

Разработка метода нахождения коэффициента диффузии влаги

Рысбайұлы Б., Международный Университет Информационных Технологий,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: b.rysbaiuly@mail.ru
Карашбаева Ж.О., Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилева,
г. Нур-Султан, Казахстан, E-mail: zhanat.k.o.91@gmail.com

В связи с появлением новых строительных материалов возникает необходимость определения теплофизических характеристик материалов. Целью работы является разработка методов решения обратных задач материалов неразрушающего контроля. Разработка методов и проверка их надежности имеет научно-практическую ценность. Методология исследований: разработка метода, численные расчеты и сравнение результатов с экспериментальными данными. Рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными теплопереноса. Ставятся граничные условия максимально учитывающие физику процесса. В качестве дополнительного условия берется измеримые значения влаги и тепла на доступной границе области. Рассматриваемая система записывается в безразмерном виде. Сначала строится вспомогательная задача. Из него выходит сопряженная задача. Поставленная задача решается итерационным методом. Разработан приближенный метод нахождения искомой величины, основанный на системе уравнений переноса тепла и влаги. Создан программный продукт и проведены численные расчеты. Полученный результат был сравнен с экспериментальными данными других ученых. Сравнение показало хорошее совпадение результатов.

Ключевые слова: материалы, тепло и масса, метод, численный расчет, сравнение.

Ылғалдың диффузиялық коэффициентін есептейтін әдісті құрастыру

Рысбайұлы Б., Халықаралық Ақпараттық Технологиялар Университеті,
Алматы қ., Қазақстан, E-mail: b.rysbaiuly@mail.ru
Карашбаева Ж.О., Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті,
Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан, E-mail: zhanat.k.o.91@gmail.com

Практикада жаңа құрылыс материалдарының пайда болуы әсерінен оның жылу және ылғал сипаттамаларын анықтау қажеттілігі туындайды. Жұмыстың мақсаты материалдың тұтастығын сақтай отырып кері есепті шығаратын әдісті құрастыру. Әдіс құрастыру және оның сенімділігін анықтау ғылыми және практикалық маңызы зор. Зерттеу методологиясы: әдісті құрастыру, сандық есептеулер және алынған нәтижені эксперимент нәтижесімен салыстыру. Жылу және ылғал тасымалының дербес туындылардан тұратын бейсызқты дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылады. Физикалық процесті қарастыра отырып шекаралық шарттар қойылады. Қосымша шарттар ретінде қолжетімді шекарадағы ылғал мен жылу мәндерінің өлшемі алынады. Қарастырылып отырған жүйе өлшемсіз түрде жазылады. Алдымен қосымша есеп құрастырылады. Сонан соң қосалқы есеп алынады. Қойылған есеп итерациялық тәсілмен шығарылады. Жылу және ылғал тасымалдау теңдеулер жүйесін пайдаланып жуық әдіс құрастырылады. Программалық өнім құрастырылып, сандық есептеулер жүргізілді. Алынған нәтиже шетелдік ғалымдардың эксперимент нәтижелерімен салыстырылды. Салыстырылулар жақсы көрсеткішке ие болды.

Түйін сөздер: материал, жылу және масса, әдіс, сандық есептеу, салыстыру.

Development of a method for finding a moisture diffusion coefficient

Rysbaiuly B., International IT University,
Almaty, Kazakhstan, E-mail: b.rysbaiuly@mail.ru
Karashbayeva Zh.O., L.N.Gumilyov Eurasian National University,
Nur-Sultan, Kazakhstan, E-mail: zhanat.k.o.91@gmail.com

In connection with the advent of new building materials, it becomes necessary to determine the thermophysical characteristics of materials. The aim of the work is to develop methods for solving the inverse problems of non-destructive testing materials. The development of methods and verification of its reliability is scientifically and practically important. Research methodologies are development of a method, numerical calculations and comparison of results with experimental data. Systems of nonlinear differential equations with partial derivatives of heat and mass transfer are considered. The boundary conditions are set taking into account the physics of the process as much as possible. As an additional condition, the measured values of moisture and heat at the accessible boundary of the region are taken. The system under consideration is written in a dimensionless form. First, an auxiliary task is constructed. Conjugate problem derives from it. The problem is solved by using iterative method. On the basis of system of equations of heat and moisture transfer it was developed an approximate method for finding the desired value. A software product is created and numerical calculations are carried out. The result obtained is compared with experimental data of other scientists. The comparison shows a good agreement between the results.

Key words: materials, heat and mass, method, numerical calculation, comparison.

1 Введение

В строительстве все чаще появляются новые пористые материалы. Поэтому нами была выбран перенос влаги и тепла в пористой среде. Объектом исследования являются пористые материалы, а предметом исследования является система нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Влагопроводные и теплопроводные характеристики новых материалов обычно бывают неизвестными. В связи с этим разработка методов нахождения параметров материала становится актуальной задачей. Поэтому мы поставили цель разработать приближенные методы нахождения вышеперечисленных параметров. Задачей работы является разработка новых методов расчета влагопроводных характеристик материала. Методикой исследования является метод математического моделирования.

2 Обзор литературы

Влага является ключевым фактором долговечности и производительности зданий. Чрезмерный уровень снижает качество конструкции, влияет на качество воздуха в помещении и тепловой комфорт, а также на эффективность использования энергии в здании [1]. Как следствие, в литературе предлагается ряд моделей для прогнозирования воздействия влаги на энергоэффективность зданий. С основным обзором можно ознакомиться в [2]. Среди физических явлений перенос воздуха через пористые строительные среды оказывает решающее влияние на количество влаги. Разнообразные исследования усиливают эти эффекты, используя как экспериментальные, так и численные результаты [3] -

[5]. В литературе предлагается несколько численных моделей для прогнозирования физических явлений сопряженного переноса тепла, воздуха и влаги через пористые строительные материалы. Их физические представления основаны на законах сохранения массы для сухого воздуха, пара и жидкой воды, а также на законе сохранения энергии, как подробно описано в ранней работе Лыкова [6]. В качестве преемственности его работы численные модели, предложенные в литературе, можно разделить на две основные группы. Первая группа рассматривает три эволюционных дифференциальных уравнения для расчета температуры, массового содержания и давления воздуха в пористой среде. В [7] - [9] предложена модель для моделирования переноса через полые пористые блоки. Он основан на неявной конечно-разностной числовой схеме. Совсем недавно, в [10], коммерческое программное обеспечение COMSOLTM использовалось для предложения численной модели для таких физических задач. Как отмечают авторы, схема основана на явном во времени подходе конечных элементов. Основным недостатком этих численных моделей является их вычислительная стоимость. Неявный подход требует дорогостоящих суб-итераций на каждом временном шаге для обработки серьезных нелинейностей проблемы. Явная схема требует очень тонких временных шагов для удовлетворения так называемых условий устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви (КФЛ). Действительно, характерное время переноса воздуха очень мало по сравнению с таковым для теплопереноса. Вещество, связанное с капиллярно-пористым телом в области положительных температур, может быть в виде жидкости, пара и инертного газа; при отрицательных температурах - в виде льда, переохлажденной жидкости, пара и газа [11]. В зависимости ISSN 1563-0277, eISSN 2617-4871 Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science, N.1(101), 2019 Разработка метода нахождения коэф. диффузии влаги 3 от вида связи влаги с телом температура замерзания жидкости изменится в широких пределах [12] - [14]. Поэтому в капиллярно-пористых телах с разной формой связи влаги при отрицательных температурах всегда имеется некоторое количество переохлажденной жидкости [15].

Второй специфичной особенностью массо-и теплопереноса в капиллярно-пористых телах является частичное заполнение влагой пор и капилляров тела. То есть часть капилляров заполнена жидкостью и льдом, а остальная часть - парогазовой смесью. Количество влаги в том или ином состоянии в процессе массо-и теплопереноса изменяется [16]. Поэтому при выводе уравнений переноса необходимо учитывать изменение концентрации влаги в капиллярах тела. Методы решения обратных задач изучаются в работе [17].

3 Материал и методы

Взаимосвязанный перенос теплоты и массы в твердом теле описывается системой уравнений в частных производных вида [6]:

$$C_q \rho \frac{\partial \Theta}{\partial t} = K_q \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + C_m \varepsilon \rho \lambda \frac{\partial W}{\partial t} \quad (1)$$

$$C_m \rho \frac{\partial W}{\partial t} = K_m \delta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + K_m \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (2)$$

Здесь Θ и W функции, характеризующие изменения температуры и потенциала массопереноса, x - координата по толщине слоя, t - время.

Граничные условия третьего рода для возможной реальной ситуации на поверхности земли:

$$K_q \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \alpha_q (\Theta - \Theta_a) + (1 - \varepsilon) \alpha_m \lambda (W - W_a) = 0 \quad (3)$$

$$K_m \frac{\partial W}{\partial x} + K_m \delta \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \alpha_m (W - W_a) = 0 \quad (4)$$

На нижней границе области $x = 0$ ставятся условия:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Начальные условия в момент времени $t = 0$:

$$\Theta = \Theta_0; \quad W = W_0 \quad (6)$$

Кроме этого задаются измеренные значения температуры и потенциала влаги на поверхности земли $x = l$: T_g и W_g .

Требуется определить D_w .

Систему (1) - (6) можно привести к следующему виду:

$$C_q \rho \frac{\partial \Theta}{\partial t} = K_q \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \varepsilon r \frac{\partial W}{\partial t}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D_\Theta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + D_w \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

где $r = \lambda \rho C_m$; $D_w = \frac{K_m}{\rho C_m}$; $D_\Theta = \frac{K_m \delta}{\rho C_m}$

Граничные условия в $x = l$:

$$K_q \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \alpha_q (\Theta - \Theta_a) - (1 - \varepsilon) \alpha'_m r (W - W_a) = 0$$

$$D_\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x} + D_w \frac{\partial W}{\partial x} = -\alpha'_m (W - W_a)$$

где $\alpha'_m = \frac{\alpha_m}{\rho C_m}$

Граничные условия в $x = 0$:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

Начальные условия в момент времени $t = 0$:

$$\Theta = \Theta_0; \quad W = W_0$$

4 Уравнение Лыкова в безразмерной форме

$$\frac{\partial T}{\partial t^*} = F_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \varepsilon F_{12} \frac{\partial U}{\partial t^*} \quad (7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t^*} = F_{21} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + D_w^* F_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (8)$$

где $t^* = \frac{t}{t_0}$; $z = \frac{x}{l}$; $T = \frac{\Theta}{T_0}$; $U = \frac{W}{U_0}$; $F_{11} = \frac{K_q t_0}{C_q \rho l^2}$; $F_{12} = \frac{r U_0}{C_q \rho T_0}$;
 $F_{21} = \frac{D_\Theta T_0 t_0}{U_0 l^2}$; $F_{22} = \frac{D_{W0} t_0}{l^2}$

Граничные условия в $z = 1$:

$$F_{11} \frac{\partial T}{\partial z} = -F_{0q1} (T - T_a) + (1 - \varepsilon) F_{0q2} (U - U_a) \quad (9)$$

$$F_{21} \frac{\partial T}{\partial z} + D_w^* F_{22} \frac{\partial U}{\partial z} = -F_{0m1} (U - U_a) \quad (10)$$

где $F_{0q1} = \frac{\alpha_q t_0}{\rho C_q l}$; $F_{0q2} = \frac{\alpha'_m r U_0 t_0}{\rho C_q l T_0}$; $F_{0m1} = \frac{\alpha'_m t_0}{l}$

Граничные условия в $z = 0$:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

Начальные условия в $t = 0$:

$$T = 1; \quad U = 1 \quad (12)$$

5 Итерационный метод

Поставленная задача решается итерационным методом. Сначала задается начальное приближение $D_w^*(n)$, при $n = 0$, а следующие приближения определяются из минимума функционала

$$J_n(D_w^*) = \int_0^{t_{max}} (T(1, t^*) - T_g(t^*))^2 dt^* + \int_0^{t_{max}} (U(1, t^*) - W_g(t^*))^2 dt^*.$$

Соответствующие решения задачи (7) - (12) итерации n и $n + 1$ обозначим через

$$T(x, t^*; n) = T_n(x, t^*), U(x, t^*; n) = U_n(x, t^*),$$

$$T(x, t^*; n + 1) = T_{n+1}(x, t^*), U(x, t^*; n + 1) = U_{n+1}(x, t^*).$$

Тогда для функций

$$\Delta T(x, t^*) = T_{n+1}(x, t^*) - T_n(x, t^*), \Delta U(x, t^*) = U_{n+1}(x, t^*) - U_n(x, t^*)$$

составляется задача

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial t^*} = F_{11} \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2} + \varepsilon F_{12} \frac{\partial \Delta U}{\partial t^*}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial t^*} = F_{21} \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2} + D_w^* F_{22} \frac{\partial^2 \Delta U}{\partial z^2} + \Delta D_w^* F_{22} \frac{\partial^2 \Delta U}{\partial z^2} + \Delta D_w^* F_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad (14)$$

$$F_{11} \frac{\partial \Delta T(1, t^*)}{\partial z} = -F_{0q1} \Delta T(1, t^*) + (1 - \varepsilon) F_{0q2} \Delta U(1, t^*),$$

$$F_{21} \frac{\partial \Delta T(1, t^*)}{\partial z} + D_w^* F_{22} \frac{\partial \Delta U(1, t^*)}{\partial z} + \Delta D_w^* F_{22} \frac{\partial \Delta U(1, t^*)}{\partial z} + \Delta D_w^* F_{22} \frac{\partial U(1, t^*)}{\partial z} = -F_{0m1} \Delta U(1, t^*),$$

$$\frac{\partial \Delta T(0, t^*)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Delta U(0, t^*)}{\partial z} = 0,$$

$$\Delta T(z, 0) = 0, \quad \Delta U(z, 0) = 0.$$

Умножим (13) на произвольную функцию $\psi(z, t^*)$, (14) на произвольную функцию $\eta(z, t^*)$ и проинтегрируем по всей области $Q = (0, 1) \times (0, t_{max})$.

Учитывая начально-граничные условия и предполагая $\frac{\partial \psi(0, t^*)}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \eta(0, t^*)}{\partial z} = 0$, $\psi(z, t_{max} = 0)$ и $\eta(z, t_{max} = 0)$, получаем следующую сопряженную задачу:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t^*} + F_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + F_{21} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t^*} + D_w^* F_{22} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \varepsilon F_{12} \frac{\partial \psi}{\partial t^*} = 0.$$

$$-(F_{oq1} \psi(1, t^*) + F_{11} \frac{\partial \psi(1, t^*)}{\partial z} + F_{21} \frac{\partial \eta(1, t^*)}{\partial z}) = 2(T(1, t^*) - T_g(t^*)),$$

$$((1 - \varepsilon)F_{oq2} \psi(1, t^*) - F_{om1} \eta(1, t^*) - D_w^* F_{22} \frac{\partial \eta(1, t^*)}{\partial z}) = 2(U(1, t^*) - W_g(t^*)).$$

$$\frac{\partial \psi(0, t^*)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \eta(0, t^*)}{\partial z} = 0, \quad \psi(z, t_{max}) = 0, \quad \eta(z, t_{max}) = 0.$$

Приращение функционала от итераций до итераций записывается в виде:

$$J_{n+1}(D_w^*) - J_n(D_w^*) = 2 \int_0^{t_{max}} (T(1, t^*) - T_g(t^*)) \Delta T(1, t^*) dt^* + \int_0^{t_{max}} (\Delta T(1, t^*))^2 dt^* + \\ + 2 \int_0^{t_{max}} (U(1, t^*) - W_g(t^*)) \Delta U(1, t^*) dt^* + \int_0^{t_{max}} (\Delta U(1, t^*))^2 dt^*.$$

Второе и четвертое слагаемое на правой части знака равенство имеет второй порядок малости. Поэтому знак левой части знака равенство определяется знаком первой слагаемой стоящее на правой части знака равенства.

На основе сопряженной задачи получим:

$$J_{n+1}(D_w^*) - J_n(D_w^*) = (\Delta D_w^* F_{22} \frac{\partial U_n}{\partial z}, \frac{\partial \eta}{\partial z}).$$

Мы хотим, чтобы функционал от итераций к итераций монотонно уменьшался. Поэтому

$$D_w^*(n+1) = D_w^*(n) - \beta F_{22} (\frac{\partial U_n}{\partial z}, \frac{\partial \eta}{\partial z}).$$

6 Результаты и обсуждение

Результаты данной работы были докладованы и обсуждены в международной конференции "Applied Inverse Problems Conference 2019" в городе Гренобль, Франция и в конгрессе "International Congress on Industrial and Applied Mathematics 2019" в городе Валенсия, Испания.

7 Заключение

В данной работе были получены следующие результаты:

- используя математическую модель совместного переноса влаги и тепла был разработан приближенный метод расчета коэффициента диффузии почвенной влаги;
- проведены численные расчеты;
- полученное значение искомого параметра сходится с экспериментальными данными зарубежных ученых.

8 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант AP05132736 - Моделирование деградационных явлений в почве и создание автономного контрольно - измерительного прибора неразрушающего контроля с программным обеспечением в реальном времени, 2018-2020 годы)

Список литературы

- [1] Berger J., Guernouti S., Woloszyn M., and Buhe C. Factors governing the development of moisture disorders for integration into building performance simulation // J. Building Eng., - 2015.- 3:1Ц15.
- [2] Mendes N., Chhay M., Berger J., and Dutykh D. Numerical methods for diffusion phenomena in building physics// PUCP Press, Curitiba, Parana. - 2017. - 1 edition.
- [3] Desta T. Z., Langmans J., and Roels S. Experimental data set for validation of heat, air and moisture transport models of building envelopes // Building and Environment. - 2011. - 46(5):1038Ц1046.
- [4] Kalamees T. and Kurnitski J. Moisture Convection Performance of External Walls and Roofs // Journal of Building Physics. - 2010. - 33(3):225Ц247.
- [5] Whitaker S. Flow in porous media II: The governing equations for immiscible, two-phase flow // Transport in Porous Media. - 1986. - 1(2):105Ц125.
- [6] Luikov A. V. Heat and mass transfer in capillary-porous bodies // Pergamon Press, New York. - 1986.
- [7] Dos Santos G. H., Mendes N. Heat, air and moisture transfer through hollow porous blocks // Int. J. Heat Mass Transfer. - 2009. - 52(9-10):2390Ц2398.
- [8] Driscoll T. A., Hale N., and Trefethen L. N. Chebfun Guide // Pafnuty Publications, Oxford. - 2014.
- [9] Mnasri F., Abahri K., El G., Bennacer R., and Gabsi S. Numerical analysis of heat, air, and moisture transfers in a wooden building material // Thermal Science. - 2017. - 21(2):785Ц795.
- [10] Vololonirina O. , Coutand M. , and Perrin B. Characterization of hygrothermal properties of wood-based products - Impact of moisture content and temperature // Construction and Building Materials. - 2014. - 63:223Ц233.
- [11] Taylor P. J. The stability of the Du Fort-Frankel method for the diffusion equation with boundary conditions involving space derivatives // The Computer Journal. - 1970. - 13(1):92Ц97.
- [12] Максимов А.М., Цыпкин Г.Г. Фазовые переходы вода-лед в ненасыщенных грунтах // Препринт ИПМ АН СССР. - 1989. - с382. 44 с.
- [13] Мордовской С.Д., Павлов Б.Н., Петров Е.Е. Математические модели промерзания-протаивания мерзлого грунта // Наука и образование, Вып.3. Якутск. - 1996. - 52-56 с.
- [14] Ершов Э.Д. Общая геокриология // М.: Изд-во МГУ. - 2001. - 668 с.

- [15] Bektemesov M. A., Rysbaiuly B. An iterative method for calculating the thermal conductivity of soil freezing // *Journal of International Scientific Publications Materials, Methods and Technologies*. - 2012. - Vol. 6, - P. 13-20.
- [16] Julien B., Dutykh D., Mendes M., Rysbaiuly B. A new model for simulating heat, air and moisture transport in porous building materials // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. - 2019. - Vol. 134, - P. 1041-1060.
- [17] Kabanikhin S. I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications // De Gruyter, Germany. - 2011. - P. 459.

References

- [1] Berger J., Guernouti S., Woloszyn M., and Buhe C., "Factors governing the development of moisture disorders for integration into building performance simulation", *J. Building Eng.* 3(2015): 1-15.
- [2] Mendes N., Chhay M., Berger J., and Dutykh D., "Numerical methods for diffusion phenomena in building physics", *PUCP Res., Curitiba, Parana* 1(2017).
- [3] Desta T. Z., Langmans J., and Roels S., "Experimental data set for validation of heat, air and moisture transport models of building envelopes", *Building and Environment* vol. 46, no 5 (2011): 1038-1046.
- [4] Kalamees T. and Kurnitski J., "Moisture Convection Performance of External Walls and Roofs", *Journal of Building Physics* vol. 33, no 3 (2010): 225-247.
- [5] Whitaker S., "Flow in porous media II: The governing equations for immiscible, two-phase flow", *Transport in Porous Media* vol. 1, no 2 (1986): 105-125.
- [6] Luikov A. V., "Heat and mass transfer in capillary-porous bodies", *Pergamon Press, New York* (1966)
- [7] Dos Santos G. H., Mendes N., "Heat, air and moisture transfer through hollow porous blocks", *Int. J. Heat Mass Transfer* vol. 52, (2009): 2390-2398.
- [8] Driscoll T. A., Hale N., and Trefethen L. N. "Chebfun Guide" *Pafnuty Publications, Oxford* (2014).
- [9] Mnasri F., Abahri K., El G., Bennacer R., and Gabsi S., "Numerical analysis of heat, air, and moisture transfers in a wooden building material", *Thermal Science* vol. 21, 2(2017): 785-795.
- [10] Vololonirina O., Coutand M., and Perrin B., "Characterization of hygrothermal properties of wood-based products - Impact of moisture content and temperature", *Construction and Building Materials* vol. 63, (2014): 223-233.
- [11] Taylor P.J., "The stability of the Du Fort-Frankel method for the diffusion equation with boundary conditions involving space derivatives", *The Computer Journal* vol. 13, no 1 (1970): 92-97.
- [12] Maksimov A.M., Cipkin G.G., "Water-ice phase transitions in unsaturated soils", *Preprint IPM Academy of Sciences of the USSR* no 382 (1989): 44.
- [13] Mordovskiy S.D., Pavlov B.N., "Mathematical models of freezing-thawing of frozen soil", *Science and Education, Yakutsk* vol. 3, (1996): 52-56.
- [14] Ershov E.D., Pavlov B.N., "Mathematical models of freezing-thawing of frozen soil", *General geocryology, MSU publ.* (2001): 688.
- [15] Bektemesov M. A., Rysbaiuly B., "An iterative method for calculating the thermal conductivity of soil freezing", *Journal of International Scientific Publications Materials, Methods and Technologies* vol. 6, (2012): 13-20.
- [16] Berger J., Dutykh D., Mendes N., Rysbaiuly B., "A new model for simulating heat, air and moisture transport in porous building materials", *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol. 134, (2019): 1041-1060.
- [17] Kabanikhin S. I., "Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications", *De Gruyter, Germany* (2011): 459.