады. Бірегей емес түрлендіру арқылы бастапқы жүйе сызықтық емес қасиеттері туралы ақпаратты пайдалануға мүмкіндік беретін арнайы түрге көшіріледі. Шешімдердің қасиеттері зерттелген, бастапқы және түрленген жүйелердің шешімдеріне бағалаулар алынған, және олардың шектеулілігі зерттелген. Сызықты емес функцияның компоненттеріне қатысты тепе-теңдіктер алынды және олардың фазалық айнымалыларымен байланыстары орнатылды. Жүйе шешімінің бойында меншіксіз интегралдардың бағасы алынды және олар абсолютті орнықтылық шарттарын алу үшін пайдаланылды.
Айзерман есебінің шешімі болатындай көп өлшемді сызықты емес реттелетін жүйелер классы анықталды. Реттелетін жүйелердің берілген классы үшін абсолютті орнықтылықтың қажетті және жеткілікті шарттары алынды.
Түйін сөздер: Ерекше емес түрлендірулер, меншіксіз интегралдар, абсолютті орнықтылық, Айзерман есебі, шешімдердің қасиеттері.

Absolute stability of multidimensional regulated systems. Aizerman problem

Aisagaliev S.A., Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan,
E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Ayazbayeva A.M., Research Institute of Mathematics and Mechanics of
al-Farabi Kazakh National University, E-mail: asem.ayazbayeva@kaznu.kz

We consider one class of ordinary differential equations describing dynamics of multidimensional controlled systems with a single equilibrium state with nonlinearities from a given set. Such uncertainty of the nonlinear function generates a non-uniqueness of the solution, which leads to the study of the properties of solutions of equations with differential inclusions. A new method for studying the absolute stability of the equilibrium state of controlled systems with many continuous nonlinearities with incomplete information about them is proposed. By non-singular transformation, the original system is reduced to a special form, which allows using information about the properties of nonlinearities. We study properties of the solutions, obtain estimates for the solutions of the original system and the transformed system, and prove their boundedness. The identities with respect to the components of the nonlinear function are obtained and their connection with the phase variables is established. Estimates of improper integrals along the solution of the system are obtained and they are used to obtain conditions for absolute stability.
The class of multidimensional nonlinear controlled systems for which the problem of Aizerman has a solution is highlighted. For this class of regulated systems, necessary and sufficient conditions for absolute stability are obtained.
Key words: Non-singular transformation, improper integrals, absolute stability, Aizerman problem, properties of solutions.

1 Введение

Рассматривается уравнение движения регулируемых систем следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \sigma = Sx, \quad x(0) = x_0, \quad t \in I = [0, \infty), \tag{1}$$

где A, B, S – постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ соответственно, матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1,n}$, $\lambda_j(A)$ – собственные значения матрицы A, $|x_0| < \infty$, $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_m(\sigma_m))$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$.

Функция

$$\begin{gathered}\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m) | 0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \\ \le \mu_{0i}\sigma_i^2, \ \forall \sigma_i, \ \sigma_i \in R^1, \ \varphi(0) = 0, \ \ |\varphi(\sigma)| \le \varphi_*, \ \forall \sigma, \ \sigma \in R^m, \ 0 < \varphi_* < \infty\},\end{gathered} \tag{2}$$

где $\mu_0 = diag(\mu_{01}, \ldots, \mu_{0m}) > 0$ – диагональная матрица порядка $m \times m$, $|\cdot|$ – евклидова норма, $\varphi_* = const > 0$, $(*)$ – знак транспонирования. Встречающиеся на практике системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами и для таких систем вектор функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию (2).

Регулируемые системы с уравнением вида $\dot{x} = A_0x + B\overline{\varphi}(\sigma)$, $\sigma = Sx$, с неограниченной нелинейностью $\overline{\varphi}(\sigma) = h\sigma + \varphi(\sigma) \in \Phi_0$, $h = diag(h_1, \ldots, h_m)$ сводится к системе (1), (2), когда матрица $A = A_0 + BhS$ – гурвицева.

Как известно из научно-технической литературы по автоматическому управлению все узлы регулируемых систем (датчики, усилители, исполнительные приводы) имеют ограниченные ресурсы по мощностям, по обобщенным силам и моментам вызванные их предельными значениями и эффектами насыщения. Следовательно, включение вида (2), где величина $\varphi_* > 0$ – сколь угодно большое число, $\varphi_* < \infty$ охватывает все виды нелинейностей в регулируемых системах.

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $\sigma_* = Sx_*$. Если матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ обращается в нуль только при $\sigma = 0$, то система (1), (2) имеет единственное положение равновесия $x_* = 0$.

Заметим, что положению равновесия соответствует тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2). В статье исследуется асимптотическая устойчивость в целом невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ при любом $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Полагаем, что при достаточно малой окрестности точки $\sigma = \sigma_* = 0$, функцию $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ можно аппроксимировать линейной функцией $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, $\mu = diag(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $0 < \mu_i \leq \mu_{0i}$, $i = \overline{1,m}$. Следовательно, при $|\sigma| < \delta$, $\delta > 0$ – достаточно малое число, уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\dot{x} = Ax + B\mu Sx = A_1(\mu)x, \ \ x(0) = x_0, \ \ |x_0| < \delta_1, \ \ t \in I,$$

где $A_1(\mu) = A + B\mu S$, $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $\overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1,m}$ – предельное значение μ_i, $i = \overline{1,m}$ определяемое из гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$.

Если матрица $A_1(\mu)$, $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1,m}$ – гурвицева, то существует число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $|x(t)| < \varepsilon_1$ при $|x_0| < \delta_1$, более того, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Таким образом, когда матрица $A_1(\mu)$, где $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1,m}$ – гурвицева, то тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to \infty$.

Определение 1 *Тривиальное решение* $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ *системы* (1), (2) *называется абсолютно устойчивым, если: 1) матрицы* A, $A_1(\mu)$ *– гурвицевы, где* $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu}_{0i}$, $\mu = diag(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $\mu_0 = diag(\mu_{01}, \ldots, \mu_{0m})$; *2) для всех* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *– решение дифференциального уравнения* (1) *обладает свойством* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; 0, x_0, \varphi) = 0$, $|x_0| < \infty$.

Иными словами, тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2) абсолютно устойчиво, если оно асимптотически устойчиво в целом для любого $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Определение 2 *Условиями абсолютной устойчивости системы* (1), (2) *называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы* (A, B, S, μ_0), *при выполнении которых положение равновесия* $x_* = 0$ *абсолютно устойчиво.*

Задача 1 *Найти условие абсолютной устойчивости положения равновесия системы* (1), (2).

Функция $\sigma(t) = Sx(t)$, $t \in I$ является управлением сформированным по принципу обратной связи, а матрица S порядка $m \times n$ называется матрицей обратной связи. Проблема Айзермана состоит в том, что как выбрать матрицу обратной связи S, чтобы из асимптотической устойчивости тривиального решения $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ линейной системы $\dot{x} = Ax + B\mu Sx = A_1(\mu)x$ для любого μ, $0 \leq \mu \leq \overline{\mu}_0 - \varepsilon$, $\varepsilon = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ следует абсолютная устойчивость тривиального решения $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2), где $\overline{\mu}_0$ – предельное значение гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$, $\varepsilon_i >$ – сколь угодно малые числа.

Определение 3 *Будем считать, что в секторе* $[0, \mu_0]$ *проблема Айзермана имеет решение, если: 1) существует матрица обратной связи* S *такая, что* $\mu_0 = \overline{\mu}_0 - \varepsilon$, *где* $\overline{\mu}_0$

– предельное значение гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$, $\varepsilon > 0$ *– сколь угодно малое число; 2) для любого* $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, $0 \le \mu \le \mu_0 = \overline{\mu}_0 - \varepsilon$ *– решение системы* (1) *асимптотически устойчиво; 3) для любого* $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_0$ *тривиальное решение системы* (1), (2) *абсолютно устойчиво.*

Задача 2 *Найти сектор* $[0, \mu_0]$, *где проблема Айзермана имеет решение.*

2 Обзор литературы

Исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем в основном и критическом случаях посвящено много работ. Среди них следует отметить монографии [1–4]. Существует два подхода к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем: метод А.И. Лурье [2] и метод В.М. Попова [3]. Связь между этими методами установлена в работах В.А. Якубовича и его учеников [4]. Разрешающие уравнения А.И. Лурье были получены на основе второго метода Ляпунова путем выбора функции Ляпунова в виде "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейностей" . В конечном счете метод А.И. Лурье приводит к проверке разрешимости матричных неравенств. Естественно, довольно сложно применить такой подход для решения прикладных задач из-за неопределенности выбора произвольных постоянных в условиях абсолютной устойчивости.

Сложность проверки частотных условий, необходимость выделения области абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы привели к созданию алгебраических условий абсолютной устойчивости путем сведения частотных условий к проверке положительности полиномов на положительной полуоси [5, 6].

В 1949 году М.А. Айзерман сформулировал следующую проблему [7]: пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu\sigma$, $0 \le \mu \le \mu_0$, $\sigma = Sx$ асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$ с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi = \{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1)/0 \le \varphi(\sigma)\sigma \le \mu_0\sigma^2, \ \forall\sigma, \ \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом. Проблема Айзермана была решена для систем второго порядка И.Г. Малкиным, Н.П. Еругиным, Н.Н. Красовским.

В 1957 году Р.Е. Калманом сформулирована следующая проблема [8]: Пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu x$, $0 \le \mu \le \mu_0$, $\sigma = Sx$ асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$ с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi(\sigma) \in C^1(R^1, R^1)/0 \le \dfrac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \le \mu_0, \ \ \forall\sigma, \ \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом. Проблема Калмана имеет положительное решение при $n = 2$.

Остаются открытыми решения проблемы Айзермана и проблемы Калмана для случая $n > 2$. В работе [9] предложен новый подход к решению указанных проблем в виде вычислительных алгоритмов на основе модифицированного метода гармонической линеаризации.

Для многомерных регулируемых систем, где $\varphi(\sigma) \in \Phi = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots$ $\ldots, \varphi_m(\sigma_m) \in C(R^m, R^m) \ \mid \ 0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \mu_{0i}\sigma_i^2, \quad \forall\sigma, \quad \sigma \in R^m\}$ проблема Айзермана формулируется так: пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu Sx$,

$\mu = diag(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $\sigma = Sx$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$, $\mu_0 = diag(\mu_{01}, \ldots, \mu_{0m})$, где A, B, S – постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ соответственно, асимптотически устойчивы. Будут ли решения нелинейных систем $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$ с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом.

Отметим, что как следует из работы [9] проблема Айзермана не всегда имеет решение. Следовательно, для решения проблемы Айзермана необходимо выделить класс многомерных регулируемых систем, путем наложения дополнительных требований к свойствам нелинейностей. Функция $\sigma(t) = Sx(t)$, $t \in [0, \infty)$ является управлением сформированное по принципу обратной связи, а матрица S порядка $m \times n$ называется матрицей обратной связи.

В статье делается попытка решения проблемы Айзермана для многомерных регулируемых систем с ограниченными нелинейностями для случая $n > 2$ путем выбора матрицы обратной связи S.

Предлагается новый метод исследования абсолютной устойчивости многомерных регулируемых систем на основе априорной оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Эффективность условия абсолютной устойчивости достигается использованием дополнительной информации о нелинейностях в виде их ограниченности, а конструктивность определяется формулировкой условия устойчивости в виде положительной определенности матрицы от конструктивных параметров системы (A, B, S, μ_0).

Данная работа является продолжением научных исследований из [10–13]. Эффективность и конструктивность предлагаемого метода для одномерных систем, когда $m = 1$ показаны в [14].

3 Материал и методы

Предлагается новый метод исследования абсолютной устойчивости многомерных регулируемых систем с ограниченными нелинейностями на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. В статье приведены результаты фундаментальных исследований по следующим разделам: неособое преобразование, свойства решений системы (1), (2), оценка несобственных интегралов вдоль решения системы (1), (2), абсолютная устойчивость положения равновесия системы (1), (2), решение проблемы Айзермана. Эти результаты позволяют сформулировать условия абсолютной устойчивости положения равновесия многомерных систем и решения проблемы Айзермана в виде необходимого и достаточного условия абсолютной устойчивости.

3.1 Неособое преобразование

Для простоты проверки предлагаемого условия абсолютной устойчивости целесообразно преобразовать исходное уравнение движения (1). Пусть матрица $B = \|B_1, \ldots, B_m\|$, где B_i, $i = \overline{1, m}$ – векторы столбцы $n \times 1$.

Лемма 1 *Пусть вектор-строка* $\theta_i^* \in R^n$, $i = \overline{1, m}$ *такие, что:*

$$\theta_i^* B_i = 1,\ \theta_i^* B_j = 0,\ \ i = \overline{1, m},\ \ i \neq j, \tag{3}$$

где $B_i \neq B_j$, $i \neq j$, $(*)$ *– знак транспонирования. Тогда вдоль решения уравнения* (1) *верно тождество*

$$\theta_i^* \dot{x}(t) = \theta_i^* A x(t) + \varphi_i(\sigma_i(t)), \;\; t \in [0, \infty), \;\; i = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Если, кроме того, ранг $B^* = m$ *и определитель Грама*

$$\Gamma(\theta_1, \ldots, \theta_m) = \begin{vmatrix} <\theta_1, \theta_1> & <\theta_1, \theta_2> & \ldots & <\theta_1, \theta_m> \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ <\theta_m, \theta_1> & <\theta_m, \theta_2> & \ldots & <\theta_m, \theta_m> \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

то векторы θ_i, $i = \overline{1, m}$ *существуют и они линейно независимы, где* $<\theta_i, \theta_j>$ *– скалярное произведение векторов* θ_i, θ_j, $i, j = \overline{1, m}$.

Доказательство. Поскольку $\theta_i^* = (\theta_{i1}, \ldots, \theta_{in})$, $i = \overline{1, m}$, то умножая слева тождество $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(\sigma(t))$, $t \in I$ на θ_i^* имеем

$$\theta_i^* \dot{x}(t) = \theta_i^* A x(t) + \theta_i B \varphi(\sigma(t)), \;\; t \in I, \;\; i = \overline{1, m},$$

где $\theta_i^* B = (\theta_i^* B_1, \ldots, \theta_i^* B_m)$. Отсюда, с учетом (3), получим (4). Заметим, что соотношение (3) запишется в виде линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} \theta_{i1} B_{11} + \theta_{i2} B_{12} + \ldots + \theta_{in} B_{1n} = 0, \\ \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \\ \theta_{i1} B_{i1} + \theta_{i2} B_{i2} + \ldots + \theta_{in} B_{in} = 1, \\ \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \\ \theta_{i1} B_{m1} + \theta_{i2} B_{m2} + \ldots + \theta_{in} B_{mn} = 0, \;\; i = \overline{1, m}. \end{gathered}$$

Если ранг $B^* = m$, то данная система уравнений имеет решение, θ_i, $i = \overline{1, m}$. Из условия (5) следует, что векторы θ_i, $i = \overline{1, m}$ линейно независимы. Лемма доказана.

Лемма 2 *Пусть вектор* $\theta_0 \in R^n$ *такой, что* $\theta_0^* B_i = 0$, $i = \overline{1, m}$, *где* $B_i \neq B_j$, $i \neq j$. *Тогда вдоль решения уравнения* (1) *верно тождество*

$$\theta_0^* \dot{x}(t) = \theta_0^* A x(t), \;\; t \in I. \tag{6}$$

Если, кроме того, ранг $B^* = m$ *и определитель Грама*

$$\Gamma(\theta_{01}, \ldots, \theta_{0n-m}) = \begin{vmatrix} <\theta_{01}, \theta_{02}> & \ldots & <\theta_{01}, \theta_{0n-m}> & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ <\theta_{0n-m}, \theta_{01}> & \ldots & <\theta_{0n-m}, \theta_{0n-m}> & \end{vmatrix} \neq 0, \tag{7}$$

то векторы $\theta_{01}, \ldots, \theta_{0n-m}$ *существуют и они линейно независимы, где* θ_{0i}, $i = \overline{1, n-m}$ *получены из* θ_0 *путем выбора* $(n - m)$ *– произвольных компонентов вектора* θ_0.

Доказательство. Пусть вектор $\theta_0 = (\theta_{10}, \ldots, \theta_{n0}) \in R^n$. Тогда соотношение $\theta_0^* B_i = 0$, $i = \overline{1, m}$ запишется так

$$\theta_{10} B_{11} + \ldots + \theta_{n0} B_{1n} = 0, \ldots, \theta_{10} B_{m1} + \ldots + \theta_{n0} B_{mn} = 0.$$

Если ранг $B^* = m$, то данная система имеет решение $\theta_0 = \theta_0(\theta_{m+1,0}, \dots, \theta_{n,0})$, где $\theta_{m+1,0}, \dots, \theta_{n0}$ – любые числа. Определим векторы $\theta_{01} \in R^n, \dots, \theta_{0n-m} \in R^n$ путем выбора произвольных чисел $\theta_{m+1,0}, \dots, \theta_{n0}$. В частности, $\theta_{01} = \theta_0(1, 0, \ \dots, 0)$, $\theta_{02} = \theta_0(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\theta_{0n-m} = \theta_0(0, \dots, 0, 1)$.

Умножая слева тождество (1) на θ_0^* получим (6). По условию леммы выполнено неравенство (7). Следовательно, векторы $\theta_{0i} \in R^n$, $i = \overline{1, n-m}$ линейно независимы. Так как $\theta_{0i}^* B_i = 0$, $i = \overline{1, n-m}$, то тождество (6) равносильно тому, что

$$\theta_{0i}^* \dot{x}(t) = \theta_{0i}^* A x(t), \ \ t \in I, \ \ i = \overline{1, n-m}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, и пусть, кроме того, ранг матрицы*

$$R = \|\theta_1, \dots, \theta_m \ \ \theta_{01}, \dots, \theta_{0n-m}\| \tag{8}$$

порядка $n \times n$ *равен* n. *Тогда уравнение* (1) *равносильно следующей системе уравнений*

$$\begin{gathered} \dot{y}_1 = c_{11} y_1 + \ldots + c_{1n} y_n + \varphi_1(\sigma_1), \dots, \dot{y}_m = c_{m1} y_1 + \ldots + c_{mn} y_n + \varphi_m(\sigma_m), \\ \dot{y}_{m+1} = c_{m+1,1} y_1 + \ldots + c_{m+1,n} y_n, \dots, \dot{y}_n = c_{n1} y_1 + \ldots + c_{nn} y_n, \\ \sigma_1 = d_{11} y_1 + \ldots + d_{1n} y_n, \dots, \sigma_m = d_{m1} y_1 + \ldots + d_{mn} y_n, \end{gathered} \tag{9}$$

где $y_i = \theta_i^* x$, $i = \overline{1, m}$, $y_{m+i} = \theta_{0i}^* x$, $i = \overline{1, n-m}$.

Доказательство. Так как ранг $R = n$, то из (8) следует, что векторы $\theta_i \in R^n$, $i = \overline{1, m}$, $\theta_{0i} \in R^n$, $i = \overline{1, n-m}$ образуют базис в R^n. Тогда векторы

$$\begin{aligned} &\theta_1^* A x = c_{11} \theta_1^* x + \ldots + c_{1m} \theta_m^* x + c_{1m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + c_{1n} \theta_{0n-m}^* x, \\ &\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ &\theta_m^* A x = c_{m1} \theta_1^* x + \ldots + c_{m,m} \theta_m^* x + c_{m,m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + c_{mn} \theta_{0n-m}^* x, \\ &\theta_{01}^* A x = c_{m+1,1} \theta_1^* x + \ldots + c_{m+1,m} \theta_m^* x + c_{m+1,m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + c_{m+1,n} \theta_{0n-m}^* x, \\ &\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ &\theta_{0n-m}^* A x = c_{n1} \theta_1^* x + \ldots + c_{nm} \theta_m^* x + c_{n,m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + c_{n,n} \theta_{0n-m}^* x, \end{aligned}$$

где c_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$ коэффициенты разложения $A^* \theta_i$, $i = \overline{1, m}$, $A^* \theta_{0i}$, $i = \overline{1, n-m}$ по базисам $\theta_i \in R^n$, $i = \overline{1, m}$, $\theta_{0i} \in R^n$, $i = \overline{1, n-m}$. Отсюда, с учетом (4), (6) получим систему уравнений (9) относительно переменных $y_1, \dots, y_n$.

Аналогично, путем разложения векторов $S_i^* \in R^n$ по базисам θ_i, $i = \overline{1, m}$, θ_{0i}, $i = \overline{1, n-m}$ получим

$$\sigma_1 = S_1 x = d_{11} \theta_1^* x + \ldots + d_{1m} \theta_m^* x + d_{1m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + d_{1n} \theta_{0n-m}^* x,$$

$$\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots$$

$$\sigma_m = S_m x = d_{m1} \theta_1^* x + \ldots + d_{m,m} \theta_m^* x + d_{m,m+1} \theta_{01}^* x + \ldots + d_{m,n} \theta_{0n-m}^* x,$$

где $S^* = (S_1^*, \dots, S_m^*)$. Лемма доказана.

Система уравнений (9) в векторной форме имеет вид

$$\dot{y} = \overline{A} y + \overline{B} \varphi(\sigma), \ \ \sigma = \overline{S} y, \ \ \varphi(\sigma) \in \Phi_0, \tag{10}$$

где $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{S}$ – постоянные матрицы порядков $n\times n$, $n\times m$, $m\times n$ соответственно, $\overline{A} = \|c_{ij}\|$, $i, j = \overline{1,n}$, $\overline{S} = \|d_{ij}\|$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $\overline{B} = \begin{pmatrix} I_m \\ O_{n-m,m} \end{pmatrix}$, I_m – единичная матрица порядка $m \times m$, $O_{n-m,m}$ – матрица порядка $(n-m)\times m$ с нулевыми элементами. Если матрица $K = R^*$, то $y = Kx = R^*x$, $x = K^{-1}y = (R^*)^{-1}y$, матрицы $\overline{A}$, $\overline{S}$, $\overline{B}$ равны $\overline{A} = KAK^{-1} = (R^*)^{-1}AR^{-1}$, $\overline{S} = SK^{-1} = S(R^*)^{-1}$, $\overline{B} = KB = R^*B$. Таким образом, дифференциальное уравнение (1) с нелинейностями (2) с неособым преобразованием $x = K^{-1}y = (R^*)^{-1}y$ приводится к виду (10).

3.2 Свойства решений

Рассмотрена ограниченность решений системы (1), (2), а также уравнений (10). Получены тождества вдоль решения уравнения (10) и исследовано ее асимптотическое свойство.

Теорема 1 *Пусть матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1,n}$ и выполнены условия лемм 1 – 3. Тогда верны оценки:*

$$|x(t)| \le c_0,\ |\dot{x}(t)| \le c_1,\ t \in I, \tag{11}$$

$$|y(t)| \le c_2,\ |\dot{y}(t)| \le c_3,\ t \in I, \tag{12}$$

$$|\sigma(t)| \le c_4,\ |\dot{\sigma}(t)| \le c_5,\ t \in I, \tag{13}$$

где $c_i = const > 0$, $c_i < \infty$, $i = \overline{0,5}$. Кроме того, функции $x(t)$, $y(t)$, $\sigma(t)$, $t \in I$ равномерно непрерывны.

Доказательство. Так как матрица $\overline{A} = KAK^{-1}$, то из гурвицевости матрицы A следует гурвицевость матрицы $\overline{A}$, т.е. $Re\lambda_j(A) = Re\lambda_j(\overline{A}) < 0$, $j = \overline{1,n}$. Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\varphi(\sigma(\tau))d\tau,\ t \in I.$$

Заметим, что из гурвицевости матрицы A следует оценка $\|e^{At}\| \le ce^{(a+\varepsilon)t}$, $c = c(\varepsilon) > 0$, $\forall t$, $t \in I$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, величина $a = \max\limits_{1\le j\le n} Re\lambda_j(A) < 0$. Тогда

$$|x(t)| \le \|e^{At}\|\ |x_0| + \int_0^t \|e^{A(t-\tau)}\|\ \|B\|\ |\varphi(\sigma(\tau))|d\tau \le$$

$$\le c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + ce^{(a+\varepsilon)t}\ \|B\|\varphi_* \int_0^t e^{-(a+\varepsilon)\tau}\ d\tau =$$

$$= c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t}\ + ce^{(a+\varepsilon)t}\ \|B\|\varphi_*[-\frac{1}{a+\varepsilon}e^{-(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon}] =$$

$$= c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon}c\|B\|\varphi_*(-1 + e^{(a+\varepsilon)t}) \le$$

$$\le c|x_0| - \frac{1}{a+\varepsilon}c\|B\|\varphi_* = c_0,$$

где $e^{(a+\varepsilon)t} \leq 1$, $t \in I$, $a+\varepsilon < 0$, $-\dfrac{1}{a+\varepsilon} > 0$, $|\varphi(\sigma(t))| \leq \varphi_*$, $\forall\ t$, $t \in I$. Отсюда следует ограниченность решения системы (1), (2). Из уравнения (1) следует, что

$$|\dot{x}(t)| \leq \|A\|\ |x(t)| + \|B\|\ |\varphi(\sigma(t))| \leq \|A\|c_0 + \|B\|\varphi_* = c_1,\ \ \forall t,\ \ t \in I,$$

Тогда

$$|\sigma(t)| \leq \|S\|\ |x(t)| \leq \|S\|c_0 = c_4,\ \ |\dot{\sigma}(t)| \leq \|S\|\ |\dot{x}(t)| \leq \|S\|c_1 = c_5,\ \ \forall t,\ \ t \in I.$$

Так как функция $y(t) = Kx(t)$, $t \in I$, то $|y(t)| \leq \|K\||x(t)| \leq \|K\|c_0 = c_2$, $|\dot{y}| \leq \|K\||\dot{x}(t)| \leq \|K\|c_1 = c_3$, $\forall\ t$, $t \in I$.

Итак, доказаны оценки (11) – (13). Из ограниченности функций $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{\sigma}(t)$, $t \in I$ следуют равномерные непрерывности функций $x(t)$, $y(t)$, $\sigma(t)$, $t \in I$. Теорема доказана.

Следует отметить, что: 1. Из оценки $|x(t)|$, $t \in I$ имеем $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t)| = |x(\infty)| \leq c|x_0| - \dfrac{1}{a}c\|B\|\varphi_* = \overline{c}_0$, $\overline{c}_0 \leq c_0$ в силу непрерывности $x(t)$, $t \in I$, где $a < 0$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} |y(t)| = |y(\infty)| \leq \|K\|\overline{c}_0$, $\lim\limits_{t\to\infty} |\sigma(t)| = |\sigma(\infty)| \leq \|s\|\overline{c}_0$.

2. Если $x_0 \in S_\rho = \{x_0 \in R^n | |x_0| \leq \rho,\ \ \rho > 0\}$, то $|\sigma| \leq \|S\|(c\rho - \dfrac{c}{a}\|B\|\varphi_*) = \overline{c}_4$.

Лемма 4 *Пусть выполнены условия лемм 1-3. Тогда вдоль решения системы* (10) *верны тождества*

$$\varphi(\sigma(t)) = H_0\dot{y}(t) - \overline{A}_{11}y(t),\ \ t \in I, \tag{14}$$

$$H_1\dot{y}(t) = \overline{A}_{12}y(t),\ \ t \in I, \tag{15}$$

$$\sigma(t) = \overline{S}_1H_0y(t) + \overline{S}_2H_1y(t),\ \ t \in I, \tag{16}$$

$$\dot{\sigma}(t) = \overline{S}_1H_0\dot{y}(t) + \overline{S}_2H_1\overline{A}_{12}y(t),\ \ t \in I, \tag{17}$$

где

$$H_0 = (I_m,\ O_{m,n-m}),\quad H_1 = (o_{n-m,m},\ I_{n-m}),\quad \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \end{pmatrix} = I_n,\quad \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} \\ \overline{A}_{12} \end{pmatrix},$$

$$\overline{A}_{11} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},\quad \overline{A}_{12} = \begin{pmatrix} c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},\quad \overline{S} = (\overline{S}_1,\ \overline{S}_2),$$

$$\overline{S}_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mm} \end{pmatrix},\quad \overline{S}_2 = \begin{pmatrix} d_{1m+1} & \dots & d_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m,m+1} & \dots & d_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Поскольку выполнены условия лемм 1–3, то верно (9). Заметим, что

$$H_0\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \cdots \\ \dot{y}_m \end{pmatrix},\quad H_1\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_{m+1} \\ \cdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}.$$

Тогда из (9) следует, что

$$\varphi_1(\sigma_1) = \dot{y}_1 - c_{11}y_1 - \dots - c_{1n}y_n, \dots, \varphi_m(\sigma_m) = \dot{y}_m - c_{m1}y_1 - \dots - c_{mn}y_n,$$

$$\sigma = (\overline{S}_1,\ \overline{S}_2)y = (\overline{S}_1, \overline{S}_2)\begin{pmatrix} H_0 y \\ H_1 y \end{pmatrix} = \overline{S}_1 H_0 y + \overline{S}_2 H_1 y, \quad H_1\dot{y} = \overline{A}_{12}y.$$

Следовательно, верны тождества (14) – (17). Лемма доказана.

Лемма 5 *Пусть выполнены условия лемм 1–4. Тогда для любых матриц* Λ, M, N_1, N_2 *порядков* $n\times n$, $n\times n$, $n\times(n-m)$, $n\times(n-m)$ *соответственно, вдоль решения уравнения* (10) *верны тождества*

$$y^*(t)M\dot{y}(t) + y^*(t)\Lambda\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}[y^*(t)\Lambda y(t)], \ \ t\in I \ \ \text{при} \ \ M = \Lambda^*, \tag{18}$$

$$[\dot{y}^*(t)N_2 + y^*(t)N_1][H_1\dot{y}(t) - \overline{A}_{12}(t)y(t)] \equiv 0, \quad t\in I. \tag{19}$$

Доказательство. Тождество (18) непосредственно следует из равенства

$$\frac{d}{dt}[y^*(t)\Lambda y(t)] = \dot{y}^*(t)\Lambda y(t) + y^*(t)\Lambda\dot{y}(t) = y^*(t)\Lambda^*\dot{y}(t) + y^*(t)\Lambda\dot{y}(t) =$$
$$= y^*(t)M\dot{y}(t) + y^*(t)\Lambda\dot{y}(t), \ \ t\in I \ \ \text{при} \ \ \Lambda^* = M.$$

Как следует из (15) для любых матриц N_1, N_2 порядков $n\times(n-m)$, $n\times(n-m)$ верно тождество (19). Лемма доказана.

3.3 Несобственные интегралы

На основе неособого преобразования и используя свойства решений системы (1) могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (10).

Теорема 2 *Пусть выполнены условия лемм 1–3, матрица* $\overline{A}$ *– гурвицева, функция* $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$. *Тогда для любой диагональной матрицы* $\tau_1 = diag(\tau_{11},\dots,\tau_{1m})$ *порядка* $m\times m$ *вдоль решения системы* (10) *несобственный интеграл*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \varphi^*(\sigma(t))\tau_1\dot{\sigma}(t)dt = \int_0^\infty [\dot{y}^*(t)\Lambda_1\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Lambda_2 y(t) + y^*(t)\Lambda_3 y(t)]dt = \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i < \infty, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\Lambda_1 = H_0^*\tau_1\overline{S}_1H_0, \quad \Lambda_2 = H_0^*\tau_1\overline{S}_2\overline{A}_{12} - H_0^*\overline{S}_1^*\tau_1\overline{A}_{11}), \quad \Lambda_3 = -\overline{A}_{11}^*\tau_1\overline{S}_2\overline{A}_{12}. \tag{21}$$

Заметим, что матрица $\overline{A} = KAK^{-1}$, *где* K *– неособая матрица, то* $\lambda_j(A) = \lambda_j(\overline{A})$, $j=\overline{1,n}$. *Следовательно, матрица* $\overline{A}$ *– гурвицева тогда, когда матрица* A *– гурвицева, где* $\lambda_j(A) = \lambda_j(\overline{A})$, $j=\overline{1,n}$ *собственные значения матрицы* A, $Re\lambda_j(A) < 0$, $j=\overline{1,n}$.

Доказательство. Как следует из теоремы 1, $|y(\infty)| < c_2 < \infty$, $|y(0)| \le c_2 < \infty$. Несобственный интеграл (см. (20)).

$$I_1 = \int_0^\infty \varphi^*(\sigma(t))\tau_1\dot{\sigma}(t)dt = \int_0^\infty [H_0\dot{y}(t) - \overline{A}_{11}y(t)]^*\tau_1[\overline{S}_1H_0\dot{y}(t) + \overline{S}_2\overline{A}_{12}y(t)]dt =$$

$$= \int_0^\infty [\dot{y}^*(t)\Lambda_1\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Lambda_2 y(t) + y^*(t)\Lambda_3 y(t)]dt =$$

$$= \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i < \infty,$$

в силу тождеств (11) – (13), $|\sigma(0)| \le c_4 < \infty$, $|\sigma(\infty)| \le c_4 < \infty$, где матрицы $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ порядков $n \times n$ определяются формулами (21) соответственно. Теорема доказана.

Теорема 3 *Пусть выполнены условия лемм 1–3, матрица* $\overline{A}$ *– гурвицева, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. *Тогда для любой диагональной матрицы* $\tau_2 = diag(\tau_{21}, \dots, \tau_{2m}) \ge 0$ *порядка* $m \times m$, *вдоль решения уравнения* (10) *несобственный интеграл*

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty [\varphi^*(\sigma(t))\tau_2\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t)) - \varphi^*(\sigma(t))\tau_2\sigma(t)]dt = \\ &= \int_0^\infty [\dot{y}^*(t)\Sigma_1\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Sigma_2 y(t) + y^*(t)\Sigma_3 y(t)]dt \le 0, \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\begin{gathered} \Sigma_1 = H_0^*\tau_2\mu_0^{-1}H_0, \quad \Sigma_2 = -2H_0^*\tau_2\mu_0^{-1}\overline{A}_{11} - H_0^*\tau_2\overline{S}_1H_0 - H_0^*\tau_2\overline{S}_2H_1, \\ \Sigma_3 = \overline{A}_{11}^*\tau_2\mu_0^{-1}\overline{A}_{11} + \overline{A}_{11}^*\tau_2\overline{S}_1H_0 + \overline{A}_{11}^*\tau_2\overline{S}_2H_1. \end{gathered} \tag{23}$$

Доказательство. Из включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ следует

$$\frac{\varphi_i(\sigma_i)}{\sigma_i} \le \mu_{0i}, \quad \frac{\sigma_i}{\varphi_i(\sigma_i)} \ge \mu_{0i}^{-1}, \ \ \forall\sigma_i, \ \ \sigma_i \in R^1, \ \ i = \overline{1,m}.$$

Следовательно, $\sigma_i\varphi_i(\sigma_i) \ge \mu_{0i}^{-1}\varphi_i^2(\sigma_i)$, $i = \overline{1,m}$. Тогда для любой величины $\tau_{2i} \ge 0$ верно неравенство $\varphi_i(\sigma_i)\tau_{2i}\sigma_i - \mu_{0i}^{-1}\tau_{2i}\varphi_i^2(\sigma_i) \ge 0$, $i = \overline{1,m}$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^m [\mu_{0i}^{-1}\tau_{2i}\varphi_i^2(\sigma_i) - \varphi_i(\sigma_i)\tau_{2i}\sigma_i] \le 0.$$

Пусть $\tau_2 = diag(\tau_{21}, \dots, \tau_{2m}) \ge 0$, $\mu_0^{-1} = diag(\mu_{01}^{-1}, \dots, \mu_{0m}^{-1})$. Тогда данное неравенство запишется в виде

$$\varphi^*(\sigma)\tau_2\mu_0^{-1}\varphi(\sigma) - \varphi^*\tau_2\sigma \le 0, \ \ \forall\sigma, \ \ \sigma \in R^m.$$

Отсюда следует, что несобственный интеграл (см. (22))

$$I_2 = \int_0^\infty [\varphi^*(\sigma(t))\tau_2\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t)) - \varphi^*(\sigma(t))\tau_2\sigma(t)]dt \le 0.$$

Тогда с учетом тождеств (14), (16), имеем

$$I_2 = \int_0^\infty \{[H_0\dot{y}(t) - \overline{A}_{11}y(t)]^*\tau_2\mu_0^{-1}[H_0\dot{y}(t) - \overline{A}_{11}y(t)] - [H_0\dot{y}(t) - \overline{A}_{11}y(t)]^*\times$$

$$\times\tau_2[\overline{S}_1H_0y(t) + \overline{S}_2H_1y(t)]\}dt = \int_0^\infty [\dot{y}^*(t)\Sigma_1\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Sigma_2y(t) + y^*(t)\Sigma_3y(t)]dt \le 0,$$

где матрицы $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ порядков $n\times n$ определяются по формуле (23). Теорема доказана.

Лемма 6 *Пусть выполнены условия лемм 1–3, матрица $\overline{A}$ – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любых матриц N_1, N_2. порядков $n \times (n-m)$, $n \times (n-m)$ соответственно, несобственный интеграл*

$$I_3 = \int_0^\infty [\dot{y}^*(t)P_1\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)P_2y(t) + y^*(t)P_3y(t)]dt = 0. \tag{24}$$

где $P_1 = N_2H_1$, $P_2 = -N_2\overline{A}_{12} + H_1^*N_1$, $P_3 = -N_1\overline{A}_{12}$.

Доказательство леммы непосредственно следует из тождества (19).

3.4 Абсолютная устойчивость

На основе результатов изложенных выше об оценке несобственных интегралов, в также лемм 1–3 могут быть сформулированы условия абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

Введем следующие обозначения

$$\begin{gathered} R_0 = \Lambda_1 + \Sigma_1 + P_1 = H_0^*\tau_1\overline{S}_1H_0 + H_0^*\tau_2\mu_0^{-1}H_0 + N_1H_1, \\ \Gamma_0 = \Lambda_2 + \Sigma_2 + P_2 = H_0^*\tau_1\overline{S}_2\overline{A}_{12} - H_0^*\overline{S}_1^*\tau_1\overline{A}_{11} - \\ -2H_0^*\tau_2\mu_0^{-1}\overline{A}_{11} - H_0^*\tau_2\overline{S}_1H_0 - H_0^*\tau_2\overline{S}_2H_1 + H_1^*N_1^* - N_2\overline{A}_{12}, \\ W_0 = \Lambda_3 + \Sigma_3 + P_3 = -\overline{A}_{11}^*\tau_1\overline{S}_2\overline{A}_{12} + \overline{A}_{11}^*\tau_2\mu_0^{-1}\overline{A}_{11} + \\ +\overline{A}_{11}^*\tau_2\overline{S}_1H_0 + \overline{A}_{11}\tau_2\overline{S}_2H_1. \end{gathered} \tag{25}$$

В частности, когда матрица $N_1 = -\overline{A}_{11}^*\tau_1\overline{S}_2 + \overline{A}_{11}^*\tau_2T$, то матрица $W_0 = \overline{A}_{11}^*\tau_2\mu_0^{-1}\overline{A}_{11} + \overline{A}_{12}^*K_1A_{12} \ge 0$, где $K_1 = K_1^* > 0$, $\overline{A}_{11}^*\tau_2\overline{S}_1H_0 + \overline{A}_{11}^*\tau_2\overline{S}_2H_1 = \overline{A}_{11}^*\tau_2\overline{S} = \overline{A}_{11}^*\tau_2T\overline{A}_{12}$, $\overline{S} = T\overline{A}_{12}$. Здесь K_1, T матрицы порядков $n\times n$, $m\times n$ соответственно.

Тогда несобственный интеграл

$$I_4 = I_1 + I_2 + I_3 = \int_0^\infty [\dot{y}^*(t)R_0\dot{y}(t) + \dot{y}(t)\Gamma_0 y(t) + y^*(t)W_0 y(t)]dt \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i < \infty. \tag{26}$$

Теорема 4 *Пусть выполнены условия лемм 1–5, матрица* $\overline{A}$ *– гурвицева, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, *и пусть, кроме того, матрицы* R_0, Γ_0 *порядков* $n \times n$, $n \times n$ *такие, что: 1)* $R_0 = R_0^* \geq 0$, *2)* $\Gamma_0 = \Gamma_0^*$. *Тогда несобственный интеграл*

$$I_{40} = \int_0^\infty y^*(t)W_0 y(t)dt \leq \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i -$$
$$- \int_0^\infty \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}y^*(t)\Gamma_0 y(t)]dt < \infty, \tag{27}$$

где матрицы R_0, Γ_0, W_0 *определяются по формуле* (25), τ_1, $\tau_2 \geq 0$ *любые диагональные матрицы порядков* $m \times m$, N_1, N_2 *– любые матрицы порядков* $n \times (n-m)$, $n \times (n-m)$ *соответственно.*

Доказательство. Поскольку выполнены условия лемм 1–5, то несобственный интеграл $I_4 < \infty$ (см. (26)), в силу оценок (20), (22), (24), где матрицы R_0, Γ_0, W_0 определяются по формуле (25). Матрицы Λ_i, $i = 1,2,3$, Σ_i, $i = 1,2,3$, $W_0 = \Lambda_3 + \Sigma_3 + P_3$ вычисляются по формулам (21), (23). Так как матрица $\Gamma_0 = \Gamma_0^*$, то $\dot{y}^*(t)\Gamma_0 y(t) = \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}y^*(t)\Gamma_0 y(t)]$, $t \in I$, следовательно, несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}y^*(t)\Gamma_0 y(t)]dt = \frac{1}{2}y^*(t)\Gamma_0 y(t)\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}y^*(\infty)\Gamma_0 y(\infty) - \frac{1}{2}y^*(0)\Gamma_0 y(0) < \infty,$$

в силу оценки $|y(\infty)| \leq c_2 < \infty$, $|y(0)| \leq c_2 < \infty$.

Тогда

$$\int_0^\infty [\dot{y}^*(t)R_0\dot{y}(t) + y^*(t)W_0 y(t)]dt \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i - \frac{1}{2}y^*(\infty)\Gamma_0 y(\infty) + \frac{1}{2}y^*(0)\Gamma_0 y(0) < \infty.$$

По условию теоремы матрица $R_0 = R_0^* \geq 0$. Тогда квадратичная форма $\dot{y}^*(t)R_0\dot{y}(t) = y^*(t)[\frac{1}{2}R_0 + \frac{1}{2}R_0^*]\dot{y}(t) \geq 0$, $\forall t$, $t \in I$. Следовательно, верно неравенство (см. (27))

$$I_{40} = \int_0^\infty y^*(t)W_0 y(t)dt \leq \int_0^\infty [\dot{y}^*(t)R_0\dot{y} + y^*(t)W_0 y(t)]dt < \infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 5 *Пусть выполнены условия лемм 1–5, матрица* $\overline{A}$ *– гурвицева, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *и выполнены условия 1), 2) теоремы 4, и пусть, кроме того, матрица* $W_0 = W_0^* > 0$. *Тогда положение равновесия системы* (1), (2) *абсолютно устойчиво.*

Доказательство. Так как выполнены все условия теоремы 4, то верно неравенство (27). Следовательно, несобственный интеграл

$$I_{40} = \int\limits_0^\infty y^*(t) T_0 y(t) dt < \infty, \quad T_0 = \frac{1}{2} W_0 + \frac{1}{2} W_0^* > 0,$$

где скалярная функция $V(y) = y^* T_0 y > 0$, $\forall y$, $y \in R^n$, $y \neq 0$, $V(0) = 0$. Поскольку выполнены все условия теоремы 1, то $|y(t)| \leq c_2$, $|\dot{y}(t)| \leq c_3$, $\forall t$, $t \in I$. Покажем, что $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = 0$.

Предположим противное, т.е. $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) \neq 0$. Тогда существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$ такая, что $|y(t_k)| \geq \varepsilon > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Выберем $t_{k+1} - t_k \geq \varepsilon_1 > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку $y(t)$, $t \in I$ непрерывна дифференцируема, $|y(t)| \leq c_2$, $|\dot{y}(t)| \leq c_3$, $t \in I$, то $|y(t) - y(t_k)| \leq c_3 |t - t_k|$, $\forall t$, $t \in [t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}, t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}]$, $k = 1, 2, \ldots$. Так как $t_k - \frac{\varepsilon_1}{2} > t_{k-1}$, $t_k + \frac{\varepsilon_1}{2} > t_{k+1}$, $V(y) > 0$, $y \in R^n$, то

$$\int\limits_0^\infty V(y(t)) dt \geq \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}}^{t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}} V(y(t)) dt,$$

где $|y(t)| = |y(t_k) + y(t) - y(t_k)| \geq |y(t_k)| - |y(t) - y(t_k)| \geq \varepsilon - c_3 \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_0 > 0$, $\forall t$, $t \in [t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}, t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}]$. Всегда можно выбрать величину $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы величина $\varepsilon_0 > 0$. Итак, $|y(t)| \geq \varepsilon_0$, $|y(t)| \leq c_2$, $t \in [t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}, t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}]$. Так как функция $V(y)$ непрерывна на компактном множестве $\varepsilon_0 \leq |y| \leq c_2$, то существует число $m > 0$ такое, что $\min\limits_{\varepsilon_0 \leq |y| \leq c_2} V(y) = m$. Тогда значение интеграла

$$\int\limits_{t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}}^{t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}} V(y(t)) dt \geq \varepsilon_1 m, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty V(y(t))dt = \int\limits_0^\infty y^*(t)W_0 y(t)dt \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{t_k-\frac{\varepsilon_1}{2}}^{t_k+\frac{\varepsilon_1}{2}} V(y(t))dt \geq \lim_{k\to\infty} k\varepsilon_1 m = \infty.$$

Это противоречит условию $I_{40} < \infty$, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Так как $x(t) = K^{-1}y(t)$, $t \in I$, K – неособая матрица, то $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, $\forall\varphi$, $\varphi \in \Phi_0$. Теорема доказана.

Из теорем 4, 5 следует, что в случаях когда матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ и выполнены условия: 1) $R_0 = R_0^* \geq 0$; 2) $\Gamma_0 = \Gamma_0^*$; 3) $W_0 = W_0^* > 0$ положение равновесия многомерной регулируемой системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Замечание 1 *Как следует из доказательства теоремы 5, положение равновесия системы* (1), (2) *абсолютно устойчиво и в случае, когда матрица* $W_0 = W_0^* \geq 0$, *если поверхность* $V(y) = y^*T_0y = 0$ *не содержит целые траектории. В этом случае, интегральные кривые "прошивают"поверхность* $V(y) = 0$. *Заметим, что поверхность* $y^*T_0y = 0$ *не содержит целые траектории, если* $y(t)T\dot{y}(t) \not\equiv 0$, $t \in [0,\infty)$.

Следует отметить, что в результате неособого преобразования получено тождество (15). Данное тождество использовано при определении несобственного интеграла I_3. Несобственный интеграл I_3 зависит от произвольных матриц N_1, N_2 порядков $n\times(n-m)$, $n \times (n - m)$ соответственно. Матрицы R_0, Γ_0, W_0 зависят от матрицы N_1, N_2. Как следует из условия теорем 4, 5 матрицы τ_1, $\tau_2 \geq 0$, N_1, N_2 обеспечивают выполнение условий $R_0 = R_0^* \geq 0$, $\Gamma_0 = \Gamma_0^*$, $W_0 = W_0^* > 0$. Следовательно, матрицы N_1, N_2 позволяют существенно расширить область абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы. В методе А.И. Лурье и в методе В.М. Попова отсутствует несобственный интеграл I_3, следовательно, отсутствуют матрицы N_1, N_2. Наличие матриц N_1, N_2 позволило решить проблему Айзермана.

3.5 Проблема Айзермана

Возникает вопрос: можно ли выделить класс многомерных регулируемых систем, путем выбора матрицы обратной связи S, для которого проблема Айзермана имеет решение. Для данного класса многомерных регулируемых систем, полученные результаты являются необходимыми и достаточными условиями абсолютной устойчивости. Заметим, что матрицы S и $\overline{S}$ связаны соотношениями $S = \overline{S}K$, $\overline{S} = SK^{-1}$, матрицы $A + B\mu_0S$ и $\overline{A} + \overline{B}\mu_0\overline{S}$ подобные. В самом деле, если $\varphi(\sigma) = \mu_0\sigma$, где $\sigma = Sx$ для системы (1), (2), $\sigma = \overline{S}y$ для системы (10), то $\dot{y} = \overline{A}y + \overline{B}\varphi(\sigma) = (\overline{A} + \overline{B}\mu_0\overline{S})y$, $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma) = (A + B\mu_0S)x$. Так как $\overline{A} = KAK^{-1}$, $\overline{B} = KB$, $\overline{S} = SK^{-1}$, то $\overline{A} + \overline{B}\mu_0\overline{S} = K(A + B\mu_0S)K^{-1}$. Отсюда следует, что матрица $\overline{\mu} = diag(\overline{\mu}_{01}, \ldots, \overline{\mu}_{0m})$ найденная из условия гурвицевости матрицы $A + B\overline{\mu}_0S$ совпадает со значением $\overline{\mu}_0$ определенным из условия гурвицевости матрицы $\overline{A} + \overline{B}\overline{\mu}_0\overline{S}$.

Как следует из теоремы 2 и леммы 5 несобственный интеграл

$$I_5 = I_1 + I_3 = \int\limits_0^\infty [\dot{y}^*(t)R_1\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Gamma_1 y(t) + y^*(t)W_1 y(t)]dt =$$
$$= \sum_{i=1}^m \int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i < \infty, \tag{28}$$

где

$$R_1 = \Lambda_1 + P_1 = H_0^*\tau_1\overline{S}_1 H_0 + N_1 H_1,$$
$$\Gamma_2 = \Lambda_2 + P_2 = H_0^*\overline{S}_2 H_1\overline{A}_{12} - H_0^*\overline{S}_1^*\tau_1\overline{A}_{11} - N_2\overline{A}_{12} + H_1^* N_1^*,$$
$$W_1 = \Lambda_3 + P_3 = -\overline{A}_{11}^*\tau_1\overline{S}_2\overline{A}_{12} - N_1\overline{A}_{12}.$$

В частности, когда $N_1 = -\overline{A}_{11}^*\tau_1\overline{S}_2 - \overline{A}_{12}^*K_2$, то $W_1 = \overline{A}_{12}^*K_2\overline{A}_{12} \geq 0$, где $K_2 = K_2^* > 0$ – матрица порядка $n \times n$.

Теорема 6 *Пусть выполнены условия лемм 1–3, матрицы* $A, A+B\mu S$, $0 \leq \mu \leq \mu_0 < \overline{\mu}_0$ *– гурвицевы, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, *и пусть, кроме того:*

1) диагональная матрица $\tau_1 = diag(\tau_{11}, \ldots, \tau_{1m})$, *матрицы* N_1, N_2, $\overline{S} = (\overline{S}_1, \overline{S}_2)$ *порядков* $n \times (n-m)$, $n \times (n-m)$, $m \times n$ *соответственно, такие, что*

$$R_1 = R_1^* \geq 0, \quad \Gamma_1 = \Gamma_1^*; \tag{29}$$

2) матрица $T_1 = \dfrac{1}{2}(W_1 + W_1^*) \geq 0$, *поверхность* $V_1(y) = y^*T_1 y = 0$ *не содержит целые траектории.*

Тогда в секторе $[0, \mu_0]$, $\mu_0 = \overline{\mu}_0 - \varepsilon$, $\varepsilon = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1,m}$ *– сколь угодно малые числа, проблема Айзермана имеет решение, где* $\overline{\mu}_0 = diag(\overline{\mu}_{01}, \ldots, \overline{\mu}_{0m})$ *предельное значение матрицы* $\mu_0 = diag(\mu_{01}, \ldots, \mu_{0m})$, *найденное из условия гурвицевости матрицы* $A + B\mu_0 S$.

Доказательство. Из (28) при выполнении условия (29), имеем

$$I_5 = \int\limits_0^\infty [\dot{y}^*(t)R_1\dot{y}(t) + y^*(t)W_1 y(t)]dt \leq \sum_{i=1}^m \int\limits_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i -$$
$$- \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}y^*(t)\Gamma_1 y(t)]dt < \infty,$$

в силу того, что $|y(\infty)| \leq c_2 < \infty$, $|y(0)| \leq c_2 < \infty$. Так как матрица $T_1 = \dfrac{1}{2}(W_1 + W_1^*) \geq 0$ то

$$I_{50} = \int\limits_0^\infty V_1(y(t))dt = \int\limits_0^\infty y^*(t)T_1 y(t)dt \leq I_5 < \infty,$$

где $V_1(y(t)) = y^*(t)T_1y(t)$, $t \in I$. Поскольку поверхность $V_1(y) = y^*T_1y = 0$ не содержит целые траектории, то повторяя доказательства теоремы 5, получим $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Как следует из [14] достаточным условием отсутствия целых траекторий на множестве $V_1(y) = y^*T_1y = 0$ является выполнение неравенства

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)^* \dot{y}(t) = 2y^*(t)T_1[\overline{A}y(t) + \overline{B}\varphi(\sigma(t))] \neq 0, \quad t \in I = [0, \infty).$$

Можно показать, что для системы (10) данное неравенство выполняется. Теорема доказана.

Как следует из леммы 4, уравнение (10) может быть представлено в виде

$$H_0\dot{y} = \overline{A}_1H_0y + \overline{A}_2H_1y + \varphi(\sigma), \quad H_1\dot{y} = \overline{A}_3H_0y + \overline{A}_4H_1y, \quad \varphi(\sigma) \in \Phi_0, \tag{30}$$

где $\overline{A}_{11} = (\overline{A}_1, \overline{A}_2)$, $\overline{A}_{12} = (\overline{A}_3, \overline{A}_4)$, $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\overline{A}_4$ – матрицы порядков $m\times m$, $m\times(n-m)$, $(n-m)\times m$, $(n-m)\times(n-m)$ соответственно. Уравнение (30) следует из равенства

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} H_0\dot{y} \\ H_1\dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A}_1 & \overline{A}_2 \\ \overline{A}_3 & \overline{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0y \\ H_1y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_m \\ O_{n-m,m} \end{pmatrix} \varphi(\sigma), \quad \varphi(\sigma) \in \Phi_0.$$

Теорема 7 *Пусть выполнены условия теоремы 6, где матрица* $T_1 = H_0^*T_{11}H_0 \geq 0$, $T_{11} = T_{11}^*$, *поверхность* $V_1(y) = y^*H_0^*T_{11}H_0y = 0$ *не содержит целые траектории, матрица* $\overline{A}_4$ *– гурвицева.*

Тогда в секторе $[0, \mu_0]$, $\mu_0 = \overline{\mu}_0 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ *– диагональная матрица порядка* $m \times m$ *со сколь угодно малыми элементами, проблема Айзермана имеет решение.*

Доказательство. Как следует из условия теоремы, выполнено неравенство $(I_{50} < \infty)$, где $V_1(y) = y^*H_0^*T_{11}H_0y$, $T_{11} = T_{11}^*$ – матрица порядка $(n-m)\times(n-m)$, $V_1(y) > 0$, $\forall y$, $y \in R^n$, $V_1(0) = 0$, за исключением поверхности $V_1(y) = 0$, которая не содержит целые траектории. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} H_0y(t) = 0$.

Рассмотрим второе уравнение из (30). Если матрица $\overline{A}_4$ порядка $(n-m)\times n-m$ – гурвицева, то при $\lim\limits_{t\to\infty} H_0y(t) = 0$, предел $\lim\limits_{t\to\infty} H_1y(t) = 0$. Так как $y(t) = (H_0y(t), H_1y(t))$, $t \in I$, то $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$, $\forall\varphi$, $\varphi \in \Phi_0$. Теорема доказана.

Следует отметить, что матрицы τ_1, N_1, N_2, $\overline{S}$ обеспечивают выполнение условий $R_1 = R_1^* \geq 0$, $\Gamma_1 = \Gamma_1^*$, $T = \frac{1}{2}(W_1 + W_1^*) \geq 0$. Как следует из теоремы 6, проблема Айзермана имеет решение. Следовательно, теорема 6 дает необходимое и достаточное условия абсолютной устойчивости, а матрицы N_1, N_2 расширяют области абсолютной устойчивости в пространстве параметров.

Для многомерных регулируемых систем с ограниченными нелинейностями несобственный интеграл $I_1 + I_2 < \infty$ без каких-либо дополнительных требовании на значения конструктивных параметров системы.

4 Результаты и обсуждение

Создан новый метод исследования абсолютной устойчивости положения равновесия многомерных регулируемых систем с ограниченными нелинейностями но основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы.

Предлагаемый метод позволяет существенно расширить область абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы, нежели известные результаты и в ряде случаев можно получить необходимое и достаточное условия абсолютной устойчивости.

Выделен класс многомерных нелинейных регулируемых систем, для которого проблема Айзермана имеет решение. Для данного класса регулируемых систем получены необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости.

Список литературы

[1] *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. - Издательство АН СССР, 1963. – 240 с.

[2] *Лурье А.И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. – М.: Гостехиздат, 1951. – 216 с.

[3] *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. – М.: Наука, 1970. – 453 с.

[4] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[5] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. - 1969.- № 5. С.- 38-48.

[6] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости системы управления с несколькими нелинейными элементами // АН СССР. Автоматика и телемеханика. - 1970. - № 12. С. - 83-94.

[7] *Айзерман М.А.* Об одной проблеме, касающейся устойчивости в "большом"динамических систем // УМН. - 1949. - Т. 4, № 4. - С. - 186-188.

[8] *Kalman R.E.* Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // Transactions of ASME. - 1957. - Vol. 79,3. PP. 553-556.

[9] *Плисс В.А.* О проблеме Айзермана для случая системы трех дифференциальных уравнений. - 1958. - Докл. АН СССР, 3:121.

[10] *Айсагалиев С.А.* К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем // Дифференциальные уравнения. – Минск-Москва. - 1994. - Т. 30, № 5. - С. - 748-757.

[11] *Айсагалиев С.А., Айпанов Ш.А.* К теории глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем // Дифференциальные уравнения. Москва-Минск, МГУ. 8:30 (1999). С. 3–11.

[12] *Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N.* Certain problems of Synchronization theory // Journal Inverse Ill Posed Problems. -2013. - № 21. – PP. 159-175.

[13] *Айсагалиев С.А.* Проблема Айзермана в теории абсолютной устойчивости регулируемых систем // Математический сборник. - ИМРАН. - 2018. - Т. 209, № 6. - С. - 3–24.

[14] *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.

References

[1] Aizerman M.A., Gantmaher F.R. *Absolyutnaya ustojchivost' reguliruemyh sistem* [Absolute stability of regulated systems], (Izdatelstvo AN SSSR, 1963) : 240.

[2] *Lure A.I. Nekotoryie nelineynyie zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovaniya* [Some nonlinear problems in the theory of automatic control], (M.: Gostehizdat, 1951) : 216.

[3] *Popov V.M. Giperustoychivost avtomaticheskih sistem* [Hyperstability of automatic systems], (M.: Nauka, 1970) : 453.

[4] *Gelig A.H., Leonov G.A., Yakubovich V.A. Ustoychivost nelineynyih sistem s needinstvennyim sostoyaniem ravnovesiya* [Stability of nonlinear systems with a non-unique equilibrium state], (M.: Nauka, 1978) : 400.

[5] *Aysagaliev S.A. Ob opredelenii oblasti absolyutnoy ustoychivosti vyinuzhdennyih dvizheniy v nelineynyih sistemah* [On the determination of the region of absolute stability of forced motions in nonlinear systems], (Izv. AN SSSR. Tehnicheskaya kibernetika, 1969) : 38-48.

[6] *Aysagaliev S.A. Ob opredelenii oblasti absolyutnoy ustoychivosti sistemyi upravleniya s neskolkimi nelineynyimi elementami* [Determining the region of absolute stability of a control system with several nonlinear elements], (AN SSSR. Avtomatika i telemehanika, 1970) : 83-94.

[7] *Ayzerman M.A. Ob odnoy probleme, kasayuscheysya ustoychivosti v "bolshom"dinamicheskih sistem* [On one problem concerning stability in the "large" dynamic systems], (UMN, T. 4. V 4, 1949) : 186-188.

[8] *Kalman R.E. Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems* (Transactions of ASME, Vol. 79.3., 1957) : 553-556.

[9] *Pliss V.A. O probleme Aizermana dlya sluchaya sistemyi treh differentsialnyih uravneniy* [On the problem of Aizerman for the case of a system of three differential equations], (Dokl. AN SSSR, 3:121, 1958).

[10] *Aysagaliev S.A. K teorii absolyutnoy ustoychivosti reguliruemyih sistem* [To the theory of absolute stability of regulated systems], (Differentsialnyie uravneniya, Minsk-Moskva, T. 30. V 5, 1994) : 748-757.

[11] *Aisagaliev S.A., Aipanov Sh.A. K teorii globalnoy asimptoticheskoy ustoychivosti fazovyih sistem* [To the theory of global asymptotic stability of phase systems], (Differentsialnyie uravneniya, Vol. 8, No 30, 1999) : 3–11.

[12] *Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N. Certain problems of Synchronization theory* (Journal Inverse Ill Posed Problems, 2013) : 159-175.

[13] *Aysagaliev S.A. Problema Aizermana v teorii absolyutnoy ustoychivosti reguliruemyih sistem* [The problem of Aizerman in the theory of absolute stability of regulated systems], (Matematicheskiy sbornik, IMRAN, T. 209, V 6, 2018) : 3–24.

[14] *Krasovskiy N.N. Nekotoryie zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya* [Some problems of the theory of stability of motion], (M.: Fizmatgiz, 1959) : 211.