Об одном приближенном методе нахождения решения полупериодической краевой задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений

Д.С. Джумабаев, Ж.М. Кадирбаева
Институт математики МОН РК, Алматы, Казахстан
e-mail: anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Аннотация

Предлагается двухпараметрическое семейство алгоритмов нахождения приближенного решения полупериодической краевой задачи для систем линейных нагруженных гиперболических уравнений. Установлены достаточные условия сходимости алгоритма и существования единственного решения рассматриваемой задачи.

В различных задачах приложения возникают нагруженные дифференциальные уравнения [1],[2]. Нагруженные дифференциальные уравнения появляются и при аппроксимации интегро-дифференциальных уравнений, когда интегральный член заменяется некоторой квадратурной формулой. Вопросы разрешимости краевых задач для таких уравнений и построения приближенных методов нахождения их решений различными методами рассмотрены в [1]-[4]. В [5] линейная двухточечная краевая задача для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений исследована методом параметризации [6]. В терминах исходных данных получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи и предложены алгоритмы нахождения ее решений. Аппроксимация линейной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений краевыми задачами для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрена в [7]. В терминах аппроксимируюших задач установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости рассматриваемой краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения.

В настоящей работе на $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается полупериодическая краевая задача для системы нагруженных гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A_0(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + B_0(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + C_0(x,t)u + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(x,t)\frac{\partial u(x,\theta_{i-1})}{\partial x} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m+1} B_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=\theta_{i-1}} + \sum_{i=1}^{m+1} C_i(x,t)u(x,\theta_{i-1}) + f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,T)}{\partial x}, \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где $(n \times n)$ - матрицы $A_j(x,t)$, $B_j(x,t)$, $C_j(x,t)$, $j = \overline{0, m+1}$, и n - вектор-функция $f(x,t)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, n - вектор-функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, $\varphi(0)= \varphi(T)$, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{m-1} < \theta_m < \theta_{m+1} = T$, $||u(x,t)|| = \max\limits_{s=\overline{1,n}} |u_s(x,t)|$,

$||A(x,t)|| = \max\limits_{s=\overline{1,n}} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{sk}(x,t)|$.

Целью работы является построение алгоритмов нахождения приближенного решения задачи (1)-(3). С этой целью применяется метод введения функциональных параметров [8],[9], являющееся развитием метода параметризации на краевые задачи для систем гиперболических уравнений со смешаными производными.

Пусть $\|A_j(x,t)\| \le \alpha_j(x,t)$, $j=\overline{0,m+1}$, где $\alpha_j(x,t)$, $j=\overline{0,m+1}$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, и $\max\limits_{x\in[0,\omega]}\alpha_0(x,t)=\alpha(t)$. Для каждого $i=\overline{1,m+1}$ разбиение интервала $[\theta_{i-1},\theta_i)$ проведем с учетом поведения функции $\alpha(t)$ на этом интервале. Возьмем число $a>0$ и для интервала $[\theta_{i-1},\theta_i)$, $i=\overline{1,m+1}$ проверим неравенство $\int\limits_{\theta_{i-1}}^{\theta_i}\alpha(\tau)d\tau \le a$. Если это неравенство выполняется, то интервал $[\theta_{i-1},\theta_i)$ не разбивается на части. Если не выполняется, то за $\theta_{i-1,0}$ возьмем θ_{i-1} и $\theta_{i-1,1}\in[\theta_{i-1,0},\theta_i)$ выберем удовлетворяющим неравенству $\int\limits_{\theta_{i-1,0}}^{\theta_{i-1,1}}\alpha(\tau)d\tau\le a$. Снова проверяем неравенство $\int\limits_{\theta_{i-1,1}}^{\theta_i}\alpha(\tau)d\tau\le a$, если это неравенство имеет место, то интервал $[\theta_{i-1},\theta_i)$ разбивается на две части: $[\theta_{i-1,0},\theta_{i-1,1})$, $[\theta_{i-1,1},\theta_i)$. Если это неравенство не выполняется, то точку $\theta_{i-1,2}\in[\theta_{i-1,1},\theta_i)$ выберем так, чтобы имело место неравенство $\int\limits_{\theta_{i-1,1}}^{\theta_{i-1,2}}\alpha(\tau)d\tau\le a$. Продолжая этот процесс, через k_{i-1} обозначим число разбиения промежутка $[\theta_{i-1},\theta_i)$ при котором имеет место неравенство $\int\limits_{\theta_{i-1,k_{i-1}-1}}^{\theta_i}\alpha(\tau)d\tau\le a$.

Введем следующие обозначения $p_0=0$, $p_{l+1}=\sum\limits_{s=0}^{l}k_s$, $l=0:m$. Тогда $[0,\omega]\times[0,T)=[0,\omega]\times\bigcup\limits_{r=1}^{p_{m+1}}[t_{r-1},t_r)$, где $t_0=\theta_0=0$, $t_1=\theta_{0,1}$, $t_2=\theta_{0,2}$, ..., $t_{p_1}=\theta_1$, $t_{p_1+1}=\theta_{1,1}$, ..., $t_{p_2}=\theta_2$, ..., $t_{p_{m+1}}=T$.

Через $u_r(x,t)$ обозначим сужение функции $u(x,t)$ на $\Omega_r=[0,\omega]\times[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$. Тогда задача (1) - (3) перейдет к эквивалентной многохарактеристической краевой задаче

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial x\partial t}=A_0(x,t)\frac{\partial u_r}{\partial x}+B_0(x,t)\frac{\partial u_r}{\partial t}+C_0(x,t)u_r+$$
$$+\sum_{i=1}^{m+1}A_i(x,t)\frac{\partial u_{p_{i-1}+1}(x,\theta_{i-1})}{\partial x}+\sum_{i=1}^{m+1}B_i(x,t)\frac{\partial u_{p_{i-1}+1}(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=\theta_{i-1}}+$$
$$+\sum_{i=1}^{m+1}C_i(x,t)u_{p_{i-1}+1}(x,\theta_{i-1})+f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega_r, \tag{4}$$

$$u_r(0,t)=\varphi(t),\qquad t\in[t_{r-1},t_r),\quad r=\overline{1,p_{m+1}}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_1(x,0)}{\partial x}=\lim_{t\to T-0}\frac{\partial u_{p_{m+1}}(x,t)}{\partial x},\quad x\in[0,\omega], \tag{6}$$

$$\lim_{t\to t_s-0}\frac{\partial u_s(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial u_{s+1}(x,t_s)}{\partial x},\qquad x\in[0,\omega],\quad s=\overline{1,p_{m+1}-1}. \tag{7}$$

Здесь соотношения (7) являются условиями склеивания производных по x решения во внутренних линиях разбиения области Ω. Отметим, что (7) и свойства характеристик $t = t_s, s = \overline{1, p_{m+1} - 1}$ обеспечивают также склеивания решения и их производных по t в этих линиях.

Решением задачи (4) – (7) является система функций $u(x, [t]) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \ldots, u_{p_{m+1}}(x, t))$, обладающая следующими свойствами: а) функция $u_r(x, t)$ на Ω_r непрерывна, имеет непрерывные частные производные первого порядка по x, t, непрерывную смешанную производную второго порядка и удовлетворяет системе нагруженных гиперболических уравнений (4), условию (5) при всех $r = \overline{1, p_{m+1}}$ (при $t = t_{r-1}$, $x = 0$, $x = \omega$ систему дифференциальных уравнений (4) удовлетворяет соответствующие односторонние производные решения), б) существуют $\lim\limits_{t \to t_r - 0} \dfrac{\partial u_r(x, t)}{\partial x}$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, удовлетворяющие (6),(7).

Введем дополнительные функциональные параметры $\lambda_r(x) = u_r(x, t_{r-1})$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$ и проведя замену $\widetilde{u}_r(x, t) = u_r(x, t) - \lambda_r(x)$, $\quad r = \overline{1, p_{m+1}}$ получаем многохарактеристическую краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}_r}{\partial x \partial t} = A_0(x, t)\frac{\partial \widetilde{u}_r}{\partial x} + B_0(x, t)\frac{\partial \widetilde{u}_r}{\partial t} + C_0(x, t)\widetilde{u}_r + A_0(x, t)\lambda_r'(x) + C_0(x, t)\lambda_r(x) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m+1} A_i(x, t)\lambda'_{p_{i-1}+1}(x) + \sum_{i=1}^{m+1} B_i(x, t)\frac{\partial \widetilde{u}_{p_{i-1}+1}(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=\theta_{i-1}} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m+1} C_i(x, t)\lambda_{p_{i-1}+1}(x) + f(x, t), \tag{8}$$

$$\widetilde{u}_r(x, t_{r-1}) = 0, \qquad x \in [0, \omega], \quad r = \overline{1, p_{m+1}}, \tag{9}$$

$$\widetilde{u}_r(0, t) + \lambda_r(0) = \varphi(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, p_{m+1}}, \tag{10}$$

$$\lambda_1'(x) = \lim_{t \to T-0} \frac{\partial \widetilde{u}_{p_{m+1}}(x, t)}{\partial x} + \lambda'_{p_{m+1}}(x), \qquad x \in [0, \omega], \tag{11}$$

$$\lambda_s'(x) + \lim_{t \to t_s - 0} \frac{\partial \widetilde{u}_s(x, t)}{\partial x} = \lambda'_{s+1}(x), \qquad x \in [0, \omega], \quad s = \overline{1, p_{m+1} - 1}. \tag{12}$$

Если система пар $(\lambda(x), \widetilde{u}(x, [t])$, где $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_{p_{m+1}}(x))$, $\widetilde{u}(x, [t]) = (\widetilde{u}_1(x, t), \widetilde{u}_2(x, t), \ldots, \widetilde{u}_{p_{m+1}}(x, t))$ - решение задачи (8)-(12), то функция $u(x, t)$, определяемая равенствами $u(x, t) = \lambda_r(x) + \widetilde{u}_r(x, t)$, $(x, t) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, $u(x, T) = \lambda_{p_{m+1}}(x) + \lim\limits_{t \to T-0} \widetilde{u}_{p_{m+1}}(x, t)$ text $x \in [0, \omega]$ является решением задачи (1)-(3).

Для каждого $r = \overline{1, p_{m+1}}$ при фиксированных $\lambda_r(x), \lambda_r'(x)$ функция $\widetilde{u}_r(x, t)$ является решением задачи Гурса на Ω_r с условиями (9) и

$$\widetilde{u}_r(0, t) = \varphi(t) - \varphi(t_{r-1}), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r). \tag{13}$$

Введя обозначения $\widetilde{v}_r(x, t) = \dfrac{\partial \widetilde{u}_r(x, t)}{\partial x}$, $\widetilde{w}_r(x, t) = \dfrac{\partial \widetilde{u}_r(x, t)}{\partial t}$ из (9), (13) получаем $\widetilde{v}_r(x, t_{r-1}) = 0$, $\widetilde{w}_r(0, t) = \dot{\varphi}(t)$, и задачу Гурса сведем к системе трех интегральных уравнений

$$\widetilde{w}_r(x, t) = \dot{\varphi}(t) + \int_0^x \Big[A_0(\xi, t)\widetilde{v}_r(\xi, t) + B_0(\xi, t)\widetilde{w}_r(\xi, t) + C_0(\xi, t)\widetilde{u}_r(\xi, t) +$$

$$+f(\xi,t)+A_0(\xi,t)\lambda_r'(\xi)+C_0(\xi,t)\lambda_r(\xi)+\sum_{i=1}^{m+1}A_i(\xi,t)\lambda'_{p_{i-1}+1}(\xi)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m+1}B_i(\xi,t)\widetilde{w}_{p_{i-1}+1}(\xi,\theta_{i-1})+\sum_{i=1}^{m+1}C_i(\xi,t)\lambda_{p_{i-1}+1}(\xi)\Big]d\xi, \tag{14}$$

$$\widetilde{v}_r(x,t)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}\Big[A_0(x,\tau)\widetilde{v}_r(x,\tau)+B_0(x,\tau)\widetilde{w}_r(x,\tau)+C_0(x,\tau)\widetilde{u}_r(x,\tau)+$$

$$+f(x,\tau)+A_0(x,\tau)\lambda_r'(x)+C_0(x,\tau)\lambda_r(x)+\sum_{i=1}^{m+1}A_i(x,\tau)\lambda'_{p_{i-1}+1}(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m+1}B_i(x,\tau)\widetilde{w}_{p_{i-1}+1}(x,\theta_{i-1})+\sum_{i=1}^{m+1}C_i(x,\tau)\lambda_{p_{i-1}+1}(x)\Big]d\tau, \tag{15}$$

$$\widetilde{u}_r(x,t)=\varphi(t)-\varphi(t_{r-1})+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}d\tau\int\limits_{0}^{x}\Big[A_0(\xi,\tau)\widetilde{v}_r(\xi,\tau)+B_0(\xi,\tau)\widetilde{w}_r(\xi,\tau)+C_0(\xi,\tau)\widetilde{u}_r(\xi,\tau)+$$

$$+f(\xi,\tau)+A_0(\xi,\tau)\lambda_r'(\xi)+C_0(\xi,\tau)\lambda_r(\xi)+\sum_{i=1}^{m+1}A_i(\xi,\tau)\lambda'_{p_{i-1}+1}(\xi)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m+1}B_i(\xi,\tau)\widetilde{w}_{p_{i-1}+1}(\xi,\theta_{i-1})+\sum_{i=1}^{m+1}C_i(\xi,\tau)\lambda_{p_{i-1}+1}(\xi)\Big]d\xi. \tag{16}$$

В (15) вместо $\widetilde{v}_r(x,\tau)$ подставив соответствующую правую часть и повторив этот процесс ν $(\nu=1,2,...)$ раз, получим следующее представление функции $\widetilde{v}_r(x,t)$:

$$\widetilde{v}_r(x,t)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}A_0(x,\tau_\nu)\widetilde{v}_r(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1+$$

$$+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}\Big[B_0(x,\tau_1)\widetilde{w}_r(x,\tau_1)+C_0(x,\tau_1)\widetilde{u}_r(x,\tau_1)\Big]d\tau_1+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(x,\tau_{\nu-1})\times$$

$$\times\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}\Big[B_0(x,\tau_\nu)\widetilde{w}_r(x,\tau_\nu)+C_0(x,\tau_\nu)\widetilde{u}_r(x,\tau_\nu)\Big]d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}f(x,\tau_1)d\tau_1+...+$$

$$+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}f(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1+\Big[\int\limits_{t_{r-1}}^{t}C_0(x,\tau_1)d\tau_1+$$

$$+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}C_0(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1\Big]\lambda_r(x)+$$

$$+\Big[\int\limits_{t_{r-1}}^{t} A_0(x,\tau_1)d\tau_1+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t} A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A_0(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1\Big]\lambda_r'(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m+1}\Big[\Big\{\int\limits_{t_{r-1}}^{t} A_i(x,\tau_1)d\tau_1+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t} A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A_i(x,\tau_\nu)d\tau_\nu\times$$

$$\times d\tau_{\nu-1}...d\tau_1\Big\}\lambda'_{p_{i-1}+1}(x)\Big]+\sum_{i=1}^{m+1}\Big[\Big\{\int\limits_{t_{r-1}}^{t} C_i(x,\tau_1)d\tau_1+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t} A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x,\tau_{\nu-1})\times$$

$$\times\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} C_i(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1\Big\}\lambda_{p_{i-1}+1}(x)\Big]+\sum_{i=1}^{m+1}\Big[\Big\{\int\limits_{t_{r-1}}^{t} B_i(x,\tau_1)d\tau_1+$$

$$+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t} A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} B_i(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1\Big\}\widetilde{w}_{p_{i-1}+1}(x,\theta_{i-1})\Big]. \qquad (17)$$

Введем обозначения

$$D^i_{\nu r}(x,a)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A_i(x,\tau_1)d\tau_1+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A_i(x,\tau_\nu)d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$$E^i_{\nu r}(x,a)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} C_i(x,\tau_1)d\tau_1+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} C_i(x,\tau_\nu)d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$i=\overline{0,m+1}$,

$$J_{\nu r}(x,a,\widetilde{u},\widetilde{w})=\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r}\Big[B_0(x,\tau_1)\widetilde{w}_r(x,\tau_1)+C_0(x,\tau_1)\widetilde{u}_r(x,\tau_1)\Big]d\tau_1+...+$$

$$+\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}\Big[B_0(x,\tau_\nu)\widetilde{w}_r(x,\tau_\nu)+C_0(x,\tau_\nu)\widetilde{u}_r(x,\tau_\nu)\Big]d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1,$$

$$G_{\nu r}(x,a,\widetilde{v})=\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A_0(x,\tau_\nu)\widetilde{v}_r(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1,$$

$$F_{\nu r}(x,a)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} f(x,\tau_1)d\tau_1+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1,$$

$$P_{\nu r}(x,a,\widetilde{w})=\sum_{i=1}^{m+1}\Big[\Big\{\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} B_i(x,\tau_1)d\tau_1+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x,\tau_{\nu-1})\times$$

$$\times \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} B_i(x,\tau_\nu)d\tau_\nu ... d\tau_1 \Big\} \widetilde{w}_{p_{i-1}+1}(x,\theta_{i-1}) \Big], \quad r=\overline{1,p_{m+1}}.$$

Переходя в правой части (17) к пределу при $t \to t_r - 0$, находим $\lim\limits_{t\to t_r-0} \widetilde{v}_r(x,t)$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$, $x\in[0,\omega]$ подставляя их в (11), (12), для неизвестных вектор - функций $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$, получаем систему $(n\times p_{m+1})$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производных:

$$Q_\nu(x,a)\lambda'(x) = -E_\nu(x,a)\lambda(x) - F_\nu(x,a) - H_\nu(x,a,\widetilde{u},\widetilde{w}) - G_\nu(x,a,\widetilde{v}). \tag{18}$$

Здесь $(np_{m+1}\times np_{m+1})$ - матрицы $Q_\nu(x,a)=(q_{i,j}(x,a))$, $E_\nu(x,a)=(e_{i,j}(x,a))$, $i,j=\overline{1,p_{m+1}}$ имеют следующие блочные элементы: $q_{i,j}(x,a)=q^0_{i,j}(x,a)+q^1_{i,j}(x,a)$, $e_{i,j}(x,a)=e^0_{i,j}(x,a)+e^1_{i,j}(x,a)$, $i,j=\overline{1,p_{m+1}}$, где $q^0_{1,1}(x,a)=I$, $q^0_{1,p_{m+1}}(x,a)=-[I+D^0_{\nu,p_{m+1}}(x,a)]$, $q^0_{1,j}(x,a)=0$, $j=\overline{2,p_{m+1}-1}$. $q^0_{s,s-1}(x,a)=I+D^0_{\nu,s-1}(x,a)$, $q^0_{s,s}(x,a)=-I$, $s=\overline{2,p_{m+1}}$,
Для каждого $s=\overline{2,p_{m+1}}$, $q^0_{s,j}(x,a)=0$, $j\neq s$, $j\neq s-1$, $j=\overline{1,p_{m+1}}$.
$q^1_{1,p_{k-1}+1}(x,a)=-D^k_{\nu,p_{m+1}}(x,a)$; $q^1_{1,j}(x,a)=0$, $j\neq p_{k-1}+1$, $j=\overline{1,p_{m+1}}$, $k=\overline{1,m+1}$.
Для каждого $s=\overline{2,p_{m+1}}$, $q^1_{s,p_{k-1}+1}(x,a)=D^k_{\nu,s-1}(x,a)$; $q^1_{s,j}(x,a)=0$, $j\neq p_{k-1}+1$, $j=\overline{1,p_{m+1}}$, $k=\overline{1,m+1}$.
$e^0_{1,p_{m+1}}(x,a)=-E^0_{\nu,p_{m+1}}(x,a)$, $e^0_{1,j}(x,a)=0$, $\quad j=\overline{1,p_{m+1}-1}$.
$e^0_{s,s-1}(x,a)=E^0_{\nu,s-1}(x,a)$, $s=\overline{2,p_{m+1}}$,
Для каждого $s=\overline{2,p_{m+1}}$, $e^0_{s,j}(x,a)=0$, $j\neq s-1$, $j=\overline{1,p_{m+1}}$.
$e^1_{1,p_{k-1}+1}(x,a)=-E^k_{\nu,p_{m+1}}(x,a)$; $e^1_{1,j}(x,a)=0$, $j\neq p_{k-1}+1$, $j=\overline{1,p_{m+1}}$, $k=\overline{1,m+1}$.
Для каждого $s=\overline{2,p_{m+1}}$, $e^1_{s,p_{k-1}+1}(x,a)=E^k_{\nu,s-1}(x,a)$; $e^1_{s,j}(x,a)=0$, $j\neq p_{k-1}+1$, $j=\overline{1,p_{m+1}}$, $k=\overline{1,m+1}$.
$F_\nu(x,a)=\big(-F_{\nu p_{m+1}}(x,a), F_{\nu 1}(x,a),\dots,F_{\nu p_{m+1}-1}(x,a)\big)'$,
$H_\nu(x,a,\widetilde{u},\widetilde{w})=\big(-J_{\nu p_{m+1}}(x,a,\widetilde{u},\widetilde{w})-P_{\nu p_{m+1}}(x,a,\widetilde{w}), J_{\nu 1}(x,a,\widetilde{u},\widetilde{w})+P_{\nu 1}(x,a,\widetilde{w}),\dots,$
$J_{\nu p_{m+1}-1}(x,a,\widetilde{u},\widetilde{w})+P_{\nu p_{m+1}-1}(x,a,\widetilde{w})\big)'$,
$G_\nu(x,a,\widetilde{v})=\big(-G_{\nu p_{m+1}}(x,a,\widetilde{v}), G_{\nu 1}(x,a,\widetilde{v}),\dots,G_{\nu p_{m+1}-1}(x,a,\widetilde{v})\big)'$.

Из условий согласования вытекает, что функции $\lambda_r(x)$ для каждого $r=\overline{1,p_{m+1}}$, удовлетворяют условиям:

$$\lambda_r(0)=\varphi(t_{r-1}), \qquad r=\overline{1,p_{m+1}}. \tag{19}$$

Систему функций $(\lambda_r(x),\ \widetilde{u}_r(x,t),\ \widetilde{v}_r(x,t),\ \widetilde{w}_r(x,t))$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$, удовлетворяющую интегральным уравнениям (14)-(16) и обыкновенным дифференциальным уравнениям (18) с начальными условиями (19) найдем как предел последовательности систем функций $(\lambda_r^{(k)}(x),\ \widetilde{u}_r^{(k)}(x,t),\ \widetilde{w}_r^{(k)}(x,t),\ \widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$, $k=0,1,...$, определяемой по следующему алгоритму:

0 - Шаг. а). Предполагая, что при выбранных $a>0$, $\nu\in N$ матрица $Q_\nu(x,a)$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$ и $\lambda_r(x)=\varphi(t_{r-1})$, $\widetilde{u}_r(x,t)=\varphi(t)-\varphi(t_{r-1})$, $\widetilde{v}_r(x,t)=0$, $\widetilde{w}_r(x,t)=\dot{\varphi}(t)$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$ из (18) найдем систему функций $(\lambda_r'^{(0)}(x))$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$. Используя условия (19) определяем функции $\lambda_r^{(0)}(x)=\varphi(t_{r-1})+\int\limits_0^x \lambda_r'^{(0)}(\xi)d\xi$. б). Решая систему интегральных уравнений (14)-(16), где $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$, $\lambda_r'(x)=\lambda_r'^{(0)}(x)$, $\lambda_{p_{i-1}+1}(x)=\lambda^{(0)}_{p_{i-1}+1}(x)$,

$\lambda'_{p_{i-1}+1}(x) = \lambda'^{(0)}_{p_{i-1}+1}(x), i = \overline{1, m+1}$, определим функций $\widetilde{u}^{(0)}_r(x,t)$, $\widetilde{v}^{(0)}_r(x,t)$, $\widetilde{w}^{(0)}_r(x,t)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$.

1 - Шаг. а). Из системы (18), где $\lambda_r(x) = \lambda^{(0)}_r(x)$, $\widetilde{u}_r(x,t) = \widetilde{u}^{(0)}_r(x,t)$, $\widetilde{v}_r(x,t) = \widetilde{v}^{(0)}_r(x,t)$, $\widetilde{w}_r(x,t) = \widetilde{w}^{(0)}_r(x,t)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, найдем систему функций $(\lambda'^{(1)}_r(x))$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$. Вновь используя условия (19) определяем функций $\lambda^{(1)}_r(x) = \varphi(t_{r-1}) + \int\limits_0^x \lambda'^{(1)}_r(\xi)d\xi$. б). Решая систему интегральных уравнений (14) – (16), где $\lambda_r(x) = \lambda^{(1)}_r(x)$, $\lambda'_r(x) = \lambda'^{(1)}_r(x)$, $\lambda_{p_{i-1}+1}(x) = \lambda^{(1)}_{p_{i-1}+1}(x)$, $\lambda'_{p_{i-1}+1}(x) = \lambda'^{(1)}_{p_{i-1}+1}(x), i = \overline{1, m+1}$, найдем систему функций $(\widetilde{u}^{(1)}_r(x,t), \widetilde{v}^{(1)}_r(x,t), \widetilde{w}^{(1)}_r(x,t),)$ $r = \overline{1, p_{m+1}}$. И т.д.

Теорема 1. *Пусть при некоторых $a \in \mathbb{R}_+$ и $\nu \in \mathbb{N}$ матрица $Q_\nu(x,a) : R^{np_{m+1}} \to R^{np_{m+1}}$ обратима при всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства:*

a) $||[Q_\nu(x,a)]^{-1}|| \le \gamma_\nu(x,a)$,

b) $$q_\nu(x,a) = \gamma_\nu(x,a)\Bigg[e^a - \sum_{l=0}^{\nu}\frac{a^l}{l!} + \sum_{i=1}^{m+1}\max_{r=\overline{1,p_{m+1}}}\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r}\alpha_i(x,t)dt\Bigg(e^a - \sum_{l=0}^{\nu-1}\frac{a^l}{l!}\Bigg)\Bigg] \le \chi < 1,$$

где $\gamma_\nu(x,a)$ – непрерывная на $[0,\omega]$ функция, $\chi - const$.

Тогда определяемая алгоритмом последовательность систем функций $(\lambda^{(k)}_r(x)$, $\widetilde{u}^{(k)}_r(x,t), \widetilde{w}^{(k)}_r(x,t), \widetilde{v}^{(k)}_r(x,t), r = \overline{1, p_{m+1}}$, $k = 0, 1, ...$, сходится и задача (1)-(3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство теоремы проводится с использованием схемы доказательства теоремы из [8].

Предложенный алгоритм нахождения приближенного решения задачи (8)-(12) зависит от выбора чисел $a > 0$, $\nu \in N$. Определяемая на $k-$ом шаге алгоритма система пар $(\lambda^{(k)}(x), \widetilde{u}^{(k)}(x,[t]))$ с элементами $\lambda^{(k)}(x) = (\lambda^{(k)}_1(x), \ \ldots\ , \lambda^{(k)}_{p_{m+1}}(x))$, $\widetilde{u}^{(k)}(x,[t]) = (\widetilde{u}^{(k)}_1(x,t), \ \ldots\ , \widetilde{u}^{(k)}_{p_{m+1}}(x,t))$ будет k-ым приближением к решению задачи (8)-(12).

Литература

[1] *Нахушев А.М.* Краевые задачи для нагруженных интегро - дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравнения. 1979. Т.15, N1. С. 96-105.

[2] *Нахушев А.М.* Уравнения мат. биологии М.: Высшая школа, 1995. 205 с.

[3] *Дикинов Х.Ж., Керефов А.А., Нахушев А.М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1976. Т.12, N1. С. 77-79.

[4] *Абдуллаев В.М., Айда-Заде К.Р.* О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т.44, N9. С. 1585-1595.

[5] *Бакирова Э.А.* О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Математический журнал. 2005. Т.5, N3. С. 25-34.

[6] *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т.29, N1. С. 50-66.

[7] *Бакирова Э.А., Джумабаев Д.С.* Об одной аппроксимации двухточечной краевой задачи для систем интегро - дифференциальных уравнений // Математический журнал. 2005. Т.5, N4. С. 34-43.

[8] *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2003. Т.39, N10. С. 1343-1354.

[9] *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т.42, N11. С. 1673-1685.