МРНТИ 27.03.66 https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-3-m1

E-комбинации $\aleph_0$-категоричных линейных порядков

Алтаева А.Б., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
Институт математики и математического моделирования МОН РК,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: vip.altayeva@mail.ru
Кулпешов Б.Ш., Казахстанско-Британский технический университет,
Институт математики и математического моделирования МОН РК,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: kulpesh@mail.ru
Судоплатов С.В., Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный технический университет,
г. Новосибирск, Россия, E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

В серии работ Судоплатова С.В. изучались топологические свойства семейств теорий. Им были введены понятия P-оператора и E-оператора, позволяющие изучать связи между теориями относительно подходящих операторов замыкания. Эти операторы дают возможность порождать новые теории посредством рассматриваемых семейств теорий, а также находить в некоторых случаях минимальные или наименьшие порождающие множества. Данное исследование было продолжено в совместных работах Кулпешова Б.Ш. и Судоплатова С.В. для семейств упорядоченных теорий, в том числе и для семейств вполне o-минимальных теорий. В настоящей статье исследуются E-комбинации счетного числа счетно категоричных линейно упорядоченных структур чистого линейного порядка. Найден критерий счетной категоричности E-комбинации счетного числа копий произвольного счетно категоричного линейного порядка. В качестве следствия получено описание счетного спектра такой комбинации.

Ключевые слова: E-комбинация, упорядоченная теория, линейно упорядоченная структура, счетная категоричность, счетный спектр.

$\aleph_0$-категориялық сызықтық реттердің E-комбинациялар

Алтаева А.Б., аль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
ҚР БҒМ математика және математика модельдеу институты,
Алматы қ., Қазақстан, E-mail: vip.altayeva@mail.ru
Кулпешов Б.Ш., Қазақстан-Британдық техникалық университеті,
ҚР БҒМ математика және математика модельдеу институты,
Алматы қ., Қазақстан, E-mail: kulpesh@mail.ru
Судоплатов С.В., РҒА СБ С.Л. Соболев атындағы математика институты,
Новосибирск мемлекеттік техникалық университеті,
Новосибирск қ., Ресей, E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

С.В. Судоплатовтың бірқатар еңбектерде теориялардың отбасыларының топологиялық қасиеттерін зерттеленді. Жабудың қолайлы операторларына қатысты теориялар арасындағы байланысты зерттеуге мүмкіндік беретін P-оператор және E-оператор түсініктерін ол енгізді. Бұл операторлар қарастырылған теориялардың отбасылар арқылы жаңа теорияларды шығаруға мүмкіндік береді, сонымен қатар кейбір жағдайларда минималды немесе ең кіші генериялық жиындар табуға мүмкіндік береді. Бұл зерттеу реттелген теориялардың отбасылары үшін, оның ішінде әбден o-минималды теориялар отбасылар үшін Б.Ш. Кулпешов және С.В. Судоплатовтың бірлескен жұмыста жалғасын

тапты. Бұл мақалада таза сызықтық реттің сызықтық реттелген құрылымдардың есептелетін санның E-комбинациялары қарастыралады. Ерікті түрдегі көшірмелердің есептік санының E-комбинациясының есептік категориялықтың критерийі табылды. Нәтижесінде мұндай комбинацияның есептік спектрдің сипаттамасы алынды.
Түйін сөздер: E-комбинациясы, реттелген теориясы, сызықтық реттелген құрылым, есептік категориялығы, есептік спектрі.

E-combinations of $\aleph_0$-categorical linear orderings

Altayeva A.B., Al-Farabi Kazakh National University,
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK,
Almaty c., Kazakhstan, E-mail: vip.altayeva@mail.ru
Kulpeshov B.Sh., Kazakh-British Technical University,
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK,
Almaty c., Kazakhstan, E-mail: kulpesh@mail.ru
Sudoplatov S.V., Sobolev Institute of Mathematics,
Novosibirsk State Technical University,
Novosibirsk c., Russia, E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

In a series of S.V. Sudoplatov's works the topological properties of families of theories are studied. He introduced the concepts of the P-operator and the E-operator, allowing to study the connections between theories regarding suitable closure operators. These operators make it possible to generate new theories by means of the considered families of theories, and also find in some cases minimal or smallest generating sets. This research was continued in collaborative work of B.Sh. Kulpeshov and S.V. Sudoplatov for families of ordered theories, including families of quite o-minimal theories. This article explores the E-combinations of countably many countably categorical linearly ordered structures of pure linear order. Criterion for countable categoricity of E-combination of countably many copies of an arbitrary countably categorical linear order is obtained. As a consequence, a description of the countable spectrum of such a combination is obtained.

Key words: E-combination, ordered theory, linearly ordered structure, countable categoricity, countable spectrum.

1 Введение

Всюду в этой статье мы будем рассматривать линейно упорядоченные структуры, т.е. структуры языка, содержащего бинарный символ $<$, который удовлетворяет аксиомам линейного порядка. Линейно упорядоченные структуры в сигнатуре $\{<\}$ (структуры чистого линейного порядка) будем называть кратко *линейными порядками.*

Пусть M_i — линейно упорядоченная структура сигнатуры $\{<\}\cup\Sigma_i$ для каждого $i < \omega$, где Σ_i не содержит выделенных констант. Будем обозначать через $dcl^{<}_{M_i}(\emptyset)$ множество элементов структуры M_i, являющихся $\emptyset$-определимыми отношением порядка $<_{M_i}$.

Будем говорить что $M^+ := \langle\bigcup_{i\in\omega} M_i; <, \Sigma, E^2, c^i_k\rangle_{k<\lambda_i, i\in\omega}$ — *линейно упорядоченная непересекающаяся E-комбинация* (или просто *E-комбинация*) структур M_i, если $\Sigma := \cup_{i\in\omega}\Sigma_i$, $\{c^i_k \mid k < \lambda_i\} \subseteq dcl^{<}_{M_i}(\emptyset)$ для некоторого ординала λ_i; либо $M_l < M_m$, либо $M_m < M_l$ для любых $l, m \in \omega$, и E — отношение эквивалентности, разбивающее M^+ на выпуклые классы, так что для любого $a \in M^+$ $E(a, M^+) = M_i$ для некоторого $i < \omega$.

Таким образом, мы включаем в сигнатуру произвольной E-комбинации структур M_i, $i \in \omega$, все элементы, лежащие в $dcl^{<}_{M_i}(\emptyset)$ для каждого $i \in \omega$, т.е. если M_1 и M_2 — изоморфные копии одной и той же структуры M, которая имеет λ элементов, лежащих в $dcl^<_M(\emptyset)$ для некоторого ординала λ, то в сигнатуру E-комбинации от структур M_1 и M_2 будут включены 2λ элементов.

Здесь мы интересуемся вопросами сохранения тех или иных свойств первоначальных структур в их E-комбинации. Например, если все M_i являются $\aleph_0$-категоричными, то при каких условиях элементарная теория произвольной E-комбинации этих структур будет также $\aleph_0$-категоричной? Возможно ослабление условия: когда такая комбинация будет эренфойхтовой или когда она будет иметь максимальный счетный спектр?

2 Обзор литературы

В серии работ [1]– [7] изучались топологические свойства семейств теорий. Были введены понятия P-оператора и E-оператора, позволяющие изучать связи между теориями относительно подходящих операторов замыкания. Эти операторы дают возможность порождать новые теории посредством рассматриваемых семейств теорий, а также находить в некоторых случаях минимальные или наименьшие порождающие множества.

Мы продолжили это исследование в работах [8]– [10] для семейств упорядоченных, в частности, вполне о-минимальных теорий, рассматривая P-комбинации упорядоченных структур.

Отметим, что в работе [12] также рассматривались комбинации структур в виде их произведений. В работах [13]– [18] исследовались вполне о-минимальные теории. Класс вполне о-минимальных теорий является подклассом класса слабо о-минимальных теорий [19]. В работе [14] была подтверждена Гипотеза Воота для вполне о-минимальных теорий, обобщающая результат Лауры Мейер, полученный для о-минимальных теорий [20].

3 Результаты и обсуждение

Очевидно что если M — $\aleph_0$-категоричная линейно упорядоченная структура с непустым $dcl^<_M(\emptyset)$, и мы рассматриваем произвольную E-комбинацию ω-копий структуры M, то согласно определению E-комбинации $dcl_{M^+}(\emptyset)$ будет бесконечным, откуда получаем, что $Th(M^+)$ не является $\aleph_0$-категоричной. Также если мы рассматриваем счетное число попарно неизоморфных $\aleph_0$-категоричных линейных порядков M_i, $i \in \omega$, то любая E-комбинация этих структур будет заведомо не $\aleph_0$-категоричной.

Пусть M — $\aleph_0$-категоричный линейный порядок, $a_1, \ldots, a_n \in M$, $n \geq 1$. Мы говорим, что $\bar{a} := \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ образует *конечный линейный порядок* или $F(n)$-*порядок*, если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, a_1 не имеет непосредственного предшественника в M, a_n не имеет непосредственного последователя в M, и a_{i+1} является непосредственным последователем элемента a_i для каждого $1 \leq i \leq n-1$. В силу $\aleph_0$-категоричности структуры M существует $m < \omega$ такой, что длина любого конечного порядка в M не превышает m. Таким образом, M имеет в точности k различных конечных линейных порядков, состоящих из $n_1, n_2, \ldots, n_k$ элементов для некоторых $k < \omega$ и $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k \leq m$.

$\aleph_0$-категоричные линейные порядки были классифицированы Ж. Розенштейном в [11], где он конструировал их из конечных линейных порядков, использую только две операции.

Если $\langle M_1, <_1\rangle$ и $\langle M_2, <_2\rangle$ — линейные порядки, то их *конкатенацией*, обозначаемой через $M_1 + M_2$, называется линейный порядок $\langle M_1 \cup M_2, <\rangle$ такой, что

$$a < b \Leftrightarrow ([a, b \in M_1 \wedge a <_1 b] \text{ или } [a, b \in M_2 \wedge a <_2 b] \text{ или } [a \in M_1 \wedge b \in M_2]).$$

Будем говорить, что $\langle \mathbb{Q}_n, <_{\mathbb{Q}_n}, C_1^1, \ldots, C_n^1\rangle$ — *Фраиссе генерический n-цветной линейный порядок* или счетный плотный линейный порядок с n взаимно плотными цветами, если для любых различных x и y существуют $z_1, \ldots, z_n$ между x и y такие, что выполняется $C_i(z_i)$ для каждого $1 \leq i \leq n$.

Пусть $\langle M_1, <_1\rangle, \ldots, \langle M_n, <_n\rangle$ — произвольные линейные порядки. Для каждого $q \in \mathbb{Q}_n$ мы определяем $M(q)$ как копию линейного порядка $\langle M_i, <_i\rangle$, если $\mathbb{Q}_n \models C_i(q)$. Тогда *$\mathbb{Q}_n$-перемешиванием* линейных порядков $\langle M_1, <_1\rangle, \ldots, \langle M_n, <_n\rangle$, обозначаемым через $\mathbb{Q}_n(M_1, \ldots, M_n)$, называется линейный порядок $\langle \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_n}, M(q), <\rangle$ такой, что

$$a < b \Leftrightarrow ([a, b \in M(q) \wedge a <_i b] \text{ или } [a \in M(q), b \in M(p) \wedge q <_{\mathbb{Q}_n} p]).$$

$\mathbb{Q}_n$-перемешивание в общем случае будем называть *$\mathbb{Q}$-перемешиванием.*

Теорема 1 [11] *$\langle M, <\rangle$ — $\aleph_0$-категоричный линейный порядок тогда и только тогда, когда $\langle M, <\rangle$ может быть построен из отдельных элементов с помощью конечного числа конкатенаций или $\mathbb{Q}$-перемешиваний.*

Предложение 1 *Пусть M — $\aleph_0$-категоричный линейный порядок, M^+ — линейно упорядоченная непересекающаяся E-комбинация ω копий структуры M. Предположим что $dcl_M(\emptyset) \neq \emptyset$. Тогда $Th(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей.*

Доказательство. Поскольку $dcl_M(\emptyset) \neq \emptyset$, то в силу $\aleph_0$-категоричности структуры M существует лишь конечное число $c \in dcl_M(\emptyset)$. Следовательно, каждый E-класс в M^+ имеет собственное имя, т.е. он равен $E(c_i, M^+)$ для некоторого $c_i \in dcl_{M^+}(\emptyset)$.

Случай 1. Существует бесконечная дискретно упорядоченная цепь $\{E(c_i, x) \mid i < \omega\}$ из E-классов в M^+.

Не умаляя общности, предположим что эта цепь является возрастающей. Тогда мы имеем две возможности:

(1) для любого $a \in M^+$ существует $i < \omega$ такой, что $a < E(c_i, M^+)$;

(2) существует $c' \in dcl_{M^+}(\emptyset)$ такой, что $E(c_i, M^+) < E(c', M^+)$ для каждого $i < \omega$.

Не умаляя общности, предположим первое. Тогда

$$p(x) := \{\forall y[E(c_i, y) \to y < x] \mid i \in \omega\}$$

определяет $\emptyset$-определимый 1-тип в M^+.

Пусть $\mathbb{ZE}$ обозначает множество E-классов, упорядоченных по типу $\omega^* + \omega$. Тогда обозначим через $F(k)^{\mathbb{ZE}}$ ($\omega^{\mathbb{ZE}}$ и $\mathbb{Q}^{\mathbb{ZE}}$) множество $\mathbb{ZE}$-копий, упорядоченных по типу $F(k)$ (ω и $\mathbb{Q}$ соответственно). Тогда мы утверждаем что тип $p(x)$ может быть реализован следующим множеством:

$$F_1(k_1)^{\mathbb{ZE}} + \mathbb{Q}^{\mathbb{ZE}} + F_2(k_2)^{\mathbb{ZE}} + \mathbb{Q}^{\mathbb{ZE}} + \ldots + F_n(k_n)^{\mathbb{ZE}} + \mathbb{Q}^{\mathbb{ZE}}$$

для любых $0 \le n, k_i \le \omega$, где для каждого $2 \le i \le n-1$ если $k_i \ne 0$, то $k_i \ge 2$; и если $k_i = \omega$, то $F_i(k_i)^{\mathbb{ZE}} \equiv \omega^{\mathbb{ZE}}$, откуда получаем что $Th(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей.

Случай 2. Не существует бесконечных дискретно упорядоченных цепей из E-классов в M^+.

Тогда существует $n < \omega$ такой, что M^+ содержит $F(n)$-порядки из E-классов и не существует $F(m)$-порядков из E-классов для любого $m > n$. Следовательно, существуют $n_1 < \omega$ с условием $1 \le n_1 \le n$ и открытый интервал (a, b) в M^+, на котором эти $F(n_1)$-порядки плотно упорядочены. Тогда мы возьмем произвольный E-класс $E(c_i, M^+)$, содержащийся в (a, b) и являющийся последним элементом какого-нибудь $F(n_1)$-порядка, и рассмотрим следующее множество формул:

$$p(x) := \{\neg E(c_i, x) \wedge c_i < x\} \cup \{\forall y[E(c_j, y) \to x < y] \mid c_i < c_j \wedge \neg E(c_i, c_j)\}.$$

Очевидно, что $p(x)$ определяет $\emptyset$-определимый 1-тип в M^+. В силу плотной упорядоченности $F(n_1)$-порядков в (a, b) мы имеем 2^ω различных $\emptyset$-определимых 1-типов, откуда $Th(M^+)$ не является малой, и следовательно, $Th(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей. $\square$

Пример 1 Пусть M — $\aleph_0$-категоричный линейный порядок, M^+ — линейно упорядоченная непересекающаяся E-комбинация ω копий структуры M. Предположим, что мы имеем на M^+ следующее упорядочение E-классов:

$$\mathbb{Q}_1(2) + \mathbb{Q}_1(3) + \mathbb{Q}_1(2) + \mathbb{Q}_1(3) + \ldots + \mathbb{Q}_1(2) + \mathbb{Q}_1(3) + \ldots,$$

т.е. мы имеем счетное число конкатенаций $S := \mathbb{Q}_1(2) + \mathbb{Q}_1(3)$.

Рассмотрим следующие формулы:

$$\phi_2^l(x) := \exists y_r[x < y_r \wedge \forall t(x \le t \le y_r \to x = t \vee t = y_r) \wedge$$

$$\forall u(y_r < u \to \exists v_r(y_r < v_r < u))] \wedge \forall y_l(y_l < x \to \exists v_l[y_l < v_l < x]),$$

$$\phi_2^r(x) := \exists y_l[y_l < x \wedge \forall t(y_l \le t \le x \to y_l = t \vee t = x) \wedge$$

$$\forall u(u < y_l \to \exists v_l(u < v_l < y_l))] \wedge \forall y_r(x < y_r \to \exists v_r[x < v_r < y_r]).$$

Очевидно, что $\phi_2^l(x)$ означает "x — левая точка дуплета", а $\phi_2^r(x)$ означает "x — правая точка дуплета". Тогда формула $\phi_2(x) := \phi_2^l(x) \vee \phi_2^r(x)$ означает что "x — элемент дуплета". Аналогично мы можем определить $\phi_3(x)$, которая будем означать, что "x — элемент триплета".

Далее, следующая формула

$$\phi_{21}(x) := \phi_2(x) \wedge \forall y[y < x \to \phi_2(y)]$$

выделяет крайнюю левую копию линейного порядка $\mathbb{Q}_1(2)$. Аналогично, формула

$$\phi_{31}(x) := \phi_3(x) \wedge \wedge \forall y[y < x \to \phi_{21}(y) \vee \phi_3(y)]$$

выделяет самую левую копию линейного порядка $\mathbb{Q}_1(3)$.

Для каждого натурального $k \geq 2$ рассмотрим следующие формулы:

$$\phi_{2k}(x) := \phi_2(x) \wedge \wedge_{i=1}^{k-1} \neg\phi_{2i}(x) \wedge \forall y[y < x \wedge \neg\phi_2(y) \to \vee_{j=1}^{k-1}\phi_{3j}(y)],$$

$$\phi_{3k}(x) := \phi_3(x) \wedge \wedge_{i=1}^{k-1} \neg\phi_{3i}(x) \wedge \forall y[y < x \wedge \neg\phi_3(y) \to \vee_{j=1}^{k}\phi_{2j}(y)].$$

Очевидно, что $\phi_{2k}(x)$ выделяет k-тую копию линейного порядка $\mathbb{Q}_1(2)$, а формула $\phi_{3k}(x)$ выделяет k-тую копию линейного порядка $\mathbb{Q}_1(3)$ для каждого $k \geq 2$.

Таким образом, существует бесконечное число неэквивалентных $\emptyset$-определимых формул в M^+/E. Поймем, что тогда существует бесконечное число неэквивалентных $\emptyset$-определимых формул в M^+. Действительно, рассмотрим следующую формулу:

$$\Phi_2^l(x) := \exists y_r[x < y_r \wedge \neg E(x, y_r) \wedge \forall t(x \leq t \leq y_r \to E(x,t) \vee E(t, y_r))\wedge$$

$$\forall u(y_r < u \wedge \neg E(y_r, u) \to \exists v_r(y_r < v_r < u \wedge \neg E(y_r, v_r) \wedge \neg E(v_r, u)))]\wedge$$

$$\forall y_l(y_l < x \wedge \neg E(y_l, x) \to \exists v_l[y_l < v_l < x \wedge \neg E(y_l, v_l) \wedge \neg E(v_l, x)]).$$

Формула $\Phi_2^l(x)$ выделяет элементы из M^+, лежащие в левом E-классе дуплета из E-классов. Аналогичным образом определяются формулы $\Phi_2^r(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$, $\Phi_{2k}(x)$, $\Phi_{3k}(x)$ для любого $k \geq 2$, откуда получаем бесконечное число неэквивалентных $\emptyset$-определимых формул в M^+, т.е. $Th(M^+)$ не является $\aleph_0$-категоричной.

Мы также замечаем, что $Th(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей. Действительно рассмотрим следующее множество формул:

$$p(x) := \{\forall y[\Phi_{2k}(y) \to y < x] \mid k < \omega\} \cup \{\forall y[\Phi_{3m}(y) \to y < x] \mid m < \omega\}$$

Очевидно, что $p(x)$ определяет определимый 1-тип в M^+.

Пусть $\mathbb{ZE}[S]$ обозначает множество S-копий (копий упорядочения E-классов), упорядоченных по типу $\omega^* + \omega$. Тогда обозначим через $F(k)^{\mathbb{ZE}[S]}$ ($\omega^{\mathbb{ZE}[S]}$ и $\mathbb{Q}^{\mathbb{ZE}[S]}$) множество $\mathbb{ZE}[S]$-копий, упорядоченных по типу $F(k)$ (ω и $\mathbb{Q}$ соответственно). Тогда мы утверждаем, что тип $p(x)$ может быть реализован следующим множеством:

$$F_1(k_1)^{\mathbb{ZE}[\mathbb{S}]} + \mathbb{Q}^{\mathbb{ZE}[\mathbb{S}]} + F_2(k_2)^{\mathbb{ZE}[S]} + \mathbb{Q}^{\mathbb{ZE}[S]} + \ldots + F_n(k_n)^{\mathbb{ZE}[S]} + \mathbb{Q}^{\mathbb{ZE}[S]}$$

для любых $0 \leq n, k_i \leq \omega$, где для каждого $2 \leq i \leq n-1$ если $k_i \neq 0$, то $k_i \geq 2$; и если $k_i = \omega$, то $F_i(k_i)^{\mathbb{ZE}[S]} \equiv \omega^{\mathbb{ZE}[S]}$, откуда получаем что $Th(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей.

Теорема 2 *Пусть M — $\aleph_0$-категоричный линейный порядок, M^+ — линейно упорядоченная непересекающаяся E-комбинация ω копий структуры M. Тогда:*

(1) *$Th(M^+)$ — $\aleph_0$-категоричная теория тогда и только тогда, когда $dcl_M(\emptyset) = \emptyset$ и $\langle M^+/E, <_{ind}\rangle$ — $\aleph_0$-категорична, где $<_{ind}$ — индуцированный порядок на E-классах в M^+.*

(2) *Если теория $Th(M^+)$ не является $\aleph_0$-категоричной, то $Th(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть теория $Th(M^+)$ $\aleph_0$-категорична. В силу предложения 1, $dcl_M(\emptyset) = \emptyset$. Допустим противное: M^+/E не является $\aleph_0$-категоричной.

Случай 1. Для каждого $n < \omega$ существует $n_1 \geq n$ такой, что M^+/E содержит конечные $F(n_1)$-порядки.

Тогда существует элементарное расширение M_1 структуры M^+, содержащее бесконечную дискретно упорядоченную цепь E-классов, откуда мы получаем, что $Th(M^+)$ не является $\aleph_0$-категоричной.

Поймем теперь, что $Th(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей. Не умаляя общности, предположим, что эта цепь возрастающая. Возьмем произвольный $a \in M^+$, лежащий в первом E-классе данной возрастающей цепи и рассмотрим следующие формулы:

$$F_1(a,x) := E(a,x), \quad F_2(a,x) := \neg F_1(a,x) \wedge \forall y(a < y < x \wedge \neg F_1(a,y) \to E(y,x)),$$

$$F_n(a,x) := \wedge_{i=1}^{n-1} \neg F_i(a,x) \wedge \forall y[a < y < x \wedge \wedge_{i=1}^{n-1} \neg F_i(a,y) \to E(y,x)], \quad n \geq 2$$

Не умаляя общности, также предположим, что для любого $b \in M^+$ существует $i < \omega$ такой, что $b < F_i(a, M^+)$. Тогда следующее множество формул

$$p(x) := \{\forall y[F_k(a,y) \to y < x] \mid k < \omega\}$$

определяет $\{a\}$-определимый 1-тип в M^+. Следовательно, аналогично доказательству предложения 1 мы получаем, что $Th(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей.

Случай 2. Существует $n < \omega$ такой, что M^+/E содержит конечные $F(n)$-порядки и не содержит конечные $F(m)$-порядки для любого $m > n$.

Тогда M^+/E содержит k различных конечных линейных порядков, состоящих из n_1, n_2, ..., n_k элементов для некоторых $k < \omega$ и $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k \leq n$. Поскольку M^+/E не является $\aleph_0$-категоричной, то в силу теоремы 1 имеют место следующие подслучаи:

Случай 2a. Существуют $F(n_s)$-порядок для некоторого $1 \leq s \leq k$ и $\mathbb{Q}$-перемешивание $\mathbb{Q}_t(M'_1, \ldots, M'_t)$, где $M'_1, \ldots, M'_t$ — конечные или $\aleph_0$-категоричные линейные порядки, причем $F(n_s) \not\cong M'_c$ для всех $1 \leq c \leq t$, и эти порядки чередуются бесконечное число раз.

Случай 2b. Существуют $\mathbb{Q}$-перемешивания $\mathbb{Q}_l(M_1, \ldots, M_l)$ и $\mathbb{Q}_t(M'_1, \ldots, M'_t)$, где M_1, ..., M_l, $M'_1, \ldots, M'_t$ — конечные или $\aleph_0$-категоричные линейные порядки, причем существует хотя бы один r такой, что $1 \leq r \leq l$ и $M_r \not\cong M'_c$ для всех $1 \leq c \leq t$ или существует хотя бы один v такой, что $1 \leq v \leq t$ и $M'_v \not\cong M_c$ для всех $1 \leq c \leq l$, и эти порядки чередуются бесконечное число раз.

В обоих случаях мы утверждаем, что существует бесконечное число неэквивалентных формул, противореча $\aleph_0$-категоричности теории $Th(M^+)$. Тогда аналогично примеру 1 можно показать, что $Th(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей.

($\Leftarrow$) Пусть $dcl_M(\emptyset) = \emptyset$ и $\langle M^+/E, <_{ind}\rangle$ — $\aleph_0$-категорична. Тогда аксиомами теории $Th(M^+)$ будут следующие предложения:

(1) аксиомы линейного порядка для отношения $<$;

(2) аксиомы рефлексивности, симметричности и транзитивности для отношения E;

(3) $\{\phi_E \mid \phi \in Th(M)\}$;

(4) $\{\phi^E \mid \phi \in Th(M^+/E)\}$.

Например, если $\phi := \exists x \forall y[x \leq y] \in Th(M)$, то формула $\phi_E \equiv \exists x \forall y[E(x,y) \to x \leq y]$. Если $\psi := \forall x \exists y[x < y] \in Th(M)$, то $\psi_E \equiv \forall x \exists y[E(x,y) \wedge x < y]$.

Далее, если $\phi := \exists x \forall y[x \leq y] \in Th(M^+/E)$, то формула $\phi^E \equiv \exists x \forall y[\neg E(x,y) \to x \leq y]$. Если $\psi := \forall x \exists y[x < y] \in Th(M^+/E)$, то $\psi^E \equiv \forall x \exists y[\neg E(x,y) \wedge x < y]$.

В силу $\aleph_0$-категоричности M и M^+/E теории $Th(M)$ и $Th(M^+/E)$ конечно аксиоматизируемы, поэтому $Th(M^+)$ также $\aleph_0$-категорична.

Заметим, что если бы $dcl_M(\emptyset) \neq \emptyset$, то существовал бы некоторый $c \in dcl_M(\emptyset)$, и следовательно существовала бы $\emptyset$-определимая формула $\theta(x)$ такая, что $M \models \exists! x\theta(x) \wedge \theta(c)$. Но тогда $\mu := \exists! x\theta(x) \in Th(M)$, откуда $\mu_E := \forall y \exists! x[E(x,y) \wedge \theta(x)]$. При этом в силу определения E-комбинации выполнялось бы следующее:

$$M^+ \models \forall y_1 \forall y_2 [\neg E(y_1, y_2) \rightarrow \exists! x_1 \exists! x_2 (E(y_1, x_1) \wedge E(y_2, x_2) \wedge \theta(x_1) \wedge \theta(x_2) \wedge x_1 \neq x_2)].$$

Откуда следует, что $dcl_{M^+}(\emptyset)$ бесконечно, и, следовательно, теория $Th(M^+)$ не является $\aleph_0$-категоричной. $\Box$

Следствие 1 *Пусть $M_1, \ldots, M_n$ — линейно упорядоченные структуры, являющиеся эренфойхтовыми, $n < \omega$, M — $\aleph_0$-категоричный линейный порядок с $dcl_M(\emptyset) = \emptyset$, M^+ — линейно упорядоченная непересекающаяся комбинация структур $M_1, \ldots, M_n$ и ω копий структуры M. Тогда теория $Th(M^+)$ эренфойхтова $\Leftrightarrow$ $\langle M^+/E, <_{ind} \rangle$ $\aleph_0$-категорична.*

4 Заключение

Таким образом, нами полностью исследован вопрос счетной категоричности E-комбинации счетного числа копий произвольной счетно категоричной теории чистого линейного порядка. Показано, что в этом случае счетный спектр такой E-комбинации равен либо 1, либо 2^ω. Как следствие, если мы добавим конечное число эренфойхтовых теорий, т.е. теорий, имеющих лишь конечное число попрано неизоморфных счетных моделей, то полученная E-комбинация будет эренфойхтовой в случае счетной категоричности структуры, факторизуемой посредством E.

5 Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (AP 05132546, AP 05134992).

Список литературы

[1] S.V. Sudoplatov, Combinations of structures // The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics". - 2018. - Vol. 24. - P. 82–101.

[2] S.V. Sudoplatov, Closures and generating sets related to combinations of structures // The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics". - 2016. - Vol. 16. - P. 131–144.

[3] S.V. Sudoplatov, Families of language uniform theories and their generating sets // The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics". - 2016. - Vol. 17. - P. 62–76.

[4] S.V. Sudoplatov, On semilattices and lattices for families of theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. - 2017. - Vol. 14. - P. 980–985.

[5] S.V. Sudoplatov, Combinations related to classes of finite and countably categorical structures and their theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. - 2017. - Vol. 14. - P. 135–150.

[6] S.V. Sudoplatov, Relative e-spectra, relative closures, and semilattices for families of theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. - 2017. - Vol. 14. - P. 296–307.

[7] In.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov, Families of theories of Abelian groups and their closures // Bulletin of Karaganda University. Mathematics. - 2018. - Vol. 92, No. 4. - P. 72–78.

[8] Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В., О P-комбинациях упорядоченных теорий // Традиционная международная апрельская математическая конференция (тезисы докладов), Институт математики и математического моделирования. - Алматы. - 2019. - С. 30–31.

[9] Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В., Об эренфойхтовости P-комбинации упорядоченных теорий // Материалы международной конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения" (Казань, 24-28 июня 2019 г.). - Казань: Казанский федеральный университет. - 2019. - С. 131–133.

[10] Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В., P-комбинации упорядоченных структур // Тезисы докладов международной конференции "Мальцевские Чтения". - Новосибирск, Институт математики СО РАН. - 2019. - С. 190.

[11] J.G. Rosenstein, $\aleph_0$-categoricity of linear orderings // Fundamenta Mathematicae. - 1969. - Vol. 64. - P. 1-5.

[12] S. Feferman, R. Vaught, The first order properties of products of algebraic systems // Fundamenta Mathematicae. - 1959. - Vol. 47. - P. 57–103.

[13] B.Sh. Kulpeshov, Convexity rank and orthogonality in weakly o-minimal theories // News of National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, series physics-mathematics. - 2003. - Vol. 227. - P. 26–31.

[14] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, Vaught's conjecture for quite o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic. - 2017. - Vol. 168, issue 1. - P. 129–149.

[15] B.Sh. Kulpeshov, Countably categorical quite o-minimal theories // Journal of Mathematical Sciences. - 2013. - Vol. 188, issue 4. - P. 387–397.

[16] M. Rubin, Theories of linear order // Israel Journal of Mathematics. - 1974. - Vol. 17, issue 4. - P. 392–443.

[17] S.V. Sudoplatov, Classification of countable models of complete theories, Part 1. — Novosibirsk : Novosibirsk State Technical University Publishing House, 2018. - 376 c.

[18] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, Linearly ordered theories which are nearly countably categorical // Mathematical Notes. - 2017. - Vol. 101, No. 3. - P. 475–483.

[19] B.Sh. Kulpeshov, Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic. - 1998. - Vol. 63. - P. 1511–1528.

[20] L.L. Mayer, Vaught's conjecture for o-minimal theories // The Journal of Symbolic Logic. - 1988. - Vol. 53. - P. 146–159.

References

[1] Sudoplatov S.V., "Combinations of structures", The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics", vol. 24 (2018): 82-101.

[2] Sudoplatov S.V., "Closures and generating sets related to combinations of structures", The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics", vol. 16 (2016): 131-144.

[3] Sudoplatov S.V., "Families of language uniform theories and their generating sets", The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics", vol. 17 (2016): 62-76.

[4] Sudoplatov S.V., "On semilattices and lattices for families of theories", Siberian Electronic Mathematical Reports, vol. 14 (2017): 980-985.

[5] Sudoplatov S.V., "Combinations related to classes of finite and countably categorical structures and their theories", Siberian Electronic Mathematical Reports, vol. 14 (2017): 135-150.

[6] Sudoplatov S.V., "Relative e-spectra, relative closures, and semilattices for families of theories", Siberian Electronic Mathematical Reports, vol. 14 (2017): 296-307.

[7] Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V., "Families of theories of Abelian groups and their closures", Bulletin of Karaganda University. Mathematics, vol. 92, No. 4 (2018): 72-78.

[8] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V., "On P-combinations of ordered theories", Traditional International April Mathematical Conference (abstracts), Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty (2019): 30-31.

[9] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V., "On Ehrehfeuchtness of a P-combination of irdered theories", Materials of the International Conference "Algebra and Mathematical Logic: theory and applications", Kazan: Kazan Federal University (2019): 131-133.

[10] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V., "P-combination of ordered structures", Abstracts of the International Conference "Maltsev Meeting", Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics (2019): 190.

[11] Rosenstein J.G., "$\aleph_0$-categoricity of linear orderings", Fundamenta Mathematicae, vol. 64 (1969): 1-5.

[12] Feferman S., Vaught R., "The first order properties of products of algebraic systems", Fundamenta Mathematicae, vol. 47 (1959): 57-103.

[13] Kulpeshov B.Sh., "Convexity rank and orthogonality in weakly o-minimal theories", News of National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, series physics-mathematics, vol. 227 (2003): 26-31.

[14] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V., "Vaught's conjecture for quite o-minimal theories", Annals of Pure and Applied Logic, vol. 168 (2017): 129-149.

[15] Kulpeshov B.Sh., "Countably categorical quite o-minimal theories", Journal of Mathematical Sciences, vol. 188 (2013): 387-397.

[16] Rubin M., "Theories of linear order", Israel Journal of Mathematics, vol. 17 (1974): 392-443.

[17] Sudoplatov S.V., "Classification of countable models of complete theories", Part 1, Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University Publishing House (2018): 376 c.

[18] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V., "Linearly ordered theories which are nearly countably categorical", Mathematical Notes, vol. 101 (2017): 475-483.

[19] Kulpeshov B.Sh., "Weakly o-minimal structures and some of their properties", The Journal of Symbolic Logic, vol. 63 (1998): 1511-1528.

[20] Mayer L.L., "Vaught's conjecture for o-minimal theories", The Journal of Symbolic Logic, vol. 53 (1988): 146-159.