МРНТИ 27.31.21

Бездисперсионный предел уравнения Ма

Есмаханова К.Р., Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан, E-mail: yesmakhanovakr@gmail.com
Мырзакулова Ж.Р., Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан, E-mail: zhrmyrzakulova@gmail.com

В настоящее время возрос интерес к исследованию солитонов, которые применяются во многих фундаментальных теориях, таких как математика, физика, и другие. Солитоном называют структурно устойчивую уединенную волну, распространяющуюся в нелинейной среде, которая при столкновении друг с другом сохраняет свою структуру. В основе теории солитонов лежат нелинейные интегрируемые уравнения. Основополагающим математическим механизмом для решения нелинейных интегрируемых уравнений является метод обратной задачи рассеяния. Данный метод устанавливает связь между нелинейным интегрируемым уравнением и линейной системой. Бездисперсионные интегрируемые уравнения являются одним из новых разделов теории интегрируемых уравнений. Они приобрели значительный интерес благодаря обширному применению в различных приложениях естествознания. В данной работе исследовано одно из обобщений известного из теории солитонов уранение Ландау-Лифшица называемое уравнением Ма. Уравнение Ландау - Лифшица является геометрическим эквивалентом нелинейного уравнения Шрёдингера, также выполняется калибровочная эквивалентность между ними. Нелинейные уравнения Ма описывают резонансное взаимодействие коротких и длинных волн в плазме. Также найдено бездисперсионное уравнение Ма и для него построено представление Лакса, которое доказывает его интегрируемость.
Ключевые слова: интегрируемые уравнения, бездисперсионный предел, уравнение Ма, предсталение Лакса.

Ма теңдеуiнiң дисперсиясыз шегi

Есмаханова Қ..Р., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетi, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан, E-mail: kryesmakhanova@gmail.com
Мырзакулова Ж.Р., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетi, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан, E-mail: zhrmyrzakulova@gmail.com

Қазiргi уақытта математика, физика және тағы сол сияқты көптеген iргелi теорияларда қолданылатын солитондарды зерттеуде қызығушылығы артты. Солитондар бiр-бiрiмен соқтығысқан кезде құрылымын сақтайтын, сызықты емес ортада таралатын, құрылымдық тұрақты жекеленген толқын деп аталады. Солитондардың теориясы сызықтық интегралданатын теңдеулерге негiзделген. Сызықты интегралданатын теңдеулердi шешудiң iргелi математикалың механизмi - керi шашырау әдiсi. Бұл әдiс сызықтық жүйемен сызықты емес интегралданатын теңдеудiң арасындағы байланысты орнатады. Дисперсиясыз интегралданатын теңдеулер интегралданатын теңдеулер теориясының жаңа бөлiмдерiнiң бiрi болып табылады. Олар жаратылыстану ғылымының түрлi қолданбаларында кеңiнен қолданылуына байланысты үлкен қызығушылыққа ие болды. Осы мақалада солитондар теориясында белгiлi Ландау-Лифшиц теңдеуiнiң жалпыламасы болатын Ма теңдеуiн зерттедiк. Ландау - Лифшиц теңдеуi сызықтык емес Шредингер теңдеуiнiң геометриялық эквивалентi болып табылады және олардың арасында калибрлiк эквиваленттiлiк бар. Ма теңдеуi плазмадағы қысқа және ұзын толқындардың өзара әрекеттесуiн сипаттайды. Сонымен қатар, дисперсиясыз Ма теңдеуi табылды және оның интегралдануын дәлелдейтiн Лакс жұбы құрылды.
Түйiн сөздер: интегралданатын теңдеулер, дисперсиясыз шектер, Ма теңдеуi, Лакс жұбы.

Dispersionless Limits of Ma Equations

Yesmakhanova K.R., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan,
E-mail: kryesmakhanova@gmail.com
Myrzakulova Zh.R., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan,
E-mail: zhrmyrzakulova@gmail.com

At present, there is a great interest in the study of solitons, which are used in many fundamental theories, such as mathematics, physics, and others. Solitons are called a structurally stable solitary wave propagating in a nonlinear medium, which retains its structure when colliding with each other. The theory of solitons is based on nonlinear integrable equations. The fundamental mathematical mechanism for solving nonlinear integrable equations is the inverse scattering method. This method establishes a connection between a nonlinear integrable equation with a linear system. Dispersionless integrable equations are one of the new sections of the theory of integrable equations. They gained considerable interest due to their extensive use in various applications of natural science. In this paper, we investigated one of the generalizations of the Landau-Lifshitz equation known from soliton theory, which is called the Ma equation. The Landau – Lifshitz equation is the geometric equivalent of the nonlinear Schrödinger equation, and there is also a gauge equivalence between them. The nonlinear equations of Ma describe the resonant interaction of short and long waves in a plasma. Also, the dispersionless Ma equation was found and a Lax representation was constructed for it, which proves its integrability.
Key words: dispersionless limit, integrable equation, Ma equation, Lax representation.

1 Введение

В 1965 году американские физики М. Крускал и Н. Забусски вели понятие солитона (уединенной волны). Универсальность и множество приложений при объяснений различных процессов в нелинейных окружениях привели к широкому распространению понятия солитонов в современной науке. Работы К. С. Гарднера, Дж. М. Грина, М. Д. Крускала и Р. М. Миуры по исследованию нелинейных уравнений в частных производных привели к открытию метода обратной задачи рассеяния. Он впервые был применен к уравнению Кортевега — де Фриза. Описание данного вопроса многогранно и обстоятельно изложено в книгах [1-6]. Одним из значимых разделов нелинейных интегрируемых уравнений являются бездисперсионные уравнения. В работах [7-18] был введен новый систематический метод для построения бездисперсионных уравнений с использованием представления Лакса. Исследуемое (1+1)-мерное нелинейное уравнение Ма (НУМ) имеет следующий вид [19]

$$iq_t + q_{xx} - \omega q = 0, \tag{1}$$
$$\omega_t + \delta\left(|q|^2\right)_x = 0, \tag{2}$$

где $q = q(x,t)$, $\omega = \omega(x,t)$ комплексные функции $\delta = \pm 1$. Систему уравнений (1) и (2) можно переписать в терминах $E(x,t)$ и $n(x,t)$

$$iE_t - 2E_{xx} + 2nE = 0, \tag{3}$$
$$n_t + \left(|E|^2\right)_x = 0, \tag{4}$$

где $E = E(x,t)$ и $n = n(x,t)$-комплекснозначные функций. В дальнейшем будем работать с системой уранений (3) и (4). Уравнение Ма является вполне интегрируемым с помощью метода обратной задачи рассеяния. Как известно, если нелинейное уравнение интегрируемо то оно имеет представление Лакса (ПЛ). Для уравнений (3) и (4) ПЛ выглядит следующим образом:

$$\Phi_x(x,t,\lambda) = U(x,t,\lambda)\,\Phi(x,t,\lambda), \tag{5}$$
$$\Phi_t(x,t,\lambda) = V(x,t,\lambda)\,\Phi(x,t,\lambda). \tag{6}$$

где λ-собственное значение и Φ- собственная функция соответствующая собственному значению. Здесь матричные функции U и V имеют вид:

$$U(x,t,\lambda) = i\lambda\Sigma + Q, \tag{7}$$
$$V(x,t,\lambda) = 2i\lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + V_0 = 2i\lambda^2\Sigma^2 + \lambda V_1 + V_0, \tag{8}$$

где записаны следующие формы

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & p & in \\ 0 & 0 & \bar{p} \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2p & 0 \\ 0 & 0 & -2\bar{p} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2ip_x & -2i\,|p|^2 \\ -2\bar{p} & 0 & 2i\bar{p}_x \\ 0 & -2p & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

2 Обзор литературы

С конца 20-го века исследованию теории солитонов и нелинейных интегрируемых систем посвящено много работ, так как они активно развиваются. Начало теории было положено в работах М. Абловиц, Х. Сигур [1], Дж.Л. Лэм [2], А. Ньюэлл [3], В.Е. Захаров, А.Б. Шабат [4], [5] и Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев [6] и других ученных в области математики и физики. Их работы, в основном, посвящены фундаментальным понятиям теории солитонов, нелинейных интегрируемых уравнений и посвящены методам их решения, таким как метод обратной задачи рассеяния. Труды по исследованию бездисперсионных пределов нелинейных интегрируемых систем появились более позднее. В настоящее время особо интенсивные исследования проводятся зарубежными ученными (Л. Богданов, В.Г. Конопельченко, А. Моро, Дж. С. Брунелли и др) [7-18], а так же группой казахстанских ученых Р. Мырзакуловым и его учениками, основные результаты которых отражены в [20-25]. В работах Р. Мырзакулова были предложены новые интегрируемые бездисперсионные уравнения с самосогласованными источниками и их представления Лакса. Уравнение ферромагнетика Гейзенберга получается путемнахождения выражения его интегрируемости. В частности, была изучена геометрия этих уравнений. Данная работа является продолжением научных исследований расмотренных в [24–25].

3 Материал и методы

3.1 Бездисперсионный предел однокомпонентного (1+1)-мерного нелинейного уравнения Ма

Перейдем к нахождению бездисперсионного предела исследуемого уравнения. Для этого произведем масштабное преобразование по переменным x и t [20-25], то есть:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \epsilon \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \to \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \tag{10}$$

ϵ-масштабный параметр. Если перейдем к непрерывному пределу $\lim\limits_{\epsilon \to 0}$, то система уравнений (3) и (4) примед вид

$$\begin{aligned} i\epsilon E_t - 2\epsilon^2 E_{xx} + 2nE &= 0, &(11)\\ \epsilon n_t + \epsilon^2 \left(|E|^2\right)_x &= 0. &(12)\end{aligned}$$

Теперь, произведем замену переменных в уравнениях (11) и (12) в таком виде

$$E = 2\sqrt{u} e^{\frac{i}{\epsilon}\partial_x^{-1} v}, \tag{13}$$

где $u(x,t)$ и $v(x,t)$-вещественнозначные функции, также $|E|^2 = u$. Далее, нужно вычислить все члены нелинейной системы (11) и (12). Продифференцируем уравнение (13) сначала по переменной x

$$\begin{aligned} E_x &= 2\left(\frac{u_x}{2\sqrt{u}} + \frac{i}{\epsilon} v\sqrt{u}\right) e^{\frac{i}{\epsilon}\partial_x^{-1} v}, &(14)\\ E_{xx} &= \left\{\left[\left(\frac{u_x}{2\sqrt{u}}\right)_x - \frac{2}{\epsilon^2} v^2\sqrt{u}\right] + \left[\left(v\sqrt{u}\right)_x + \frac{u_x v}{2\sqrt{u}}\right]\right\} e^{\frac{i}{\epsilon}\partial_x^{-1} v}. &(15)\end{aligned}$$

Затем по переменной t

$$E_t = 2\left(\frac{u_t}{2\sqrt{u}} + \frac{i}{\epsilon}\partial^{-1} v\sqrt{u}\right) e^{\frac{i}{\epsilon}\partial_x^{-1} v}. \tag{16}$$

Теперь, подставляя (14)-(16) в уравнения (11) и (12) получаем

$$2i\epsilon\left(\frac{u_t}{2\sqrt{u}} + \frac{i}{\epsilon}\sqrt{u}\partial^{-1} v_t\right) + 4v^2\sqrt{u} - 4i\epsilon\left[v_x\sqrt{u} + \frac{u_x v}{2\sqrt{u}} + \frac{u_x v}{2\sqrt{u}}\right] + 4n\sqrt{u} = 0. \tag{17}$$

Предел при $\epsilon \to 0$ полученного уравнения называется бездисперсионным пределом, поскольку дисперсионный член ϵ^2 обращается в нуль. Затем, разложим последнее уравнение по степеням ϵ

$$\begin{aligned} \epsilon^1 : \frac{iu_t}{2\sqrt{u}} - 4i\left(v_x\sqrt{u} + \frac{u_x v}{2\sqrt{u}} + \frac{u v_x}{2\sqrt{u}}\right) &= 0, &(18)\\ u_t - 4\left(u v_x + u_x v\right) &= 0, &(19)\\ \epsilon^0 : -2\sqrt{u}\partial^{-1} v_t + 4v^2\sqrt{u} + 4n\sqrt{u} &= 0, &(20)\\ \partial^{-1}(v_t) - 2v^2 - 2n &= 0. &(21)\end{aligned}$$

Путем проведения некоторых элементарных вычеслений, получаем искомое бездисперсионное уравнение Ма

$$v_t - 2(v^2+n)_x = 0, \tag{22}$$
$$u_t - 4(uv)_x = 0, \tag{23}$$
$$n_t + 4u_x = 0. \tag{24}$$

3.2 Представление Лакса бездисперсионного (1+1)-мерного нелинейного уравнения Ма

Для того, чтобы построить ПЛ для бездисперсионного уравнения Ма (22)-(24), рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений по x

$$\Psi_{1x} = i\lambda\Psi_1 + \frac{E}{2}\Psi_2 + in\Psi_3, \tag{25}$$
$$\Psi_{2x} = \frac{\bar{E}}{2}\Psi_3, \tag{26}$$
$$\Psi_{3x} = -i\Psi_1 - i\lambda\Psi_3, \tag{27}$$

и соответственно по t

$$\Psi_{1t} = 2i\lambda^2\Psi_1 + \lambda E\Psi_2 - iE_x\Psi_2 - \frac{i}{2}|E|^2\Psi_3, \tag{28}$$
$$\Psi_{2t} = -\bar{E}\Psi_1 - \lambda\bar{E}\Psi_3 + iE_x\Psi_3, \tag{29}$$
$$\Psi_{3t} = 2i\lambda^2\Psi_3 - E\Psi_2. \tag{30}$$

Введем функцию Ψ_i $(i = 1,2,3)$ в следующем виде

$$\Psi_1 = \xi_1 e^{\frac{i}{\epsilon}}\left(\chi - \lambda x\right), \tag{31}$$
$$\Psi_2 = \xi_2 e^{\frac{i}{\epsilon}}\left(\chi - \lambda x - \partial_x^{-1}v\right), \tag{32}$$
$$\Psi_3 = \xi_1 e^{\frac{i}{\epsilon}}\left(\chi - \lambda x\right), \tag{33}$$

где χ, $u(x,t)$, $v(x,t)$ и ξ_i-вещественные функции, так же функция E имеет вид (13). Далее, применив масштабное преобразование (10) получаем эквивалентное соотношение дифференциальным системам (25)-(27) и (28)-(30), соответственно

$$\epsilon\Psi_{1x} = \left[i\lambda\xi_1 + \sqrt{u}\xi_2 + in\xi_3\right] e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi-\lambda x)}, \tag{34}$$
$$\epsilon\Psi_{2x} = \sqrt{u}\xi_3 e^{\frac{i}{\epsilon}\left(\chi-\lambda x-\partial_x^{-1}v\right)}, \tag{35}$$
$$\epsilon\Psi_{3x} = \left[-i\lambda\xi_3 - i\xi_1\right] e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi-\lambda x)}, \tag{36}$$

и

$$\epsilon\Psi_{1t} = 2\left[i\lambda^2\xi_1 + \lambda\sqrt{u}\xi_2 - i\left(\frac{u_x}{2\sqrt{u}}\xi + \frac{i\sqrt{u}v}{\epsilon}\right)\xi_2 - iu\xi_3\right] e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi-\lambda x)}, \tag{37}$$
$$\epsilon\Psi_{2t} = 2\left[-\sqrt{u}\xi_1 + i\left(\frac{u_x}{2\sqrt{u}} + \frac{i\sqrt{u}v}{\epsilon}\right)\xi_3 - \lambda\sqrt{u}\xi_3\right] e^{\frac{i}{\epsilon}\left(\chi-\lambda x-\partial_x^{-1}v\right)}, \tag{38}$$
$$\epsilon\Psi_{3t} = 2\left[-\sqrt{u}\xi_2 + i\lambda^2\xi_3\right] e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi-\lambda x)}. \tag{39}$$

Затем, получаем производные по x из уравнения (31)-(33)

$$\Psi_{1x} = \left[\xi_{1x} + \frac{i}{\epsilon}\xi_1\left(\chi_x - \lambda\right)\right] e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi-\lambda x)}, \tag{40}$$

$$\Psi_{2x} = \left[\xi_{2x} + \frac{i}{\epsilon}\xi_2\left(\chi_x - \lambda - v\right)\right] e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi-\lambda x-\partial_x^{-1}v)}, \tag{41}$$

$$\Psi_{3x} = \left[\xi_{3x} + \frac{i}{\epsilon}\xi_3\left(\chi_x - \lambda\right)\right] e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi-\lambda x)}. \tag{42}$$

и по переменной t

$$\Psi_{1t} = \left[\xi_{1t} + \frac{i}{\epsilon}\xi_1\chi_t\right] e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi-\lambda x)}, \tag{43}$$

$$\Psi_{2t} = \left[\xi_{2t} + \frac{i}{\epsilon}\xi_2\left(\chi_t - \gamma\right)\right] e^{\frac{i}{\epsilon}\left(\chi-\lambda x-\partial_x^{-1}v\right)}, \tag{44}$$

$$\Psi_{3t} = \left[\xi_{3t} + \frac{i}{\epsilon}\xi_3\chi_t\right] e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi-\lambda x)}. \tag{45}$$

Приравневаем выражения (34)-(36) с (40)-(42)

$$\epsilon\left[\xi_{1x} + \frac{i}{\epsilon}\xi_1\left(\chi_x - \lambda\right)\right] = i\lambda\xi_1 + \sqrt{u}\xi_2 + in\xi_3, \tag{46}$$

$$\epsilon\left[\xi_{2x} + \frac{i}{\epsilon}\xi_2\left(\chi_x - \lambda - v\right)\right] = \sqrt{u}\xi_3, \tag{47}$$

$$\epsilon\left[\xi_{3x} + \frac{i}{\epsilon}\xi_3\left(\chi_x - \lambda\right)\right] = -i\xi_1 - i\lambda\xi_3. \tag{48}$$

Перейдя к пределу при $\epsilon \to 0$, а так же разложив по различным степеням ϵ систему (46)-(48) получим

$$i\xi_1\left(\chi_x - \lambda\right) = i\lambda\xi_1 + \sqrt{u}\xi_2 + in\xi_3, \tag{49}$$

$$i\xi_2\left(\chi_x - \lambda - v\right) = \sqrt{u}\xi_3, \tag{50}$$

$$i\xi_3\left(\chi_x - \lambda\right) = -i\lambda\xi_3 - i\xi_1. \tag{51}$$

Уравнения (49)-(51) могут быть записаны более упращено

$$i\xi_1\left(\chi_x - 2\lambda\right) = \sqrt{u}\xi_2 + in\xi_3, \tag{52}$$

$$i\xi_2\left(\chi_x - \lambda - v\right) = \sqrt{u}\xi_3, \tag{53}$$

$$i\xi_3\chi_x = -i\xi_1. \tag{54}$$

Отсюда находим ξ_i

$$\xi_1 = -\chi_x\xi_3, \tag{55}$$

$$\xi_2 = -\frac{i\sqrt{u}}{\chi_x - \lambda - v} \tag{56}$$

и для функций u имеем

$$u = \left[\chi_x\left(\chi_x - 2\lambda\right) + n\right]\left(\chi_x - \lambda - v\right). \tag{57}$$

Подставляя найденное уравнение в уравнение (53) получим

$$\chi_x^2 - 2\lambda\chi_x + n \;\; = \;\; \frac{u}{\chi_x - \lambda - v}.$$

Если $\chi_x = p$, то это уравнение сводится к виду

$$p^2 - 2\lambda p + n \;\; = \;\; \frac{u}{p - \lambda - v}. \tag{58}$$

Предпологая что $p - \lambda = f$, следовательно $p_t = f_t$, окончательно получим уравнение в терминах функций f

$$f^2 + n - \lambda^2 = \frac{u}{f - v} \tag{59}$$

или

$$f^2 - \frac{u}{f - v} + n - \lambda^2 = 0, \tag{60}$$

где $p - \lambda = f$ и $p_t = f_t$. Тем самым, получаем часть ПЛ. Теперь перейдем ко второй временной части ПЛ. Аналогично x, приравнивая уравнения (37)-(39) к уравнениям (43)-(45) имеем

$$i\chi_t\xi_1 \;\; = \;\; 2i\lambda^2\xi_1 + 2\lambda\sqrt{u}\xi_2 + 2\sqrt{u}v\xi_2 - 2iu\xi_3 \tag{61}$$

Подставляя выражения (55) и (56) в найденое уравнение (61) находим

$$\left(2\lambda^2 - \chi_t\right)\chi_x + \frac{2u\left(\lambda + v\right)}{\chi_x - \lambda - v} + 2u \;\; = \;\; 0. \tag{62}$$

После элементарных преобразований и учитывая (57) последнее выражение примет следующии вид

$$\chi_t \;\; = \;\; 2\left[\lambda^2 + \chi_x^2 - 2\lambda\chi_x + n\right]. \tag{63}$$

Для получения уравнения в терминах функции f, продифференцируем уравнение по переменной x

$$\chi_{tx} \;\; = \;\; \left(2\left[\lambda^2 + \chi_x^2 - 2\lambda\chi_x + n\right]\right)_x. \tag{64}$$

Замена переменных в виде $\chi_x = p$ дает

$$p_t = \left[p^2 + \lambda^2 - -2\lambda p + n\right]_x. \tag{65}$$

Затем, используя обозначение $p - \lambda = f$, окончательно получим вторую часть представление Лакса

$$f_t = 2\left[f^2 + n\right]_x. \tag{66}$$

Итак, представлением Лакса для бездисперсионного уравнение Ма является (58), (65) или (60), (66).

4 Результаты и обсуждение

В настоящей работе выведено бездисперсионное (1+1)-мерное уравнение Ма. А также интегрируемость бездисперсионного уравнения Ма была установлена путем построения его пары Лакса. Полученный результат используется для нахождения решения вышеупомянутого уранения и дальнейшего исследования бездисперсионных уравнений.

5 Заключение

Данная статья является продолжением [24-25]. В этих работах, в качестве примеров, были представлены хорошо известные бездисперсионные уравнения, такие как бездисперсионные уравнения Кортевега де Фриза, Шрёдингера, Дэви - Стюартсона и другие. Так же были подробно изученны некоторые новые бездисперсионные системы. В некоторых случаях были выведены представления Лакса. Которые в свою очередь доказывают интегрируемость соответствующих уранений. В будущих работах запланировано нахождение решений этих исследуемых уравнений.

6 Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РК в рамках грантов 0118RK00935 и 0118RK00693.

Список литературы

[1] Абловиц М. и Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи //-М.:Мир - 1987. - С.450.

[2] Лэм Дж.Л. Введение в теорию солитонов // -М.:Мир - 1983. - С.294.

[3] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике // -М.:Мир - 1989. - С.324.

[4] Захаров В.Е. и Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния I // Функ.анализ и его прил. - 1974. - Т.8, №3, - С.226-235.

[5] Захаров В.Е. и Шабат А.Б. Интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния II // Функ.анализ и его прил. - 1979. - Т.13, №3, - С.98.

[6] Takhtajan L.A. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method // Phys. Lett. - 1977. - Vol.69A, №2b, - P.235-237.

[7] Konopelchenko B.G. Quasiclassical generalized Weierstrass representation and dispersionless DS equation // Journal of Physics A. - 2007. - Vol.40, №46, - P.995-1005.

[8] Brunelli J.C. Dispersionless Limit of Integrable Models // Braz.J.Phys. - 2000. - Vol.30. - P.455-468.

[9] Blaszak M. and Szablikowski B.M. From dispersionless to soliton systems via Weyl-Moyal like deformations // J. Phys. A: Math. Gen. - 2003. - Vol.36. - P.12181.

[10] Blaszak M., Szablikowski B.M. Classical R-matrix theory of dispersionless system:I.(1+1)-dimension theory // J. Phys. A: Math. Gen. - 2002. - Vol.35. - P.10325.

[11] Ferapontov E.V., Moro A.and Novikov V.S. Integrable equations in 2+1-dimensions: deformations of dispersionless limits //J. Phys. A: Math. Theor. - 2009. - Vol.42, - P. 345205.

[12] Konno K., Oono H. New coupled integrable dispersionless equation // J. Phys. Soc. Jpn. - 1993. - Vol.63, №5, - P.377-378.

[13] Konno K. Integrable coupled dispersionless equations // Applicable Analysis.In. J - 1995. - Vol.57, №1, - P.209-220.

[14] Zhaqilao, Zhao Yi-Long and Li Zhi-Bin N-solution of a coupled integrable dispersionless equation //CH. Phys. Soc and IOP Publishing Ltd. - 2009. - Vol.18, №5, - P.1780- 1786.

[15] Yi G. On the dispersionless Davey-Stewartson system: Hamiltonian vector fields Lax pair and relevant nonlinear Riemann-Hilbert problem for dDS-II system // [arXiv:1809.04225].

[16] Yi G. On the dispersionless Davey-Stewartson hierarchy: Zakharov- Shabat equations, twistor structure and Lax- Sato formalism // [arXiv:1812.10220].

[17] Shen S., Feng B.F. and Ohta Y. From the real and complex coupled dispersionless equations to the real and complex short pulse equations // Stud. Appl. Math. - 2016. - Vol.136, - 6488

[18] Szablikowski B.M., Blaszak M. Meromorphic Lax representation of (1+1) -dimensional multi-Hamiltonnian dispersionless systems // J. Math. Phys.: - 2006. - Vol.47. - P.092701.

[19] Маханьков В.Г., Мырзакулов Р. σ-модельные представление системы уравнений Яджимы-Ойкавы // Сообщ. ОИЯИ. Дубна. - 1984. - P.5, №3. - С.1-6.

[20] Myrzakulov A. and Myrzakulov R. Integrable geometric flows of interacting curves/surfaces, multilayer spin systems and the vector nonlinear Schrodinger equation //International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. - 2016. - Vol.13, №1, - P.1550134.

[21] Myrzakulov R., Martina L., Kozhamkulov T.A., Myrzakul Kur. Integrable Heisenberg ferromagnets and soliton geometry of curves and surfaces // Nonlinear Physics. London - 2003. - P.248- 253.

[22] Bekova G., Nugmanova G., Shaikhova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Coupled Dispersionless and Generalized Heisenberg Ferromagnet Equations with Self-Consistent Sources: Geometry and Equivalence // [arXiv:1901.01470].

[23] Myrzakulova Z., Nugmanova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Dispersionless Limits of Integrable Generalized Heisenberg Ferromagnet Equations // [arXiv:1903.09195].

[24] Myrzakulova Z., Myrzakul A., Nugmanova G.,Myrzakulov R. Notes on Integrable Motion of Two Interacting Curves and Two-layer Generalized Heisenberg Ferromagnet Equations // [DOI:10.13140/RG.2.2.35045.04320].

[25] Myrzakulova Z., Myrzakulov R. Dispersionless limits of integrable magnetic equations // [DOI:10.13140/RG.2.2.25820.64649].

References

[1] Ablovits M. and Sigur H., "Solitony i metod obratnoi zadachi [Solitons and the inverse problem method]", M.: Mir (1983): 450.

[2] Lam J.L., "Vvedenie v teoriu solitonov [Introduction to the theory of solitons]", M .: Mir (1983): 294.

[3] Newell A., "Solitoni v matematike i fizike [Solitons in mathematics and physics]", M .: Mir (1989): 324.

[4] Zakharov V.E. and Shabat, A.B., "Shema integrirovaniya nelineinyh uravnenii matematicheskoi fiziki metodom obratnoy zadachi rasseyaniya [The integration scheme of nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem I]", Funk.analiz. and its adj. vol. 8, no 3 (1974): 226-235.

[5] Zakharov V.E. and Shabat, A.B., "Integrirovaniya nelineinyh evaliucionih uravnenii matematicheskoi fiziki metodom obratnoy zadachi rasseyaniya [The integration scheme of nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem II]", Funk.analiz. and its adj. vol. 13, no 3 (1979): 98.

[6] Takhtajan L.A., "Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method ", Phys. Lett. 69A, no 2b (1977): 235-237.

[7] Konopelchenko B.G., "Quasiclassical generalized Weierstrass representation and dispersionless DS equation", Journal of Physics A. vol. 40, no 46 (2007). 995-1005.

[8] Brunelli J.C., "Dispersionless Limit of Integrable Models", Braz.J.Phys. vol. 30 (2000): 455-468.

[9] Blaszak M., Szablikowski B.M., "From dispersionless to soliton systems via Weyl-Moyal like deformations", J. Phys. A: Math. Gen. vol. 36 (2003): 12181.

[10] Blaszak M., Szablikowski B.M., "Classical R-matrix theory of dispersionless system:I.(1+1)-dimension theory" , Phys. A: Math. Gen. vol. 35 (2002): 10325.

[11] Ferapontov E.V., Moro A.and Novikov V.S., "Integrable equations in 2+1-dimensions: deformations of dispersionless limits " , Journal of Physics A. vol. 40 (2007). 345205.

[12] Konno K., Oono H., "New coupled integrable dispersionless equation" , J. Phys. Soc. Jpn. vol. 63, no 5 (1993). 377-378.

[13] Konno K., "Integrable coupled dispersionless equations" , Applicable Analysis.In. J vol. 57, no 1 (1995). 209-220.

[14] Zhaqilao, Zhao Yi-Long and Li Zhi-Bin, "N-solution of a coupled integrable dispersionless equation" , CH. Phys. Soc and IOP Publishing Ltd. vol. 18, no 5 (2009). 1780-1786.

[15] Yi G., "On the dispersionless Davey-Stewartson system: Hamiltonian vector fields Lax pair and relevant nonlinear Riemann-Hilbert problem for dDS-II system" , [arXiv:1809.04225].

[16] Yi G., "On the dispersionless Davey-Stewartson hierarchy: Zakharov- Shabat equations, twistor structure and Lax- Sato formalism " , [arXiv:1812.10220].

[17] Shen S., Feng B.F. and Ohta Y., "From the real and complex coupled dispersionless equations to the real and complex short pulse equations " , Stud. Appl. Math. vol. 136 (2016). 6488.

[18] Szablikowski B.M., Blaszak M., "Meromorphic Lax representation of (1+1) -dimensional multi-Hamiltonnian dispersionless systems " , J. Math. Phys. vol. 47 (2006). 092701.

[19] Makhankov V.G., Myrzakulov R., "σ-modelnie predctavlenie systemy uravneniy Yidjimi- Oikavi [$sigma$ -model representation of the Yadjima-Oikawa system of equations]" , Soobshch. JINR. Dubna. vol. 5, no 3 (1974): 1-6.

[20] Myrzakulov A. and Myrzakulov R., "Integrable geometric flows of interacting curves/surfaces, multilayer spin systems and the vector nonlinear Schrodinger equation " , International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. vol. 13, no 1 (2016). 1550134.

[21] Myrzakulov R., Martina L., Kozhamkulov T.A., Myrzakul Kur., "Integrable Heisenberg ferromagnets and soliton geometry of curves and surfaces" , Nonlinear Physics. London. vol. 1 (2003). 248-253.

[22] Bekova G., Nugmanova G., Shaikhova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R., "Coupled Dispersionless and Generalized Heisenberg Ferromagnet Equations with Self-Consistent Sources: Geometry and Equivalence " , *[arXiv:1901.01470]*.

[23] Myrzakulova Z., Nugmanova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R., "Dispersionless Limits of Integrable Generalized Heisenberg Ferromagnet Equations , [arXiv:1903.09195]..

[24] Myrzakulova Z., Myrzakul A., Nugmanova G.,Myrzakulov R., "Notes on Integrable Motion of Two Interacting Curves and Two-layer Generalized Heisenberg Ferromagnet Equations" , [DOI:10.13140/RG.2.2.35045.04320].

[25] Myrzakulova Z., Myrzakulov R., "Dispersionless limits of integrable magnetic equations" , [DOI:10.13140/RG.2.2.25820.64649].