УДК 514.765

Н.А. Абиев

Таразский государственный университет им. М.Х. Дулати, Республика Казахстан, г. Тараз
E-mail: abievn@mail.ru

Об операторе Риччи унимодулярных разрешимых метрических алгебр Ли

Определение возможных значений сигнатуры оператора Риччи инвариантных римановых метрик на заданном однородном пространстве является одной из важных задач в теории однородных римановых многообразий. Разными исследователями в данной области получен ряд результатов, наиболее интересные из которых относятся к лево- инвариантным римановым метрикам на группах Ли. В этом случае удобно отождествлять лево-инвариантные векторные поля на заданной группе Ли с элементами алгебры Ли этой группы. Такой подход позволяет переформулировать поставленную задачу и получить ее решение в терминах метрических алгебр Ли. В настоящей статье доказывается, что оператор Риччи унимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли размерности 7, имеющей двухступенно нильпотентную производную алгебру Ли $L_3 \oplus 3L_1$, имеет по крайней мере два отрицательных собственных значения.
Ключевые слова: оператор Риччи, унимодулярные разрешимые алгебры Ли, двухступенно нильпотентные алгебры Ли, метрические алгебры Ли.

N.A. Abiev

On the Ricci operator of unimodular solvable metric Lie algebras

Finding the possible values of the signature of the Ricci operator of invariant Riemannian metrics on a given homogeneous space is one of important problems of homogeneous Riemannian manifolds. Different researchers in this area obtained a number of results the most interesting of which are connected with left-invariant Riemannian metrics on Lie groups. In this case it is convenient to identify left-invariant vector fields on a given Lie group with elements of the Lie algebra of this group. This approach makes it possible to reformulate the problem and obtain its solution in terms of metric Lie algebras. In this paper we prove that the Ricci operator of a 7-dimensional unimodular solvable metric Lie algebras with two-step nilpotent derived Lie algebras $L_3 \oplus 3L_1$ has at least two negative eigenvalues.
Key words: the Ricci operator, unimodular solvable Lie algebras, two-step nilpotent Lie algebras, metric Lie algebras.

Н.А. Абиев

Унимодуляр шешілімді метрикалық Ли алгебраларының Риччи операторы

Берілген біртекті кеңістіктегі инвариантты римандық метриканың Риччи операторының сигнатурасының мүмкін болатын мәндерін анықтау біртекті римандық көпбейнелер теориясының маңызды мәселелерінің бірі болып табылады. Бұл бағытта әр түрлі зерттеушілер тарапынан бірқатар нәтижелер алынған, бұлардың аса маңыздылары Ли группаларындағы сол-инвариантты метрикаларға тиесілі. Осындай жағдайда берілген Ли группасының сол-инвариантты векторлық өрістерін осы группаның Ли алгебрасы элементтерімен парапарландыру ыңғайлы. Мұндай тәсіл қойылған есептің шешімін метрикалық Ли алгебралары терминдерінде шешуге мүмкіндік ашады. Мақалада туындысы екі сатылы нильпотентті $L_3 \oplus 3L_1$ Ли алгебрасы болатын 7 өлшемді унимодуляр шешілімді метрикалық Ли алгебрасының Риччи операторының ең кемінде екі теріс меншікті мәні болатыны дәлелденген.
Түйін сөздер: Риччи операторы, унимодуляр шешілімді Ли алгебралары, екі сатылы нильпотентті Ли алгебралары, метрикалық Ли алгебралары.

Введение

Определение возможных значений сигнатуры оператора Риччи инвариантных римановых метрик является одной из важных задач в теории однородных пространств. Отождествление левоинвариантных векторных полей на заданной группе Ли с элементами алгебры Ли этой группы в ее единичном элементе позволяет решать такую задачу, используя удобный аппарат метрических алгебр Ли. Первой работой в этом направлении является работа Дж. Милнора [13], посвященная случаю, когда размерность метрической алгебры Ли не превышает 3. Аналогичная задача для алгебр Ли размерности 4 впервые решена в работах А.Г. Кремлева и Ю.Г. Никонорова [4], [5]. В работе [5], в частности, доказано, что оператор Риччи произвольной неунимодулярной разрешимой алгебры Ли размерности ≤ 4 имеет не менее 2 отрицательных собственных значений, и была выдвинута **гипотеза** о том, что таким свойством обладает оператор Риччи произвольной неунимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли.

В классе *неунимодулярных* разрешимых метрических алгебр Ли данная гипотеза нашла подтверждение в ряде работ: в работе М.С. Чебарыкова [9], когда размерность производной алгебры не превышает 5; в работе Ю.Г. Никонорова и М.С. Чебарыкова [8], когда алгебра Ли вполне разрешима; в работе [5], когда производная алгебра коммутативна; в работе Н.А. Абиева [1], когда производная алгебра двухступенно нильпотентна и имеет размерность 6.

Следующим естественным шагом является исследование гипотезы в классе *унимодулярных* разрешимых метрических алгебр Ли. Используя результаты [1], [7] и [8], можно доказать следующее утверждение, справедливое в специальном случае разрешимых алгебр Ли в независимости от свойств унимодулярности или неунимодулярности.

Утверждение 1 *Если разрешимая алгебра Ли* $\mathfrak{s}$ *удовлетворяет условиям* $\dim(\mathfrak{s}) = 7$ *и* $\mathfrak{n} := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = L_3 \oplus 3L_1$*, где* L_3 *— трехмерная алгебра Гейзенберга, а* L_1 *— одномерная алгебра Ли, то для произвольного скалярного произведения* Q *на* $\mathfrak{s}$ *оператор Риччи* Ric *метрической алгебры Ли* $(\mathfrak{s}, Q)$ *имеет не менее двух отрицательных собственных значений.*

Следует отметить, что в недавней работе Ю.Г. Никонорова [14] получены наиболее общие результаты, касающиеся разрешимых метрических алгебр Ли произвольной размерности.

Предварительные сведения

Пусть на разрешимой алгебре Ли $\mathfrak{s}$ задано произвольное скалярное произведение Q. Рассмотрим метрические алгебры Ли $(\mathfrak{s}, Q)$ и $(\mathfrak{n}, Q|_{\mathfrak{n}})$, где $\mathfrak{n} := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ – производная алгебра алгебры Ли $\mathfrak{s}$. Применительно к случаю $\dim(\mathfrak{s}) = 7$, $\dim(\mathfrak{n}) = 6$ приведем известные факты из работ [7] и [8], сохраняя принятые в них авторские обозначения. Через M' будем обозначать транспонированную для M матрицу. Пусть $\mathfrak{b}$ — одномерное ортогональное дополнение к $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{s}$ относительно скалярного произведения Q. Пусть векторы $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq 6$, образуют Q-ортонормированный базис в $\mathfrak{n}$. Этот базис всегда можно дополнить до Q-ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_6, f\}$ алгебры Ли $\mathfrak{s}$ так, чтобы для $t := \mathrm{trace}(\mathrm{ad}(f))$ выполнялось одно из альтернативных условий: $t > 0$ в случае неунимодулярности $\mathfrak{s}$ или $t = 0$ в случае унимодулярности $\mathfrak{s}$. Согласно [8] в случае неунимодулярности $\mathfrak{s}$ в качестве такого вектора f выбирают вектор $f := \frac{H}{\|H\|}$, где вектор $H \in \mathfrak{s}$ определяется из условия $Q(H, X) = \mathrm{trace}(\mathrm{ad}(X))$ для всех $X \in \mathfrak{s}$. Тогда $t = \mathrm{trace}(\mathrm{ad}(f)) = \|H\| > 0$. В случае унимодулярности $\mathfrak{s}$ в качестве f берется произвольный единичный вектор из $\mathfrak{b}$. В этом случае $t = \mathrm{trace}(\mathrm{ad}(f)) = 0$ по определению унимодулярности. Известно [7], что $\mathrm{ad}(f)|_{\mathfrak{n}} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$, где $\mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ — алгебра Ли всех дифференцирований алгебры Ли $\mathfrak{n}$. Как вытекает из [8], в базисе $\{e_1, \dots, e_6, f\}$ для операторов присоединенного действия $\mathrm{ad}(f)$ и $\mathrm{ad}(e_i)$ имеют место представления

$$\mathrm{ad}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}(e_i) = \begin{pmatrix} D_i & C_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где A — некоторая матрица размерности 6×6, $D_i = \mathrm{ad}(e_i)|_{\mathfrak{n}}$ в базисе $\{e_1, \dots, e_6\}$, C_i — i–й столбец матрицы A, взятый со знаком минус. Согласно теореме 3 из [7] и предложению 4 из [8] в базисе $\{e_1, \dots, e_6, f\}$ матрица оператора Риччи разрешимой (неунимодулярной или унимодулярной) алгебры Ли $(\mathfrak{s}, Q)$ имеет следующий вид:

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2' & -r \end{pmatrix},$$

где

$$R_1 := \mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}} + \frac{1}{2}[A, A'] - tA^s, \quad R_2 := -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} D_i' C_i, \quad r := \mathrm{trace}(A^s A^s) \geq 0, \tag{1}$$

$\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}}$ — матрица оператора Риччи метрической алгебры Ли $\mathfrak{n}$ в базисе $\{e_1, \dots, e_6\}$, $[A, A'] = AA' - A'A$, $A^s = \frac{1}{2}(A' + A)$, $t = \mathrm{trace}(A)$.

Для нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{n}$ оператор $\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}}$ находится по формуле [2, 3]:

$$\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} D_i' D_i + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{6} D_i D_i'. \tag{2}$$

Приводим известное из работы [8] достаточное условие, гарантирующее существование не менее двух отрицательных собственных значений оператора Ric: Как известно из классификации, предложенной В. В. Морозовым [6] (см. также [12] и [15]), среди шестимерных нильпотентных алгебр Ли ровно семь алгебр являются двухступенно нильпотентными (в таблице 1 приводим список, составленный в [1]). Отметим, что подобные специальные списки двух- и трехступенно нильпотентных алгебр Ли можно встретить также в работах [10] и [16]. В упомянутых работах [6],[12] и [15] соответственно через L_1, I и $A_{1,1}$ обозначена одномерная алгебра Ли. Более подробную информацию о свойствах двухступенно нильпотентных алгебр Ли можно получить, например, в работе [11].

Предложение 1 (Предложение 6 из [8]) *Если $r > 0$ и*

$$\mathrm{trace}(\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}}) - t^2 + \frac{1}{r}\mathrm{trace}(R_2 R_2') < 0, \tag{3}$$

то оператор Ric *имеет не менее двух отрицательных собственных значений.*

Таблица 1

Алгебра Ли $\mathfrak{n}$ в классификации В.В.Морозова	Коммутационные соотношения $\mathfrak{n}$ в каноническом базисе	$\mathfrak{n}$ в обознач-х [15]	$\mathfrak{n}$ в обознач-х [12]
$L_3 \oplus 3L_1$	$[x_1, x_2] = x_3$	$A_{3,1} \oplus 3A_{1,1}$	$L_{3,2} \oplus 3I$
$L_5^1 \oplus L_1$	$[x_1, x_2] = x_3, [x_1, x_4] = x_5$	$A_{5,1} \oplus A_{1,1}$	$L_{5,8} \oplus I$
$L_5^4 \oplus L_1$	$[x_1, x_3] = x_5, [x_2, x_4] = x_5$	$A_{5,4} \oplus A_{1,1}$	$L_{5,4} \oplus I$
$L_3 \oplus L_3$	$[x_1, x_2] = x_3, [x_4, x_5] = x_6$	$A_{3,1} \oplus A_{3,1}$	$L_{3,2} \oplus L_{3,2}$
L_6^4	$[x_1, x_2] = x_5, [x_1, x_3] = x_6,$ $[x_2, x_4] = x_6,$	$A_{6,4}$	$L_{6,22}(0)$
$L_6^5(-1)$	$[x_1, x_3] = x_5, [x_1, x_4] = x_6,$ $[x_2, x_4] = x_5, [x_2, x_3] = -x_6,$	$A_{6,5}^{-1}$	$L_{6,22}(-1)$
L_6^3	$[x_1, x_3] = x_6, [x_1, x_2] = x_4,$ $[x_2, x_3] = x_5,$	$A_{6,3}$	$L_{6,26}$

Вспомогательные результаты

Далее всюду рассматривается алгебра Ли $\mathfrak{n} = L_3 \oplus 3L_1$. Пусть в алгебре Ли $\mathfrak{n}$ задано произвольное скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$. Через $C(\mathfrak{n})$ и $\mathfrak{a}$ будем обозначать центр алгебры Ли $\mathfrak{n}$ и $(\cdot,\cdot)$-ортогональное дополнение к $C(\mathfrak{n})$ в $\mathfrak{n}$ соответственно. Пусть $A : \mathfrak{n} \mapsto \mathfrak{n}$ — произвольное дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{n}$. Для этого оператора и его матричного представления в каком-либо базисе $\mathfrak{n}$ будем использовать одинаковые обозначения.

Лемма 1 *Для произвольного скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ в алгебре Ли $\mathfrak{n} = L_3 \oplus 3L_1$ всегда можно выбрать такой $(\cdot,\cdot)$-ортонормированный базис $\{e_1, \dots, e_6\}$, что единственным ненулевым коммутационным соотношением в $\mathfrak{n}$ будет $[e_5, e_6] = ce_1$, где $c > 0$, а произвольный оператор дифференцирования A алгебры $\mathfrak{n}$ будет представлен матрицей*

$$\begin{pmatrix} 2\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & \mu_1 & \alpha & \beta & a_{25} & a_{26} \\ 0 & -\alpha & \mu_2 & \gamma & a_{35} & a_{36} \\ 0 & -\beta & -\gamma & \mu_3 & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & \lambda \end{pmatrix}, \tag{4}$$

Доказательство. Очевидно, что $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] \subset C(\mathfrak{n})$, $\dim\big([\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\big) = 1$, $\dim\big(C(\mathfrak{n})\big) = 4$ и $\dim(\mathfrak{a}) =$

2. Пусть $\{e'_1, \ldots, e'_6\}$ — такой $(\cdot,\cdot)$-ортонормированный базис в $\mathfrak{n}$, который построен следующим образом: e'_1 взят из $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$; e'_2, e'_3, e'_4 – из $C(\mathfrak{n})$; e'_5, e'_6 – из $\mathfrak{a}$. В силу такого построения базиса, не ограничивая общности, можем полагать, что $[e'_5, e'_6] = ce'_1$, где $c > 0$. Остальные коммутаторы в $\mathfrak{n}$ равны нулю.

Пусть в выбранном базисе $\{e'_1, \ldots, e'_6\}$ предполагаемая матрица оператора дифференцирования A имеет элементы a'_{ij}. Тогда используя свойства инвариантности производной алгебры и центра произвольной алгебры Ли относительно любого её дифференцирования, легко установить, что

$$\begin{aligned} a'_{i1} &= 0, \quad 2 \le i \le 6, \\ a'_{5j} &= a'_{6j} = 0, \quad 2 \le j \le 4. \end{aligned}$$

Введем обозначения $L = \begin{pmatrix} a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a'_{55} & a'_{56} \\ a'_{65} & a'_{66} \end{pmatrix}$.

Пусть Ψ — ортогональная матрица порядка 3×3, приводящая симметрическую матрицу $\frac{1}{2}(L + L')$ к диагональной матрице $\mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, где μ_i — некоторые вещественные числа (собственные значения указанной симметрической матрицы).

Очевидно, что при таком преобразовании кососимметрическая матрица $\frac{1}{2}(L - L')$ переходит к некоторой другой кососимметрической матрице $\frac{1}{2}\Psi(L - L')\Psi'$.

Следовательно, переходя с помощью Ψ от одной $(\cdot,\cdot)$-ортонормированной системы $\{e'_2, e'_3, e'_4\}$ к другой $(\cdot,\cdot)$-ортонормированной системе $\{e_2, e_3, e_4\}$, мы добиваемся равенства

$$\Psi L \Psi' = \begin{pmatrix} \mu_1 & \alpha & \beta \\ -\alpha & \mu_2 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & \mu_3 \end{pmatrix},$$

где α, β, γ — некоторые вещественные числа.

Рассмотрим теперь матрицу M. Если $a'_{55} \ne a'_{66}$, то используя ортогональную матрицу вида

$$\Phi(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

всегда можно добиться того, чтобы в 2×2-матрице $\Phi M \Phi'$ диагональные элементы совпадали. Действительно, при $a'_{55} \ne a'_{66}$ уравнение

$$(a'_{55} - a'_{66}) \cos(2\varphi) + (a'_{56} + a'_{65}) \sin(2\varphi) = 0$$

имеет корень $\varphi_0 = \mathrm{arcctg}\big((a'_{56} + a'_{65})/(a'_{66} - a'_{55})\big)/2$. Естественно полагать $\varphi_0 = 0$, если $a'_{55} = a'_{66}$.

Заметим, что равенство $A\big([e'_5, e'_6]\big) = [Ae'_5, e'_6] + [e'_5, Ae'_6]$ эквивалентно $a'_{11} = a'_{55} + a'_{66}$. Следовательно, в новом $(\cdot,\cdot)$-ортонормированном базисе $\{e_5, e_6\}$ алгебры Ли $\mathfrak{a}$, получаемом от $\{e'_5, e'_6\}$ с помощью матрицы перехода $\Phi(\varphi_0)$, для элементов $\Phi M \Phi'$ имеем следующее: $a_{55} = a_{66} := \lambda$, $a_{11} = 2\lambda$.

Искомый $(\cdot,\cdot)$-ортонормированный базис $\{e_1,\dots,e_6\}$ алгебры Ли $\mathfrak{n}$, в котором оператор дифференцирования A будет иметь матричное представление требуемого вида (4), теперь легко может быть получен от старого $(\cdot,\cdot)$-ортонормированного базиса $\{e'_1,\dots,e'_6\}$ с помощью следующей ортогональной матрицы перехода: $\operatorname{diag}(1,\Psi,\Phi(\varphi_0))$.

Несложно показать, что в новом базисе $\{e_1,\dots,e_6\}$ коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathfrak{n}$ будут сохраняться. Действительно, так как $e_1=e'_1$, то $[e_5,e_6]=[e'_5\cos(\varphi)+e'_6\sin(\varphi),-e'_5\sin(\varphi)+e'_6\cos(\varphi)]=[e'_5,e'_6]=ce_1$ независимо от φ. Равенство нулю остальных коммутаторов в новом базисе очевидно. Лемма доказана.

Доказательство основного результата

Приступаем теперь к доказательству утверждения 1. Согласно лемме 1, не ограничивая общности, будем считать, что в $\mathfrak{n}=L_3\oplus 3L_1$ выбран Q-ортонормированный базис $\{e_1,\dots,e_6\}$, в котором произвольный оператор дифференцирования A алгебры Ли $\mathfrak{n}$ представляется и отождествляется 6×6-матрицей вида (4).

Как известно, оператор присоединенного действия $\operatorname{ad}(e_i)$ в выбранном базисе представляется 6×6-матрицей, в которой на пересечении k-ой строки и j-го столбца стоит структурная константа c_{ij}^k рассматриваемой алгебры Ли. Поскольку согласно лемме 1 алгебра Ли $\mathfrak{n}$ обладает единственным (с точностью до перестановок базисных векторов) ненулевым коммутатором $[e_5,e_6]=ce_1$, $c>0$, то, очевидно, что $\operatorname{ad}(e_i)=0$ при $1\le i\le 4$. Каждая из матриц $\operatorname{ad}(e_5)$ и $\operatorname{ad}(e_6)$ содержит по единственному ненулевому элементу $\big(\operatorname{ad}(e_5)\big)_{16}=c$ и $\big(\operatorname{ad}(e_6)\big)_{15}=-c$ соответственно. Вычисления по формулам (1) и (2) показывают, что

$$
\begin{aligned}
2R_2 &= (0,0,0,0,-ca_{16},ca_{15})',\\
t &= \mu_1+\mu_2+\mu_3+4\lambda,\\
2r &= \sum_{j=2}^{6} a_{1j}^2+\sum_{i=2}^{4}(a_{i5}^2+a_{i6}^2)+(a_{56}+a_{65})^2+2\sum_{i=1}^{3}\mu_i^2+12\lambda^2\ge 0,\\
\operatorname{Ric}^{\mathfrak{n}} &= \frac{1}{2}\operatorname{diag}\left(c^2,0,0,0,-c^2,-c^2\right).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Случай 1. $r=0$. Тогда, очевидно, что A — кососимметрична и имеет вид:

$$
A=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0\\
0 & -\alpha & 0 & \gamma & 0 & 0\\
0 & -\beta & -\gamma & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{56}\\
0 & 0 & 0 & 0 & -a_{56} & 0
\end{pmatrix}.
$$

Так как $t=0$, то алгебра Ли $\mathfrak{s}$ — унимодулярна. По формуле (1) в силу очевидного равенства $[A,A']=0$, вытекающего из кососимметричности A, получаем, что $R_1=\operatorname{Ric}^{\mathfrak{n}}$. Очевидно также равенство $R_2=0$. Следовательно, в рассматриваемом случае оператор Риччи Ric алгебры Ли $\mathfrak{s}$ имеет очень простую (диагональную) структуру:

$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} \mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Собственные значения оператора Ric: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = \frac{1}{2}c^2, \quad \lambda_6 = \lambda_7 = -\frac{1}{2}c^2$.

Случай 2. $r > 0$. Достаточное условие (3) эквивалентно преобразуется к следующему виду:

$$c^2\big(2r - (a_{15}^2 + a_{16}^2)\big) + 4rt^2 > 0. \tag{6}$$

Далее целесообразно отдельно рассматривать два случая, которые могут иметь место в формуле (5).

Случай 2.1. Пусть $r > 0$ в силу того, что среди a_{1i}, a_{i5}, a_{i6}, $a_{56} + a_{65}$, λ, μ_1, μ_2, μ_3, где $2 \leq i \leq 4$, существует хотя-бы один ненулевой элемент. Тогда $2r - (a_{15}^2 + a_{16}^2) > 0$, и, как видно из (6), выполнены все условия предложения 1 независимо от значений $t \geq 0$. Следовательно, согласно предложению 1 оператор Риччи Ric алгебры Ли $\mathfrak{s}$ должен иметь не менее двух отрицательных собственных значений в независимости от неунимодулярности или унимодулярности $\mathfrak{s}$.

Случай 2.1. Пусть $r > 0$ только за счет слагаемого $a_{15}^2 + a_{16}^2 \neq 0$, а остальные слагаемые в (5) равны нулю: $2r = a_{15}^2 + a_{16}^2$. Так как $t = 0$, то левая часть неравенства (6) равняется нулю, другими словами, достаточное условие (3) предложения 1 не выполнено. Тем не менее, как показывают вычисления, и в этом случае оператор Риччи Ric унимодулярной алгебры Ли $\mathfrak{s}$ имеет два отрицательных собственных значения. Действительно,

$$\mathrm{Ric} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c^2 + a_{15}^2 + a_{16}^2 & 0 & 0 & 0 & a_{16}a_{56} & -a_{15}a_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{16}a_{56} & 0 & 0 & 0 & -c^2 - a_{15}^2 & -a_{15}a_{16} & -ca_{16} \\ -a_{15}a_{56} & 0 & 0 & 0 & -a_{15}a_{16} & -c^2 - a_{16}^2 & ca_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ca_{16} & ca_{15} & -a_{15}^2 - a_{16}^2 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице элементы, находящиеся на пересечении строк и столбцов с номерами 5 и 6, образуют отрицательно определенную 2×2-подматрицу. В таком случае согласно предложению 3 и следствию 2 из [4] оператор Ric должен иметь не менее двух отрицательных собственных значений. Утверждение доказано.

Замечание 1 *Поскольку для $\mathfrak{n} = L_3 \oplus 3L_1$ не выполняются условия пунктов 1 и 2 теоремы 1 из [14], то доказательство утверждения 1 можно было бы непосредственно получить из этой теоремы в виде следствия. Более того, согласно результатам [14] аналогичные утверждения будут иметь место для оператора Риччи всякой разрешимой метрической алгебры Ли, имеющей производную алгебру из таблицы 1.*

Литература

[1] Абиев Н. А. О кривизне Риччи разрешимых метрических алгебр Ли с двухступенно нильпотентными производными алгебрами // Мат.труды. 2013. Т. 16, С. 3–17.

[2] Алексеевский Д. В. Однородные римановы пространства отрицательной кривизны // Мат. сборник. 1975. Т. 96. С. 93–117.

[3] Бессе А. Л. Многообразия Эйнштейна. –М.: Мир, 1990.

[4] Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. 2008. Т. 11, С. 155–147.

[5] Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. 2009. Т. 12, С. 40–116.

[6] Морозов В. В. Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка // Известия высш. учеб. завед. Сер. матем. 1958. №4(5). С. 161–171.

[7] Никитенко Е. В., Никоноров Ю. Г. Шестимерные эйнштейновы солвмногообразия // Мат. труды. 2005. Т. 8, С. 71–121.

[8] Никоноров Ю. Г., Чебарыков М.С. Оператор Риччи вполне разрешимых метрических алгебр Ли // Мат. труды. 2012. Т. 15, С. 146–158.

[9] Чебарыков М. С. О кривизне Риччи неунимодулярных разрешимых метрических алгебр Ли малой размерности // Мат. труды. 2010. Т.13, С. 186–211.

[10] Console S., Fino A., Samiou E. The moduli space of 6-dimensional 2-step nilpotent Lie algebras // Annals of global Analysis and Geometry. 27. 2005. P. 17–32.

[11] Eberlein P. Geometry of 2-step nilpotent Lie groups // Modern Dynamical Systems and Applications, Cambridge Univ. Press. Cambridge, 2004. P. 67–101.

[12] De Graaf W. A. Classification of 6–dimensional nilpotent Lie algebras over field of characteristic not 2 // Journal of Algebra. 309. 2007. P. 640–653.

[13] Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. V. 21, P. 293–329.

[14] Nikonorov Yu. G. Negative eigenvalues of the Ricci operator of solvable metric Lie algebras // Geometriae Dedicata. 2014. V. 170, P. 119-133.

[15] Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhaus H. Invariants of real low dimension Lie algebras // Journal of Mathematical Physics. 1976. V. 17, P. 986–994.

[16] Will C. Rank-one Einstein solvmanifolds of dimension 7 // Differential Geometry and its Applications. 19. 2003. P. 307–318.

References

[1] Abiev N. A. O krivizne Ricci razreshimyh metricheskih algebr Lie s dvuhstupenno nilpotentnymi proizvodnymi algebrami // Mat. trudy. 2013. T. 16, C. 3–17.

[2] Alekseevskiĭ D. V. Odnorodnye rimanovy prostranstva otricatelnoj krivizny // Mat. sbornik. 1975. T. 96. C. 93–117.

[3] Besse A. L. Mnogoobrazija Einsteina. –M.: Mir, 1990.

[4] Kremlyov A. G., Nikonorov Yu. G. Signatura krivizny Ricci levoinvarijantnyh rimanovyh metrik na chetyrehmernyh gruppah Lie. Unimodulijarnyij sluchaij// Mat. trudy. 2008. T. 11, C. 155–147.

[5] Kremlyov A. G., Nikonorov Yu. G. Signatura krivizny Ricci levoinvarijantnyh rimanovyh metrik na chetyrehmernyh gruppah Lie. Neunimoduliarnyij sluchaij // Mat. trudy. 2009. T. 12, C. 40–116.

[6] Morozov V. V. Klassifikacija nilpotentnyh algebr Lie shestogo porijadka // Izvestija vyssh. ucheb. zaved. Ser. matem. 1958. №4(5). C. 161–171.

[7] Nikitenko E. V., Nikonorov Yu. G. Shestimernye einsteinovy solvmnogoobrazija // Mat. trudy. 2005. T. 8, C. 71–121.

[8] Nikonorov Yu. G., Chebarykov M.S. Operator Ricci vpolne razreshimyh metricheskih algebr Lie // Mat. trudy. 2012. T. 15, C. 146–158.

[9] Chebarykov M.S. O krivizne Ricci neunimodulijarnyh razreshimyh metricheskih algebr Lie maloij razmernosti // Mat. trudy. 2010. T. 13, C. 186–211.

[10] Console S., Fino A., Samiou E. The moduli space of 6-dimensional 2-step nilpotent Lie algebras // Annals of global Analysis and Geometry. 27. 2005. P. 17–32.

[11] Eberlein P. Geometry of 2-step nilpotent Lie groups // Modern Dynamical Systems and Applications, Cambridge Univ. Press. Cambridge, 2004. P. 67–101.

[12] De Graaf W. A. Classification of 6–dimensional nilpotent Lie algebras over field of characteristic not 2 // Journal of Algebra. 309. 2007. P. 640–653.

[13] Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // *Adv. Math.* 1976. V. 21, P. 293–329.

[14] Nikonorov Yu. G. Negative eigenvalues of the Ricci operator of solvable metric Lie algebras // Geometriae Dedicata. 2014. V. 170, P. 119-133.

[15] Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhaus H. Invariants of real low dimension Lie algebras // *Journal of Mathematical Physics.* 1976. V. 17, P. 986–994.

[16] Will C. Rank-one Einstein solvmanifolds of dimension 7 // Differential Geometry and its Applications. 19. 2003. P. 307–318.