МРНТИ 50.03.03 https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-3-m3

Исследование систем управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости по выходу объекта управления

Бейсенби М.А., Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан, E-mail: beisenbi@mail.ru
Башеева Ж.О., Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан, E-mail: zhuldyz.basheyeva@gmail.com

Рассматривается система управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости по выходу объекта в классе однопараметрических структурно-устойчивых отображений из теорий катастроф. Актуальной проблемой является создание систем управления, обеспечивающих в некотором смысле наилучшую защиту от неопределенности в знании свойств объекта и неустойчивости систем управления. Способность системы управления сохранять устойчивость в условиях параметрической или непараметрической неопределенности понимаются как робастность системы. В общей постановке исследования системы на робастную устойчивость состоит в указании ограничений на изменение неопределенных параметров системы управления, при которых сохраняется устойчивость. Исследование динамического компенсатора с повышенным потенциалом робастной устойчивости производится градиентно-скоростным методом вектор-функций Ляпунова. Область робастной устойчивости системы управления по выходу объекта получены в форме системы простейших неравенств для матрицы параметров регулятора и наблюдающего устройства. Предложенный градиентно-скоростной метод вектор-функций Ляпунова при исследовании системы управления по выходу объекта позволяет исключить сложных и неоднозначных вычислений и канонических преобразований и позволяет определить области выбора параметров регулятора и наблюдателя, обеспечивающего заданные (желаемые) переходные характеристики замкнутой системы.
Ключевые слова: системы управления, замкнутая система управления, вектор-функция А.М. Ляпунова, градиентно-скоростной метод.

Басқару объектілерінің шығуына сенімді тұрақтылық үшін жоғары әлеуеті бар бақылау жүйелерін талдау

Бейсенби М.А., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан, E-mail: beisenbi@mail.ru
Башеева Ж.О., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан, E-mail: zhuldyz.basheyeva@gmail.com

Бұл мақалада апаттық теориялардың бір параметрлі құрылымдық тұрғыдан тұрақты көрсеткіштерін сыныпта объектіні шығаруда сенімді тұрақтылықты қамтамасыз ететін әлеуеті жоғары басқару жүйелері қарастырылады. Нақты мәселе - белгілі бір мағынада объектінің қасиеттері мен басқару жүйелерінің тұрақсыздығы туралы белгісіздікке қарсы ең жақсы қорғанысты қамтамасыз ететін басқару жүйелерінің жобалауы. Параметрлік немесе параметрлік емес белгісіздік жағдайында басқару жүйесінің тұрақтылықты ұстап тұру мүмкіндігі жүйенің сенімділігі ретінде түсініледі. Тұрақты тұрақтылық жүйесін зерттеудің жалпы тұжырымдамасында бақылау жүйесінің орнықтырылмаған параметрлерінің ауытқуына қолданылатын шектеулерді көрсету қажет, оған сәйкес тұрақтылық сақталады. Басқару жүйелерінің сенімді тұрақтылығын зерделеу мәселесіне көптеген құжаттар тапсырылды. Тұрақты тұрақтылық үшін жоғары әлеуеті бар динамикалық компенсаторды зерттеу Ляпуновтың векторлық функцияларының градиент-жылдамдық әдісімен жүзеге асырылады. Нысанның шығуына арналған басқару жүйесінің

тұрақты тұрақтылығы облысы контроллер параметрлері мен бақылау құрылғысының матрицасы үшін қарапайым теңсіздіктер жүйесі түрінде алынады. Ляпуновтың векторлық функциясының ұсынылған градиент-жылдамдық әдісі объектінің шығыс басқару жүйесін зерттеуде күрделі және біркелкі емес есептеулерді және канондық өзгерістерді жояды және контроллер параметрлерін таңдау аймағын анықтауға мүмкіндік береді және бақылаушының қажетті өтпелі сипаттамаларын қамтамасыз етеді жабық жүйе.
Түйін сөздер: басқару жүйелері, жабық ілмекті басқару жүйесі, Ляпуновтың векторлық функциясы, градиент-жылдамдық әдісі.

The analysis of control systems with a high potential for robust stability on the control object output

Beisenbi M.A., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan,
E-mail: beisenbi@mail.ru
Basheyeva Zh.O., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan,
E-mail: zhuldyz.basheyeva@gmail.com

This paper considers control systems with an increased potential for robust stability in the output of an object in the class of one-parameter structurally stable mappings from catastrophe theory. The actual problem is the design of control systems that provide in some sense the best protection against uncertainty in the knowledge of the properties of an object and the instability of control systems. The ability of a control system to maintain stability under parametric or non-parametric uncertainty is understood as the robustness of the system. In the general formulation of the study of the system for robust stability, it is necessary to indicate the restrictions applied to the fluctuation of uncertain parameters of the control system, under which stability is maintained. A large number of papers have been devoted to the problem of studying robust stability of control systems. The study of the dynamic compensator with a high potential for robust stability is performed by the gradient-velocity method of Lyapunov vector functions. The area of robust stability of the control system for the object output is obtained in the form of a system of the simplest inequalities for the matrix of controller parameters and the monitoring device. The proposed gradient-velocity method of Lyapunov vector functions in the study of the output control system of the object eliminates complex and ambiguous calculations and canonical transformations and allows one to determine the region of choice of controller parameters and the observer, providing the desired transition characteristics of a closed system.

Key words: Control Systems, Closed-Loop Control Systems, Lyapunov Vector Function, Gradient-Speed Method.

1 Введение

Для современных систем управления характерны всевозрастающая сложность объектов управления, требования высокой эффективности. В этих системах неопределенность может быть обусловлена как наличием неконтролируемых возмущений, действующих на объект управления [1], так и незнанием истинных значений параметров объектов управления и непредсказуемым изменением их во времени [1,2,3,4].

Настоящая статья посвящена построению и исследованию систем управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости по выходу динамического объекта с неопределенными параметрами, с подходом к построению систем управления в классе однопараметрических структурно-устойчивых отображений [5,6,7], позволяющие предельно увеличить потенциал робастной устойчивости системы управления.

2 Обзор литературы

Проблеме исследования робастной устойчивости систем управления посвящено большое число работ. В этих работах в основном исследуется робастная устойчивость полиномов, матриц в рамках линейного принципа устойчивости [2,3,4].Следует отметить, что неустойчивость определяется выходом неопределенных параметров системы за границы робастной устойчивости. Известные подходы не позволяют расширить область устойчивости системы на основе выбора закона управления. В практических задачах, связанных с разработкой и созданием систем управления в условиях существенной параметрической неопределенности, увеличение потенциала робастной устойчивости [5,6,7,8,9] является одним из ключевых факторов, гарантирующих системе управления от режима неустойчивости. В связи с этим, в условиях неопределенности предложены методы синтеза и исследования систему управления с гарантированно широкой областью робастной устойчивости, названные системами управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости [5,6]. Концепция построения системы управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости базируется на прикладных результатах теорий катастроф [10,11].

Актуальной проблемой является создание систем управления по выходу объекта, когда на практике доступен к измерению не вектор состояния $x(t)$, а выход объекта $y(t)$. В том случае используется в законе управления не сами переменные состояния объекта $x(t)$, а их оценки $\hat{x}(t)$, полученные с помощью наблюдающего устройства [12,13,14,15] и требуется построить систему управления по выходу объекта в форме динамического компенсатора[12] с повышенным потенциалом робастной устойчивости. В работе также предлагается метод к исследованию устойчивости и синтезу систем управления по выходу объекта на основе градиентно-скоростного метода вектор-функций Ляпунова [5,8,9,16,17]. Исследование устойчивости замкнутой системы управления по выходу объекта и решение задачи синтеза регулятора (определения элементов матрицы усиления) и наблюдателя (вычисления элементов матрицы наблюдающего устройства) основываются на прямом методе А.М. Ляпунова [18,19,20].

3 Материал и методы

Для упрощения системы, можно преобразовать уравнение состояния. Для этого используем ошибку оценивания $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, и (1)-(3) можно преобразовать к виду:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$$u = -\hat{x}^3 + k\hat{x} \tag{2}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (A - LC)\varepsilon, \quad \varepsilon(t_0) = x_0 - \hat{x}_0 \tag{3}$$

Здесь закон управления задан в форме однопараметрических структурно-устойчивых отображений относительно вектору состояния $x(t)$ и вектору ошибки $\varepsilon(t)$

$$\hat{x}(t) = x(t) - \varepsilon(t), \quad \text{и} \quad u(t) = -x^3 + kx - \varepsilon^3 + k\varepsilon - 3x\varepsilon(x + \varepsilon)$$

Уравнения состояния (1) – (3) можем представить в виде:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(-x^3 + kx) + B(-\varepsilon^3 + K\varepsilon) - 3Bx\varepsilon(x+\varepsilon), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A\varepsilon - LC\varepsilon, \quad \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0 \tag{5}$$

Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, соответственно система имеет матрицы вида

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 \end{Vmatrix}, \quad L = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ l_n \end{Vmatrix},$$

$$C = \|c_1, c_2, \dots, c_n\|$$

Систему (4), (5) в развернутой форме представим в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -(a_n + b_n k_1)x_1 - (a_{n-1} + b_n k_2)x_2 - (a_{n-2} + b_n k_3)x_3 - \dots \\ \qquad \dots - (a_1 + b_n k_n)x_n + b_n k_1 \varepsilon_1 + b_n k_2 \varepsilon_2 + b_n k_3 \varepsilon_3, \dots, + b_n k_n \varepsilon_n \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \\ \dots \\ \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n \\ \dot{\varepsilon}_n = -(a_n + l_n c_1)\varepsilon_1 - (a_{n-1} + l_n c_2)\varepsilon_2 - (a_{n-2} + l_n c_3)\varepsilon_3 - \dots - (a_1 + l_n c_n)\varepsilon_n \end{cases} \tag{6}$$

При отсутствии внешних воздействий процессы в системе (4) и (5) должны асимптотически приближаться к процессам в системе с регулятором по состоянию, как если бы замкнутая система управления по вектору состояния, была подвержена действию затухающих возмущений. Роль этих возмущений играет, составляющая зависящая от $\varepsilon(t)$ в уравнении (6) Ошибка должна быть затухающей и скорость затухания ошибки определяется при синтезе наблюдателя. Основное свойство системы (4), (5) или (6) – это асимптотическая устойчивость. Находим установившееся состояние системы (6):

$$x_{1s} = 0, \; x_{2s} = 0, \dots, x_{ns} = 0 \;\; \text{и} \;\; \varepsilon_{1s} = 0, \; \varepsilon_{2s} = 0, \dots, \varepsilon_{ns} = 0 \tag{7}$$

$$x_{is}^{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a_{n-i+1}}{b_{n-i+1}} + k_i}, \quad \varepsilon_{is} = 0, \quad i = 1, \dots, n \tag{8}$$

Исследуем робастной устойчивости установившихся состояний системы (6) градиентно-скоростным методом вектор-функций Ляпунова [5,7,16]. Установившееся состояние (7) исследуется с начало. Находим из уравнения состояния (6) компонентов вектора градиента вектор функций Ляпунова $V(x,\varepsilon) = (V_1(x,\varepsilon), V_2(x,\varepsilon), \ldots, V_{2n}(x,\varepsilon))$:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{\partial V_1(x,\varepsilon)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial V_1(x,\varepsilon)}{\partial x_2} = -x_2, \quad \frac{\partial V_1(x,\varepsilon)}{\partial x_3} = 0, \ldots, \frac{\partial V_1(x,\varepsilon)}{\partial x_n} = 0, \\
\frac{\partial V_1(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} = 0, \quad \frac{\partial V_1(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_2} = 0, \quad \frac{\partial V_1(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} = 0, \ldots, \frac{\partial V_1(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_n} = 0 \\
\frac{\partial V_2(x,\varepsilon)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial V_2(x,\varepsilon)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial V_2(x,\varepsilon)}{\partial x_3} = -x_3, \ldots, \frac{\partial V_2(x,\varepsilon)}{\partial x_n} = 0, \\
\frac{\partial V_2(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} = 0, \quad \frac{\partial V_2(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_2} = 0, \quad \frac{\partial V_2(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} = 0, \ldots, \frac{\partial V_2(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_n} = 0 \\
\ldots \\
\frac{\partial V_n(x,\varepsilon)}{\partial x_1} = b_n x_1^3 - (a_n + b_n k_1) x_1, \quad \frac{\partial V_n(x,\varepsilon)}{\partial x_2} = b_{n-1} x_2^3 - (a_{n-1} + b_{n-1} k_2) x_2, \\
\frac{\partial V_n(x,\varepsilon)}{\partial x_3} = b_{n-2} x_3^3 - (a_{n-2} + b_{n-2} k_3) x_3, \ldots, \frac{\partial V_n(x,\varepsilon)}{\partial x_n} = b_1 x_n^3 - (a_1 + b_1 k_n) x_n, \\
\frac{\partial V_n(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} = b_n \varepsilon_1^3 - b_n k_1 \varepsilon_1 - 3 b_n x_1 \varepsilon_1 (x_1 + \varepsilon_1), \\
\frac{\partial V_n(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_2} = b_{n-1} \varepsilon_2^3 - b_{n-1} k_2 \varepsilon_2 - 3 b_{n-1} x_2 \varepsilon_2 (x_2 + \varepsilon_2), \\
\frac{\partial V_n(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} = -b_{n-2} \varepsilon_3^3 - b_{n-2} k_3 \varepsilon_3 - 3 b_{n-2} x_3 \varepsilon_3 (x_3 + \varepsilon_3), \ldots, \\
\frac{\partial V_n(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_n} = -b_1 \varepsilon_n^3 - b_1 k_n \varepsilon_n - 3 b_1 x_n \varepsilon_n (x_n - \varepsilon_n), \ldots, \\
\frac{\partial V_{n+1}(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} = 0, \quad \frac{\partial V_{n+1}(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_2} = -\varepsilon_2, \quad \frac{\partial V_{n+1}(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} = 0, \ldots, \frac{\partial V_{n+1}(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_n} = 0, \\
\frac{\partial V_{n+1}(x,\varepsilon)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n; \\
\frac{\partial V_{n+2}(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} = 0, \quad \frac{\partial V_{n+2}(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_2} = 0, \quad \frac{\partial V_{n+2}(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} = -\varepsilon_3, \ldots, \frac{\partial V_{n+2}(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_n} = 0, \\
\ldots \\
\frac{\partial V_{2n}(x,\varepsilon)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n; \\
\frac{\partial V_{2n}(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} = -(a_n - l_n c_1) \varepsilon_1, \quad \frac{\partial V_{2n}(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_2} = -(a_{n-1} - l_n c_2) \varepsilon_2, \\
\frac{\partial V_{2n}(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} = -(a_{n-2} - l_n c_3) \varepsilon_3, \ldots, \frac{\partial V_{2n}(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_n} = -(a_1 - l_n c_n) \varepsilon_n
\end{array}
\right.
\tag{9}
$$

Из (6) разложения компонентов вектора скорости представим в виде:

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{dx_1}{dt}\right)_{x_2} = x_2, \quad \left(\dfrac{dx_2}{dt}\right)_{x_3} = x_3, \\
\dots \\
\left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)_{x_1} = -b_n x_1^3 + (a_n + b_n k_1)x_1, \quad \left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)_{x_2} = -b_{n-1}x_2^3 + (a_{n-1} + b_{n-1}k_2)x_2, \\
\left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)_{x_3} = -b_{n-2}x_3^3 + (a_{n-2} + b_{n-2}k_3)x_3, \dots, \left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)_{x_n} = -b_1 x_n^3 + (a_1 + b_1 k_n)x_n, \\
\left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)_{\varepsilon_1} = -b_n \varepsilon_1^3 + b_n k_1 \varepsilon_1 - 3b_n x_1 \varepsilon_1 (x_1 + \varepsilon_1), \\
\left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)_{\varepsilon_2} = -b_{n-1}\varepsilon_2^3 + b_{n-1}k_2\varepsilon_2 - 3b_{n-1}x_2\varepsilon 2(x_2 + \varepsilon_2), \\
\left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)_{\varepsilon_3} = -b_{n-2}\varepsilon_3^3 + b_{n-2}k_3\varepsilon_3 - 3b_{n-2}x_3\varepsilon_3(x_3 + \varepsilon_3), \dots, \\
\left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)_{\varepsilon_n} = -b_1\varepsilon_n^3 - b_1 k_n \varepsilon_n - 3b_1 x_n \varepsilon_n (x_n - \varepsilon_n), \\
\left(\dfrac{d\varepsilon_1}{dt}\right)_{\varepsilon_2} = \varepsilon_2, \quad \left(\dfrac{d\varepsilon_2}{dt}\right)_{\varepsilon_3} = \varepsilon_3, \\
\left(\dfrac{d\varepsilon_n}{dt}\right)_{\varepsilon_1} = (a_n - l_n c_1)\varepsilon_1, \\
\left(\dfrac{d\varepsilon_n}{dt}\right)_{\varepsilon_2} = (a_{n-1} - l_n c_2)\varepsilon_2, \ \left(\dfrac{d\varepsilon_n}{dt}\right)_{\varepsilon_3} = (a_{n-2} - l_n c_3)\varepsilon_3, \dots, \left(\dfrac{d\varepsilon_n}{dt}\right)_{\varepsilon_n} = (a_1 - l_n c_n)\varepsilon_n
\end{cases}
\tag{10}
$$

Полная производная по времени функции Ляпунова, определяется как скалярное произведение вектора градиента (9) на вектор скорости (10):

$$
\begin{aligned}
&\frac{dV(x,\varepsilon)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V_i(x,\varepsilon)}{\partial x_k}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{x_k} + \sum_{i=n+1}^{2n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V_i(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_k}\left(\frac{d\varepsilon_i}{dt}\right)_{\varepsilon_k} = \\
&= -x_2^2 - x_3^2, \dots, -x_n^2 - (b_n x_1^3 - (a_n - b_n k_1)x_1)^2 - (b_{n-1}x_2^3 - (a_{n-1} - b_{n-1}k_2)x_2)^2 - \\
&-(b_{n-2}x_3^3 - (a_{n-2} + b_{n-2}k_3)x_3)^2 - \dots - (b_n\varepsilon_1^3 - b_n k_1\varepsilon_1 - b_n x_1\varepsilon_1(x_1+\varepsilon_1))^2 - \\
&-(b_{n-1}\varepsilon_2^3 + b_{n-1}k_2\varepsilon_2 - 3b_{n-1}x_2\varepsilon_2(x_2 - \varepsilon_2))^2 - \\
&-(b_{n-2}\varepsilon_3^3 - b_{n-2}k_3\varepsilon_3 - b_{n-2}x_3\varepsilon_3(x_3+\varepsilon_3))^2, \dots, \\
&-(b_1\varepsilon_n^3 - b_1 k_n\varepsilon_n - b_1 x_n\varepsilon_n(x_n - \varepsilon_n))^2, -\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 - \dots - \\
&-\varepsilon_n^2 - ((a_n - l_n c_1)\varepsilon_1)^2 - ((a_{n-1} - l_n c_2)\varepsilon_2)^2, -((a_{n-2} - l_n c_3)\varepsilon_3)^2, \dots, -(a_1 + l_n c_n)\varepsilon_n)^2
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Из (11) следует, что полная производная по времени от вектор функции Ляпунова является знакоотрицательной функцией.

Функцию Ляпунова по компонентам вектора градиента из (9) можем представить в с виде:

$$
\begin{aligned}
V(x,\varepsilon) &= \frac{1}{4}b_n x_1^4 - \frac{1}{2}(a_n - b_n k_1)x_1^2 + \frac{1}{4}b_{n-1}x_2^4 - \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1}k_2 + 1)x_2^2 + \\
&+ \frac{1}{4}b_{n-2}x_3^4 - \frac{1}{2}(a_{n-2} + b_{n-2}k_3 + 1)x_3^2 + \ldots + \\
&+ \frac{1}{4}b_1 x_B^4 - \frac{1}{2}(a_1 + b_n k_n + 1)x_n^2 + \frac{1}{4}b_n\varepsilon_1^4 - \frac{1}{2}b_n k_1\varepsilon_1^2 - \frac{1}{2}b_n x_1^2\varepsilon_1^2 + \frac{1}{3}b_n x_1\varepsilon_1^3 + \\
&+ \frac{1}{4}b_{n-1}\varepsilon_2^4 - \frac{1}{2}b_{n-1}k_2\varepsilon_2^2 - \frac{1}{2}b_{n-1}x_2^2\varepsilon_2^2 + \frac{1}{3}b_{n-1}x_2\varepsilon_2^3 + \\
&+ \frac{1}{4}b_{n-2}\varepsilon_3^4 - \frac{1}{2}b_{n-2}k_3\varepsilon_3^2 - \frac{1}{2}b_{n-2}x_3^2\varepsilon_3^2 + \frac{1}{3}b_{n-2}x_3\varepsilon_3^3 + \ldots + \\
&+ \frac{1}{4}b_1\varepsilon_n^4 - \frac{1}{2}b_1 k_n\varepsilon_n^2 - \frac{1}{3}b_1 x_n^2\varepsilon_n^2 - \frac{1}{2}(a_n - l_n c_1)\varepsilon_1^2 - \frac{1}{2}(a_{n-1} - l_n c_2 + 1)\varepsilon_2^2 - \\
&- \frac{1}{2}(a_{n-2} - l_n c_3 + 1)\varepsilon_3^2 - \ldots - \frac{1}{2}(a_1 - l_n A_n + 1)\varepsilon_n^2,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Положительная определенность функций (12) не очевидна, поэтому воспользуемся леммой Морса из теорий катастроф [10,11,21]. Функция (12) в окрестности стационарного состояния (7) удовлетворяет всем условиям леммы Морса. Это позволяет функции (12) представить в окрестности установившегося состояния (7) в виде следующей квадратичной формы:

$$
\begin{aligned}
V(x,\varepsilon) &= -\frac{1}{2}(a_n - b_n k_1)x_1^2 - \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}k_2 + 1)x_2^2 - \frac{1}{2}(a_{n-2} - b_{n-2}k_3 + 1)x_3^2 - \ldots \\
&- \frac{1}{2}(a_1 - b_1 k_n + 1)x_n^2 - \frac{1}{2}(a_n - l_n c_1 + b_n k_1)\varepsilon_1^2 - \\
&- \frac{1}{2}(a_{n-1} - l_n c_2 + b_{n-1}k_2 + 1)\varepsilon_2^2 - \frac{1}{2}(a_{n-2} - l_n c_3 + b_{n-2}k_3 + 1)\varepsilon_3^2 - \ldots - \\
&- \frac{1}{2}(a_1 - l_n c_n + b_1 k_n + 1)\varepsilon_n^2,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Условие существования вектор функции Ляпунова определяется положительной определенностью квадратичной формы (13):

$$
\begin{cases}
a_n + b_n k_1 < 0 \\
a_{n-1} + b_{n-1}k_2 + 1 < 0 \\
a_{n-2} + b_{n-2}k_3 + 1 < 0 \\
\ldots \\
a_1 + b_1 k_n + 1 < 0
\end{cases}
\tag{14}
$$

$$\begin{cases} a_n - l_n c_1 - b_n k_1 < 0 \\ a_{n-1} - l_n c_2 - b_{n-1} k_2 + 1 < 0 \\ a_{n-2} - l_n c_3 - b_{n-2} k_3 + 1 < 0 \\ \ldots \\ a_1 - l_n c_n - b_1 k_n + 1 < 0 \end{cases} \tag{15}$$

Уравнение состояния системы (6) в отклонениях относительно установивщегося состояния (8) записывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -b_n x_1^3 + 3\sqrt{a_n + b_n k_1} x_1^2 - (a_n + b_n k_1) x_1 - b_n \varepsilon_1^3 + b_n k_1 \varepsilon_1 - b_n x_1^2 \varepsilon_1 + b_n x_1 \varepsilon_1^2 - \\ -b_{n-1} x_2^3 + 3\sqrt{a_{n-1} + b_{n-1} k_2} x_2^2 - (a_{n-1} + b_{n-1} k_2) x_2 - \\ -b_{n-1} \varepsilon_2^3 + b_{n-1} k_2 \varepsilon_2 - 3b_{n-1} x_2^2 \varepsilon_2 - 3b_{n-1} x_2 \varepsilon_2^2 - \\ -b_{n-2} x_3^3 + 3\sqrt{a_{n-2} + b_{n-2} k_3} x_3^2 - (a_{n-2} + b_{n-2} k_3) x_3 - \\ -b_{n-2} \varepsilon_3^3 - 3b_{n-2} k_3 \varepsilon_3 - 3b_{n-2} x_3^2 \varepsilon_3 - 3b_{n-2} x_3 \varepsilon_3^2 - \ldots - \\ -b_1 x_n^3 + 3\sqrt{a_1 - b_1 k_n} x_n^2 - (a_1 + b_1 k_n) x_n - b_1 \varepsilon_n^3 + b_1 k_n \varepsilon_n - 3b_1 x_n^2 \varepsilon_n - 3b_1 x_n \varepsilon_n^2 \\ \dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3 \\ \ldots \\ \dot{\varepsilon}_{n-1} = \varepsilon_n \\ \dot{\varepsilon}_n = (a_n - l_n c_1)\varepsilon_1 + (a_{n-1} - l_n c_2)\varepsilon_2 + (a_{n-2} - l_n c_3)\varepsilon_3 + \ldots + (a_1 - l_n c_n)\varepsilon_n \end{cases} \tag{16}$$

Устойчивость системы (16) исследуется градиентно-скоростным методом вектор-функций Ляпунова [5,7,16,17].

Полную производную по времени от вектор функции Ляпунова находим в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{dV(x,\varepsilon)}{dt} = -x_2^2 - x_3^2, \ldots, -x_n^2 - (b_n x_1^3 - 3\sqrt{a_n + b_n k_1} x_1^2 + \\ &+(a_n + b_n k_1) x_1)^2 - (b_{n-1} x_2^3 - 3\sqrt{a_{n-1} + b_{n-1} k_2} x_2^2 + \\ &+(a_{n-1} + b_{n-1} k_2) x_2)^2 - (b_{n-2} x_3^3 - 3\sqrt{a_{n-2} + b_{n-2} k_3} x_3^2 + \\ &+(a_{n-2} + b_{n-2} k_3) x_3)^2 - \ldots - (b_1 x_n^3 - 3\sqrt{a_1 - b_1 k_n} x_n^2 + \\ &+(a_1 + b_1 k_n) x_n)^2 - (b_n \varepsilon_1^3 - b_n k_1 \varepsilon_1 - b_n x_1^2 \varepsilon_1 - b_n x_1 \varepsilon_1^2)^2 - \\ &-(b_{n-1} \varepsilon_2^3 - b_{n-1} k_2 \varepsilon_2 - b_{n-1} x_2^2 \varepsilon_2 - b_{n-1} x_2 \varepsilon_2^2)^2 - \\ &-(b_{n-2} \varepsilon_3^3 - b_{n-2} k_3 \varepsilon_3 - b_{n-2} x_3^2 \varepsilon_3 - b_{n-2} x_3 \varepsilon_3^2)^2 - \ldots - \\ &-(b_1 \varepsilon_n^3 - b_1 k_n \varepsilon_n - b_1 x_n^2 \varepsilon_n - b_1 x_n \varepsilon_n^2)^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 - \ldots - \\ &-\varepsilon_n^2 - ((a_n \mp l_n c_1)^2 \varepsilon_1^2 - ((a_{n-1} \mp l_n c_2)^2 \varepsilon_2^2 - \\ &-((a_{n-2} \mp l_n c_3)^2 \varepsilon_3^2 - \ldots - (a_1 \mp l_n c_n)^2 \varepsilon_n^2 \end{aligned} \tag{17}$$

Из (17) следует, что полная производная по времени от вектор - функции Ляпунова гарантированно является знако-отрицательной функцией.

Функцию Ляпунова можем представить скалярной форме в виде:

$$
\begin{aligned}
&V(x,\varepsilon)=\frac{1}{4}x_1^4-\sqrt{a_n+b_nk_1}x_1^3+\frac{1}{2}(a_n+b_nk_1)x_1^2+\frac{1}{4}b_{n-1}x_2^4-\\
&-\sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}k_2}x_2^3+\frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}k_2-1)x_2^2+\frac{1}{4}b_{n-2}x_3^4-\\
&-\sqrt{a_{n-2}+b_{n-2}k_3}x_3^4-\frac{1}{2}(a_{n-2}+b_{n-2}k_3-1)x_3^2+\ldots+b_1x_n^4-\\
&-\sqrt{a_1-b_1k_n}x_n^3+\frac{1}{2}(a_1+b_1k_n-1)x_n^2+\frac{1}{4}b_n\varepsilon_1^4-\frac{1}{2}b_nk_1\varepsilon_1^2-\\
&-\frac{1}{2}b_nx_1^2\varepsilon_1^2-\frac{1}{3}b_nx_1\varepsilon_1^2+\frac{1}{4}b_{n-1}\varepsilon_2^4-\frac{1}{2}b_{n-1}k_2\varepsilon_2^2-\frac{1}{2}b_{n-1}x_2^2\varepsilon_2^2-\\
&-\frac{1}{3}b_{n-1}x_2\varepsilon_2^3+\frac{1}{4}b_{n-2}\varepsilon_3^n-\frac{1}{2}b_{n-2}k_3\varepsilon_3^2-\frac{1}{2}b_{n-2}x_3^2\varepsilon_3^2-\frac{1}{3}b_{n-2}x_3\varepsilon_3^3+\ldots+\\
&+\frac{1}{4}b_1\varepsilon_n^3-\frac{1}{2}b_1k_n\varepsilon_n^2-\frac{1}{2}b_1x_n^2\varepsilon_n^2-\frac{1}{3}x_n\varepsilon_n^3-\frac{1}{2}(a_n-l_nc_1-1)\varepsilon_1^2-\frac{1}{2}(a_{n-1}-l_nc_2-1)\varepsilon_2^2-\\
&-\frac{1}{2}((a_{n-2}-l_nc_3-1)\varepsilon_3^2+\ldots+\frac{1}{2}(a_1-l_nc_n-1)\varepsilon_n^2
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Функция (18) в окрестности стационарного состояния (8) удовлетворяет всем условиям теммы Морса из теорий катастроф. Это позволяет функций (18) в окрестности установившегося состояния (8) в виде следующей квадратичной формы.

$$
\begin{aligned}
&V(x,\varepsilon)=\frac{1}{2}(a_n+b_nk_1)x_1^2+\frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}k_2-1)x_2^2+\frac{1}{2}(a_{n-2}+b_{n-2}k_3-1)x_3^2+\ldots\\
&+\frac{1}{2}(a_1-b_1k_n-1)x_n^2-\frac{1}{2}(a_n-l_nc_1-b_nk_1)\varepsilon_1^2\mp\\
&-\frac{1}{2}(a_{n-1}-l_nc_2-b_{n-1}k_2-1)\varepsilon_2^2-\frac{1}{2}(a_{n-2}-l_nc_3-b_{n-2}k_3-1)\varepsilon_3^2,\ldots,\\
&-\frac{1}{2}(a_1-l_nc_n-b_1k_n-1)\varepsilon_n^2,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Отсюда из (19) получим условие существование вектор-функции Ляпунова в виде.

$$
\begin{cases}
a_n+b_nk_1>0\\
a_{n-1}+b_{n-1}k_2-1>0\\
a_{n-2}+b_{n-2}k_3-1>0\\
\ldots\\
a_1+b_1k_n-1>0
\end{cases}
\tag{20}
$$

$$
\begin{cases}
a_n-l_nc_1-b_nk_1<0\\
a_{n-1}-l_nc_2-b_{n-1}k_2-1<0\\
a_{n-2}-l_nc_3-b_{n-2}k_3-1<0\\
\ldots\\
a_1-l_nc_n-b_1k_n-1<0
\end{cases}
\tag{21}
$$

4 Результаты и обсуждение

Система (4) и (5) является динамическим компенсатором с повышенным потенциалом работной устойчивости. Установившееся состояния (7) существует и является устойчивой при изменений неопределенных параметров системы в области (14) и (15), а стационарное состояния (8) появляется и существует при потере устойчивости установившегося состояния (7) и они одновременно не существует. Установившееся состояние (8) будет устойчивой при выполнений системы неравенств (20) и (21).

5 Заключение

Известные методы управления по выходу объекта, основаны на модельном управлении по выходу объекта. Выбор элементов матрицы регулятора и наблюдателя требует канонические преобразования и сложные и неоднозначные вычисления корней характеристического уравнения замкнутой системы. Корни характеристического многочлена [22,23] замкнутой системы получается объединением корней системы с модельным регулятором и собственных чисел наблюдателя состояния. Предлагается подход к определению области изменения параметров объекта, регулятора и наблюдателя, обеспечивающего робастную устойчивость динамическому компенсатору при любых изменениях неопределенных параметров системы. Это позволяет управлять режимами неустойчивости в системах управления. Градиентно-скоростной метод вектор-функций Ляпунова позволяет решить задачу построения систем автоматического управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости по выходу объекта непосредственно по элементам матрицы объекта регулятора и наблюдателя.

Список литературы

[1] *Коржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1978.

[2] *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление – М.: Наука, 2002. – 303 с.

[3] *Dorato P.* Vedavalii Recent Advanced in Robust Control. – New York: IEEE press, 1990.

[4] *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. – К.: Наукова Думка, 2007. – 620 с.

[5] *Бейсенби М.А.* Исследование робастной устойчивости систем автоматического управления методом функций А.М. Ляпунова. – Астана, 2015. – 204 с.

[6] *Бейсенби М.А.* Методы повышения потенциала робастной устойчивости систем управления. – Астана, 2011. – 292 с.

[7] *Beisenbi M., Uskenbayeva G., Satybaldina D., Martsenyuk V., Shailhanova A.* Robust stability of spacecraft traffic control system using Lyapunov functions // 16th International Conference on Control, Automation and System (ICCAS), IEEE. – 2016. pp. 743-748.

[8] *Beisenbi M.A., Abdrakhmanova L.G.* Research of dynamic properties of control systems with increased potential of robust stability in a class of two-parameter structurally stable maps by Lyapunov function // International Conference on Computer, Network and Communication Engineering (ICCNCE 2013). Published by Atlantis Press. – 2013. – pp. 201-203.

[9] *Beisenbi M., Uskenbayeva J.* The Research of Robust Stability in Dynamical System // International Conference on Control, Engineering & Information Technology (CEIT), Sousse, Tunisia. Proceedings of IPCO. – 2013. – pp. 142-147.

[10] *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. В 2-х томах. – Т.1. – М.: Мир, 1984.

[11] *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. – М.: Наука, 2001.

[12] *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. – СПб.: Наука, 2000. – 475 с.

[13] *Квакернах Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1986. –650 с.

[14] *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976. – 424 с.

[15] *Рей У.* Методы управления технологическими процессами. – М.: Мир, 1983. – 638 с.

[16] *Beisenbi M., Uskenbayeva G.* The New Approach of Design Robust Stability for Linear Control System // Proc. of the Intl. Conf. on Advances in Electronics and Electrical Technology-AEET. – 2014. – pp. 11-18.

[17] *Beisenbi M., Yermekbayeva J.* Construction of Lyapunov function to examine Robust Stability for Linear System // International Journal of Control. Energy and Electrical Engineering (CEEE). Publisher Copyright – IPCO-2014. – Vol. 1. – pp. 17-22.

[18] *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 534 с.

[19] *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчиваости – М.: Наука, 1967 – 225 с.

[20] *Воронов А.А., Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Наука, 1987. – 252 с.

[21] *Кухаренко Н.В.* Синтез модальных регуляторов при неполной управляемояти объектов // Известия Академии наук. Россиская академия наук. Техническая кибернетика. № 3. – 1992.

[22] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967.

[23] *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. Пер. с англ. – М.: Наука, 1985.

References

[1] *Korzhanskiy A.B., Upravlenie i nablyudenie v usloviyah neopredelennosti* [Management and supervision in the conditions of uncertainty] (M.: Nauka, 1978).

[2] *Polyak B.T., Scherbakov P.S. Robastnaya ustoychivost i upravlenie* [Robust stability and control] (M.: Nauka, 2002): 303.

[3] *Dorato P. Vedavalii Recent Advanced in Robust Control* (New York: IEEE press, 1990).

[4] *Kuntsevich V.M. Upravlenie v usloviyah neopredelennosti: garantirovannyie rezultatyi v zadachah upravleniya i identifikatsii* [Management in the face of uncertainty: guaranteed results in management and identification tasks] (K.: Naukova Dumka, 2007): 620.

[5] *Beysenbi M.A. Issledovanie robastnoy ustoychivosti sistem avtomaticheskogo upravleniya metodom funktsiy A.M. Lyapunova* [Investigation of robust stability of automatic control systems by the method of functions A.M. Lyapunov] (Astana, 2015): 204.

[6] *Beysenbi M.A. Metodyi povyisheniya potentsiala robastnoy ustoychivosti sistem upravleniya* [Methods of increasing the potential of robust stability of control systems] (Astana, 2011): 292.

[7] *Beisenbi M., Uskenbayeva G., Satybaldina D., Martsenyuk V., Shailhanova A.* "Robust stability of spacecraft traffic control system using Lyapunov functions" , *16th International Conference on Control, Automation and System (ICCAS), IEEE* (2016): 743-748.

[8] *Beisenbi M.A., Abdrakhmanova L.G.* "Research of dynamic properties of control systems with increased potential of robust stability in a class of two-parameter structurally stable maps by Lyapunov function" , *International Conference on Computer, Network and Communication Engineering (ICCNCE 2013). Published by Atlantis Press* (2013): 201-203.

[9] *Beisenbi M., Uskenbayeva J.* "The Research of Robust Stability in Dynamical System" , *International Conference on Control, Engineering & Information Technology (CEIT), Sousse, Tunisia. Proceedings of IPCO* (2013): 142-147.

[10] *Gidmor R. Prikladnaya teoriya katastrof. T.1.* [Applied Theory of Disasters. In 2 volumes. Vol.1] (M.: Mir, 1984).

[11] *Poston T., Styuart I. Teoriya katastrof i ee prilozheniya* [Theory of catastrophes and its applications] (M.: Nauka, 2001).

[12] *Andrievskiy B.R., Fradkov A.L. Izbrannyie glavyi teorii avtomaticheskogo upravleniya s primerami na yazyike MATLAB* [AL Selected chapters of the theory of automatic control with examples in the language MATLAB] (SPb.: Nauka, 2000): 475.

[13] *Kvakernah H., Sivan R. Lineynyie optimalnyie sistemyi upravleniya* [Linear optimal control systems] (M.: Mir, 1986): 650.

[14] *Andreev Yu.N. Upravlenie konechnomernyimi lineynyimi ob'ektami* [Managing finite-dimensional linear objects] (M.: Nauka, 1976): 424.

[15] *Rey U. Metodyi upravleniya tehnologicheskimi protsessami* [Techniques for managing technological processes] (M.: Mir, 1983): 638.

[16] *Beisenbi M., Uskenbayeva G.* "The New Approach of Design Robust Stability for Linear Control System" , *Proc. of the Intl. Conf. on Advances in Electronics and Electrical Technology-AEET* (2014): 11-18.

[17] *Beisenbi M., Yermekbayeva J.* "Construction of Lyapunov function to examine Robust Stability for Linear System" , *International Journal of Control. Energy and Electrical Engineering (CEEE). Publisher Copyright. IPCO* Vol. 1. (2014): 17-22.

[18] *Malkin I.G. Teoriya ustoychivosti dvizheniya* [The theory of motion stability] (M.: Nauka, 1966): 534.

[19] *Barbashin E.A. Vvedenie v teoriyu ustoychivaosti* [Introduction to the theory of stability] (M.: Nauka, 1967): 225.

[20] *Voronov A.A., Matrosov V.M. Metod vektornyih funktsiy Lyapunova v teorii ustoychivosti* [Method of Lyapunov vector functions in the theory of stability] (M.: Nauka, 1987): 252.

[21] *Kuharenko N.V.* "Sintez modalnyih regulyatorov pri nepolnoy upravlyaemoyati ob'ektov [Synthesis of modal regulators with incomplete controllability of objects]" , *Izvestiya Akademii nauk. Rossiskaya akademiya nauk. Tehnicheskaya kibernetika* No 3. (1992).

[22] *Gantmaher F.R. Teoriya matrits* [Theory of matrices] (M.: Nauka, 1967).

[23] *Streyts V. Metod prostranstva sostoyaniy v teorii diskretnyih lineynyih sistem upravleniya. Per. s angl.* [The method of the space of states in the theory of discrete linear control systems. Trnslate into English] (M.: Nauka, 1985).