Существование и единственность решений прямых и сопряженных задач по восстановлению условий на контурах питания, разгрузки и идентификации фильтрационно-емкостных параметров

Н.Т. Данаев, С.Т. Мухамбетжанов, Е.А. Аужани
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: erkawww@gmail.com

Аннотация

В работе доказаны теоремы о существовании и единственности решения краевой задачи для уравнения Лапласа относительно давления пласта и начально-краевой задачи для уравнения диффузии относительно концентрации в многозонной двумерной области. Кроме того, доказаны теоремы существования и единственности сопряженных задач по идентификации параметров нефтяного пласта.

Рассмотрим задачу восстановления давлений в областях питания и разгрузки, а также идентификации фильтрационных параметров водоносного пласта. Даже эта, казалось бы, простая задача характеризуется трудностями. Во-первых, не всегда с достоверностью известны местоположения областей питания и разгрузки. Во-вторых, затруднительно указать внешние границы водоносного пласта. В-третьих, не до конца ясны многие особенности геологического строения рассматриваемого бассейна. Поэтому, будем вести речь о создании для данной залежи эквивалентной расчетной модели водоносного пласта [1-3].

Вокруг залежи выделяется, возможно, часть водоносного пласта, по которой имеется определенный объем исходной информации. Это означает, что с некоторой долей условности определенные границы пласта характеризуются как непроницаемые и выделяются контуры областей питания и разгрузки. Имеются карты равных значений коэффициента проницаемости k и толщины пласта h. Также располагаем значениями давлений и фильтрационных параметров в ряде разведочных или пьезометрических скважин, в том числе на границе залежи до начала ее разработки. Часто оказываются неизвестными давления на контурах областей питания и разгрузки, а также фактическое распределение фильтрационного параметра.

Здесь уместно поставить сопряженную задачу. Найти такие давления на контурах выделенных областей питания P_n и разгрузки P_p, а также фактического распределения фильтрационного параметра $b_\phi(x,y)$, которые предопределили замеренные значения давлений и фильтрационных параметров в разных точках водоносного пласта и установленную конфигурацию газовой залежи.

Приведем постановки и алгоритмы решений как прямых, так и сопряженных задач теории фильтрации.

Найти приведенное давление P^* как решение прямой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} b \frac{\partial P^*}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} b \frac{\partial P^*}{\partial x_2} = f(x), \qquad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial P^*}{\partial n}\right|_{\Gamma_1, \Gamma_2} = 0, \tag{2}$$

$$P^*|_{\Gamma_3} = P_n^* - const, \qquad P^*|_{\Gamma_4} = P_p^* - const, \tag{3}$$

где Ω – многозонная область; Γ_1 – контур нефтяной (газовой) залежи; Γ_2 – контур водоносного пласта; Γ_3 – контур области питания; Γ_4 - контур области разгрузки; $P^* = P \pm \rho_2 gl$, $P = P(x)$ - давление; ρ_2 – плотность воды; g – ускорение свободного падения; l – расстояние по вертикали от данной точки x до плоскости приведения; внешний единичный нормальный вектор к границам Γ_1 и Γ_2, $b = k(x)h(x)$, $k(x)$ – коэффициент проницаемости пласта, h – толщина пласта.

Обычно решается однородное уравнение (1), здесь мы брали $f(x)$ для общности.

Определение 1. *Функция $P^* \in W_2^1(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи* (1)-(3) *при $f \in L^2(\Omega)$, если она удовлетворяет тождеству*

$$\int_\Omega b\nabla P^*\nabla\psi dx + \int_{\Gamma_3} b\psi\frac{\partial P^*}{\partial n}d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} b\psi\frac{\partial P^*}{\partial n}d\Gamma_4 = \int_\Omega f\psi dx \tag{4}$$

для каждой функций $\psi \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющей условиям (2)-(3).

Для задачи (1)-(3) справедлива теорема.

Теорема 1. *Если $f \in L^2(\Omega)$ и $P_n \in L^2(\Gamma_3)$, $P_p \in L^2(\Gamma_4)$, то задача* (1)-(3) *имеет единственное обобщенное решение P, принадлежащее пространству $W_2^1(\Omega)$, причем*

$$\|P\|_{W_2^1(\Omega)} \le C_1\left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|P_n\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|P_p\|_{L^2(\Gamma_4)}\right], \tag{5}$$

где C_1 – константа, независящая от решения.

Теорема доказана по методике, изложенной в [6].

Сопряженная к (1)-(3) задача ставится следующим образом:

Найти функцию U, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_1}b\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}b\frac{\partial U}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^{n}(P_{paci}^* - P_{\phi i}^*)\delta, \tag{6}$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Gamma_1\bigcup\Gamma_2} = 0, \tag{7}$$

$$U|_{\Gamma_3\bigcup\Gamma_4} = 0, \tag{8}$$

где P_{paci}^* и $P_{\phi i}^*$ – расчетные и фактические значения приведенного давления на i-ой скважине, δ – дельта-функция Дирака.

Определение 2. *Функцию $U \in L^2(\Omega)$ будем называть обобщенным решением сопряженной задачи* (6)-(8), *если для любых $v \in H^2(\Omega)$ таких, что*

$$v|_{\Gamma_3\bigcup\Gamma_4} = 0, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Gamma_1\bigcup\Gamma_2} = 0, \tag{10}$$

имеет место равенство

$$\int_\Omega U\left(\frac{\partial}{\partial x_1}b\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}b\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)dx - \int_\Omega fvdx = 0. \tag{11}$$

Для задачи (6)-(8) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если $f \in L^2(\Omega)$, то задача (6)-(8) меет единственное обобщенное решение $U \in L^2(\Omega)$, причем имеет место оценка*

$$\|U\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{12}$$

где C_2 – постоянная, независящая от решения задачи.

Теорема доказана по методике, изложенной в [6].

Уравнение конвективной диффузии в случае плоского фильтрационного потока имеет вид

$$m\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\zeta\frac{\partial C}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\zeta\frac{\partial C}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}(v_1 C), \quad x \in \Omega, 0 < t < T, \tag{13}$$

где m – коэффициент пористости; $C(t,x)$ – концентрация рассматриваемого компонента; $\zeta = \frac{\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$, λ_1, λ_2 – соответственно продольные и поперечные параметры рассеивания среды, постоянные (имеют размерность длины); v_1, v_2 – компоненты скорости фильтрации соответственно по осям x_1, x_2.

Если для уравнения (13) задать начальное и граничное условия

$$C|_{t=0} = C_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial C}{\partial n}\right|_{\Gamma_2 \bigcup \Gamma_3 \bigcup \Gamma_4} = 0, \qquad C|_{\Gamma_1} = 1, \tag{15}$$

то получим начально-краевую задачу для определения поля концентрации по всей площади водоносного пласта в любой момент времени.

Определение 3. *Обобщенным решением задачи (13)-(15) будем называть функцию $C \in L^2([0,T]\times\Omega)$ такую, что для любых функций $\psi \in W_2^1([0,T]\times\Omega)$, удовлетворяющих условиям (14)-(15) имеет место равенство*

$$\int_0^T \int_\Omega C\left(m\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\zeta\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\zeta\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}(v_1\psi)\right)dtdx + \int_\Omega C_0\psi(x,0)dx = 0.$$

Теорема 3. *Если $C_0 \in L^2(\Omega)$, то задача (13)-(15) имеет единственное обобщенное решение, принадлежащее пространству $L^2([0,T]\times\Omega)$, причем*

$$\|C\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} \leq A\|C_0\|_{L^2(\Omega)},$$

где A – постоянная, независящая от решения.

Теорема доказана по методике, изложенной в [6].

Сопряженную к (13)-(15) задачу запишем в виде

$$m\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\zeta\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\zeta\frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}(v_1 U) = 2\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\varepsilon_i\delta, \quad x \in \Omega, \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Gamma_2 \bigcup \Gamma_3 \bigcup \Gamma_4} = 0. \tag{17}$$

$$U(x,T) = 0, \qquad \zeta = \frac{\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}. \tag{18}$$

Для задачи (16)-(18) справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если* $2\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\varepsilon_i\delta \in L^2(\Omega)$, *то задача* (16)-(18) *имеет единственное обобщенное решение, принадлежащее пространству* $L^2\left([0,T]\times\Omega\right)$, *причем имеет место оценка*

$$\|U\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} \le B\left\|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\varepsilon_i\delta\right\|_{L^2(\Omega)},$$

где B *– постоянная, независящая от решения задачи.*

Теорема доказана по методике, изложенной в [6].

Литература

[1] *Азиз А., Саттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982. – 407 с.

[2] *Закиров С.Н., Васильев В.И., Гутников А.И. и др.* Прогнозирование и регулирование разработки газовых месторождений. – М.: Недра, 1984, - 295 с.

[3] *Гутников А.И., Жолдасов А., Закиров С.Н. и др.* Взаимодействие залежей газа и нефти с пластовыми водами. – М.: Недра, 1991. – 189 с.

[4] *Данаев Н.Т., Мухамбетжанов С.Т.* Определение распространения бурового раствора с помощью математической модели в прискважинной зоне пласта // Материалы международной научно-практической конференции "Инженерная наука на рубеже 21 века". – Алматы, 2001. – С. 125-126.

[5] *Данаев Н.Т., Мухамбетжанов С.Т., Куспанова К.К.* Об одном методе определения положения границы нефтяного пласта // Материалы международной научно-практической конференции "Инженерная наука на рубеже 21 века". – Алматы, 2001. – С. 124.

[6] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976, - 391 с.