УДК 517.51

Г.К. Мусабаева

Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Республика Казахстан, г. Астана
E-mail: musabaevaguliya@mail.ru

Неравенство типа Бочкарева

В работе изучается зависимость свойств суммируемых рядов Фурье и их коэффициентов, а именно, что можно сказать о коэффициентах Фурье функции, которые принадлежат пространству Лоренца $L_{2,r}$. В статье получено новое доказательство теоремы Бочкарева С.В., который показал, что неравенства типа Харди- Литтлвуда, которые показывают связь интегральных свойств функций и свойств суммируемости ее коэффициентов Фурье для тригонометрических систем имеют другой вид для функции из пространства Лоренца $L_{2,r}$, чем для функции из пространства $L_{p,r}$ при $p \neq 2$, в случае когда r удовлетворяет следующему условию $2 < r \leq \infty$. Методы доказательства Бочкарева С.В. основывались на специфике тригонометрических рядов. В статье используется другой подход, базирующийся на экстраполяции линейных операторов. Этот метод позволил получить новое доказательство неравенства типа Харди - Литтлвуда в случае $2 < r \leq \infty$ и доказать новый результат в случае $1 < r \leq 2$ для произвольных ортонормированных систем в пространствах Лоренца $L_{2,r}$.

Ключевые слова: Ряды Фурье, коэффициенты Фурье, пространство Лоренца, неравенство типа Бочкарева.

G.K.Mussabayeva

Inequality type Bochkarev

CWe study the dependence of the properties of summable Fourier series and their coefficients, namely, what can we say about the Fourier coefficients of a function that belongs to the Lorentz $L_{2,r}$. In this paper a new proof of S.V. Bochkarev, which showed that the inequalities of Hardy-Littlewood, which show the relationship of integral properties of the functions and properties of summability of its Fourier coefficients for trigonometric systems have another view of the Lorentz spaces $L_{2,r}$, in the case when r satisfies the condition $2 < r \leq \infty$. Methods of proof S.V. Bochkarev based on the specifics of trigonometric series. The article takes a different approach, based on the extrapolation of linear operators. This method allowed us to obtain a new proof of an inequality of Hardy - Littlewood in the case $2 < r \leq \infty$ and prove a new result in the case $1 < r \leq 2$ for arbitrary orthonormal systems in Lorentz spaces $L_{2,r}$.

Key words: Fourier series, Lorentz space, Fourier coefficients, inequality type Bochkarev.

Г.Қ. Мусабаева

Бочкарев типті теңсіздік

Бұл жұмыста Фурье қатарының қосындылау қасиеттері мен олардың коэффициенттерінің тәуелділігі зерттеледі, яғни $L_{2,r}$ Лоренц кеңістігіндегі функцияның Фурье коэффициенттері туралы не айтуға болатындығы жайлы. Бұл мақалада $L_{2,r}$, $(2 < r \leq \infty)$ кеңістігіндегі функциялар үшін Харди - Литтлвуд теңсіздігінің түрі $L_{p,r}$ кеңістігінде басқа болуын көрсететін С.В.Бочкарев теоремасының жаңа дәлелдемесі алынды. Бочкаревтің дәлелдеу әдістері тригонометриялық қатарларға негізделген. Бұл мақалада сызықты операторларды экстрополяциялау әдісі қолданылған. Бұл әдіс арқылы $2 < r \leq \infty$ жағдайында Харди-Литллвуд типті теңсіздіктің жаңа дәлелдеуі алынды және $1 < r \leq 2$ шарты орындалған кезде $L_{2,r}$ кеңістігіндегі кез келген ортонормалданған жүйе үшін жаңа нәтижеге қол жеткіздік.

Түйін сөздер: Фурье қатарлары, Фурье коэффициенттері, Лоренц кеңістігі, Бочкарев типті теңсіздік.

Введение

Одним из важных задач гармонического анализа является изучение взаимосвязи интегральных свойств функций и свойств суммируемости ее коэффициентов Фурье. Хорошо известные неравенства Харди-Литтлвуда, которые показывают связь интегральных свойств функций и свойств суммируемости ее коэффициентов Фурье, были получены Харди и Литтлвудом для тригонометрических систем и для функций из пространства Лебега. Пэли обобщил эти результаты на случай равномерно ограниченной ортонормированной системы [1]. Аналогичные результаты для пространств Лоренца были получены Стейном (см.[2]). Дальнейшее развитие данные результаты получили в работах [3] - [11]. С.В. Бочкаревым было показано, что для пространства Лоренца $L_{2,r}$ форма неравенства отличается от классических неравенств типа Харди - Литтлвуда. Им было доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- ортонормированная на* $[0,1]$ *система комплекснозначных функций,*

$$\|\varphi_n\|_\infty \le M,\ n = 1,2,...,$$

и пусть функция $f \in L_{2,r},\ \ 2 < r \le \infty$, *тогда справедливо следующее неравенство*

$$\sup_{n\in N}\frac{1}{|n|^{\frac{1}{2}}(\log(n+1))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}}\sum_{m=1}^{n}a_m^* \le C\|f\|_{L_{2,r}}, \tag{1}$$

где a_n *- коэффициенты Фурье по системе* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В данной работе приводится новое доказательство теоремы Бочкарева, а также получаем неравенство типа Харди и Литтлвуда в случае $1 < r \le 2$.

Лемма. *Пусть* $1 < q < 2, \quad \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- ортонормированная система,* $\|\varphi_n\| \le M$, $\forall n = 1,2,3,...$ $f \sim \sum\limits_{m\in\mathbb{N}} \hat{f}(m)\varphi_m$, *тогда для любого конечного подмножества* A *из* $\mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$\frac{1}{|A|^{1/q}}\left|\sum_{m\in A}\hat{f}(m)\right| \le \left(1+\frac{M}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{q}{q-1}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|f\|_{L_{q,2}}.$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что ортонормированные системы ограничены в совокупности.

$$\left|\sum_{m\in A}\hat{f}(m)\right| \le M|A|\|f\|_{L_1} \tag{2}$$

и из равенства Парсеваля имеем

$$\left|\sum_{m\in A}\hat{f}(m)\right| \le |A|^{1/2}\|f\|_{L_2}. \tag{3}$$

Пусть $\tau \in (0,1)$

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \le f^*(\tau), \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$f_0(x) = f(x) - f_1(x).$$

Тогда для произвольного $0 < \tau < 1$, имеем

$$\hat{f}(m) = \hat{f}_0(m) + \hat{f}_1(m)$$

$$\left|\sum_{m\in A} \hat{f}(m)\right| \le \left|\sum_{m\in A} \hat{f}_0(m)\right| + \left|\sum_{m\in A} \hat{f}_1(m)\right| \le$$

$$\le M|A| \int_0^\tau f^*(s)ds + |A|^{1/2} \left(\int_\tau^1 (f^*(s))^2 ds\right)^{1/2}.$$

Применяя неравенство Гельдера к первому слагаемому, получим

$$\left|\sum_{m\in A} \hat{f}(m)\right| \le M|A| \left(\int_0^\tau \left(t^{\frac{1}{q}} f^*(t)\right)^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \left(\int_0^\tau \left(t^{\frac{1}{q'}}\right)^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} +$$

$$+|A|^{1/2} \left(\int_\tau^\infty t^{\frac{2}{q}-1} (f^*(t))^2 t^{1-\frac{2}{q}} dt\right)^{1/2}.$$

Далее, для второго слагаемого учитывая , что супремум величины $t^{1-\frac{2}{q}}$ достигается при $t=\tau$, для $q<2$ имеем оценку

$$\left|\sum_{m\in A} \hat{f}(m)\right| \le \|f\|_{L_{q,2}} \left(\frac{M}{\sqrt{2}}|A|\tau^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{q}{q-1}\right)^{1/2} + |A|^{1/2}\tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\right).$$

Пусть теперь $\tau = \left(\frac{q-1}{q}\right)/|A|$, получим

$$\left|\sum_{m\in A} \hat{f}(m)\right| \le \left(1+\frac{M}{\sqrt{2}}\right)|A|^{1/q} \left(\frac{q}{q-1}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_{q,2}}.$$

Теорема 1 *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$*- ортонормированная система,* $\|\varphi_n\| \le M$*,* $\forall n = 1,2,3,...$ *Тогда для любого* $f \in L_{2,r}[0,1]$*,* $2 < r \le \infty$ *выполнено неравенство:*

$$\sup_{N\ge 8} \frac{1}{N^{1/2}(\log_2(N+1))^{1/2-1/r}} \sum_{m=1}^N \hat{f}^*(m) \le (4+2\sqrt{2}M)\|f\|_{L_{2r}}.$$

Доказательство. Пусть $N \ge 8$. Тогда для произвольного $q : 1 < q < 2$ и $f \in L_{q,2}$ верна оценка: $\|f\|_{L_{q2}} \le \|f\|_{L_{2r}} \|1\|_{L_{pr'}}$, где $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ и $\frac{1}{r'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{r}$,

$\|1\|_{L_{pr'}} = \left(\int\limits_0^1 t^{\frac{r'}{p}} \frac{dt}{t}\right)^{1/r'} = \left(\int\limits_0^1 t^{r'\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \frac{dt}{t}\right)^{1/r'} = \left(\frac{1}{r'\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\right)^{1/r'} \le \left(\frac{2q}{2-q}\right)^{1/r'} \cdot \|f\|_{L_{q,2}} \le \left(\frac{2q}{2-q}\right)^{1/r'} \|f\|_{L_{2,r}}$. Воспользуемся леммой и получим следующее

$$\frac{1}{N^{1/q}} \sum_{k=1}^N \hat{f}^*(k) \le \left(1+\frac{M}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{q}{q-1}\right)^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \|f\|_{L_{q,2}} \le$$

$$\leq \left(1+\frac{M}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{q}{q-1}\right)^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2q}{2-q}\right)^{1/r'}\|f\|_{L_{2,r}}.$$

Учитывая произвольность параметра q, положим $q=\frac{2\log_2 N}{\log_2 N+2}<2$, $\frac{1}{q}-\frac{1}{2}=\frac{1}{\log_2 N}, \quad N^{1/q}=2N^{1/2}$.

$$\frac{1}{|N|^{1/2}}\sum_{k=1}^{N}\hat{f}^*(k)\leq 2\left(1+\frac{M}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q}}\right)^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\right)^{1/r'}\|f\|_{L_{2,r}}\leq$$

$$\leq 2\left(1+\frac{M}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\log_2 N}\right)}\right)^{\frac{1}{\log_2 N}}(\log_2 N)^{1/r'}\|f\|_{L_{2,r}}.$$

Учитывая, что $N\geq 8$, мы получим следующую оценку

$$\frac{1}{|N|^{1/2}(\log_2 N)^{1/2-1/r}}\sum_{k=1}^{N}\hat{f}^*(k)\leq(4+2\sqrt{2}M)\|f\|_{L_{2,r}}.$$

Взяв верхнюю точную грань по всем N из $\mathbb{N}$, получим

$$\sup_{N\geq 8}\frac{1}{N^{1/2}(\log_2(N+1))^{1/2-1/r}}\sum_{k=1}^{N}\hat{f}^*(k)\leq(4+2\sqrt{2}M)\|f\|_{L_{2,r}}.$$

Теорема 2 *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- ортонормированная система,* $\|\varphi_n\|\leq M$, $\forall n=1,2,3,...$ $f\sim\sum_{k=1}^{\infty}\hat{f}(k)\varphi_k$*.Тогда для любого* $f\in L_{2,r}[0,1]$, $1\leq r\leq 2$ *выполнено неравенство:*

$$\|f\|_{L_{2,r}}\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\hat{f}^*(k)k^{-\frac{1}{2}}(\log_2(k+1))^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Используя двойственное представление нормы в пространстве Лоренца $L_{2,r}$, получим

$$\|f\|_{L_{2,r}}=\sup_{\|g\|_{L_{2,r'}}=1}\int_0^1 f(t)g(t)dt=\sup_{\|g\|_{L_{2,r'}}=1}\sum_{k=1}^{N}\hat{f}(k)\hat{g}(k).$$

Используя свойство невозрастающей перестановки, оценим сверху следующую норму

$$\|f\|_{L_{2,r}}\leq\sup_{\|g\|_{L_{2,r'}}=1}\sum_{k=1}^{\infty}\hat{f}^*(k)\hat{g}^*(k)\leq\sup_{\|g\|_{L_{2,r'}}=1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\hat{f}^*(k)-\hat{f}^*(k+1)\right)\sum_{m=1}^{k}\hat{g}^*(m)=$$

$$=\sup_{\|g\|_{L_{2,r'}}=1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\hat{f}^*(k)-\hat{f}^*(k+1)\right)k^{1/2}(\log_2 k)^{1/2-1/r}\frac{1}{k^{1/2}(\log_2 k)^{1/2-1/r}}\sum_{m=1}^{k}\hat{g}^*(m).$$

Так как

$$\sup_{\|g\|_{L_{2,r'}}=1} \sup_k \frac{1}{k^{1/2}(\log_2 k)^{1/2-1/r}} \sum_{m=1}^{k} \hat{g}^*(m) \leq C,$$

получим

$$\|f\|_{L_{2,r}} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\hat{f}^*(k) - \hat{f}^*(k+1)\right) k^{1/2}(\log_2 k)^{1/2-1/r} \approx$$

$$\approx C \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}^*(k) \left(k^{1/2}(\log_2 k)^{1/2-1/r} - (k-1)^{1/2}(\log_2 k)^{1/2-1/r}\right).$$

По теореме Лагранжа, получим следующее

$$\|f\|_{L_{2,r}} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}^*(k) k^{-1/2}(\log_2 k)^{1/2-1/r}.$$

Литература

[1] *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. // Москва. 1980. 264 с. – С. 60–68.

[2] *Stein Elias M.* Interpolation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. 83, pp 482 -492.

[3] *Бочкарев С.В.* Теорема Хаусдорфа - Юнга - Рисса в пространствах лоренца и мультипликативные неравенства // Труды математического института им. В.А.Стеклова. 1997.Т.219. С 103 -114.

[4] *Нурсултанов Е. Д.* О коэффициентах кратных рядов Фурье из Lp-пространств // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. 64:1. С.95-122.

[5] *Kopezhanova A., Nursultanov E., Persson L.-E.* Relations between summability of the Fourier coefficients in regular systems and functions from some Lorentz type spaces // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2010. 152. pp 73 -88. 1995. – V.38. – P. 2635–2646.

[6] *Жантакбаева А.М., Нурсултанов Е.Д.* О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца // Математический журнал. Алматы. 2013. N 1(47). С. 73-89.

[7] *Дъяченко М. И., Нурсултанов Е. Д.* Теорема Харди- Литтлвуда для тригонометрических рядов с α - монотонными коэффициентами // Матем. сб. 2009. 200:11. С.45-60. 1081–1093.

[8] *Zhantakbayeva A.M., Dyachenko M.I., Nursultanov E.D.* Hardy- Littlewood type theorems – Amsterdam : Eurasian Mathematical Journal. 2013. N 2. V 4. pp 140-143.

[9] *Nakayama A. and Kuwahara F.* A Macroscopic Turbulence Model for Flow in a Porous Medium // ASME J. Fluids Eng. – 1999. – V. 121. – P. 427–433.

[10] *Тлеуханова Н.Т., Мусабаева Г.К.* О коэффициентах рядов Фурье по тригонометрическим системам в пространстве $L_{2,r}$ // Матем. заметки. 2013. Т.94:6. С.884-888.

References

[1] *J.Bergh, J.L* Interpolation spaces// Berlin. 1976. 264 p.

[2] *Stein Elias M.* Interpolation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. 83, pp 482-492.

[3] *S. V. Bochkarev.* Hausdorff-Young-Riesz Theorem in Lorentz Spaces and Multiplicative Inequalities // Proc. Steklov Inst. Math.1997. V.219. P.96-107.

[4] *E.D. Nursultanov.* On the coefficients of multiple Fourier series in L_p-spaces // Izvestiya: Mathematics. 2000. 64:1. pp 95-122.

[5] *Kopezhanova A., Nursultanov E., Persson L.-E.* Relations between summability of the Fourier coefficients in regular systems and functions from some Lorentz type spaces // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2010. 152. pp 73-88.

[6] *A.M. Zhantakbayeva, E.D. Nursultanov.* On summability of the Fourier coefficients from Lorentz spaces // Mathematical journal. Almaty.2013. N 1(47). pp 73-89.

[7] *M.I.Dyachenko, E.D. Nursultanov.* Hardy-Littlewood theorem for trigonometric series with α -monotone coefficients // Int. Sbornik: Mathematics.2009. 200:11. pp 45-60.

[8] *Zhantakbayeva A.M., Dyachenko M.I., Nursultanov E.D.* Hardy- Littlewood type theorems : Eurasian Mathematical Journal. 2013. N 2. V 4. pp 140-143.

[9] *N. T. Tleukhanova, G. K. Musabaeva.* On the coefficients of fourier series with respect to trigonometric systems in the space $L_{2,r}$, // Izvestiya: Mathematics. 2000. 64:1. pp 95-122.

[10] *E.D. Nursultanov.* Net spaces and inequalities of Hardy-Littlewood type // Sbornik: Mathematics. 1998. 189:3. pp 83-102.