УДК 517.927.6

[1]Б.Е. Кангужин , [2]Г.М. Нальжупбаева

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: [1] kanbalta@mail.ru, [2] nalzhuppa@list.ru

Аналог формулы Грина и самосопряженные операторы в проколотых областях [1]

Объектом исследования данной статьи является полигармонический оператор. Полигармонический оператор это есть обобщение бигармонического оператора. В двухмерном случае бигармонический оператор, в свою очередь, является математической моделью тонких упругих плоских пластин. В этой работе для оператора, порожденного полигармоническим уравнением и граничными условиями Дирихле, в проколотой области $\Omega_0 := \Omega \setminus \{M_0\}$, где Ω – односвязная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^2$, а $M_0 = x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ – внутренняя фиксированная точка области Ω, получен аналог формулы Грина и описан класс самосопряженных задач. Для этого введено специальное функциональное пространство $\mathcal{D}_m$. Функциональное пространство $\mathcal{D}_m$ определено со специальным функционалом $\alpha(\cdot)$, который впервые был введен в 2011 году в работе Кангужина Балтабека Есматовича и Аниярова Альмира Аскаровича для оператора Лапласа. Еще одним приложением являются полигармонические операторы с сингулярными потенциалами. Свойства и приложения оператора Лапласа с сингулярными потенциалами исследованы во многих работах. И эта статья является продолжением серий работ в данном направлений.
Ключевые слова: полигармоническое уравнение, проколотая область, формула Грина, самосопряженное расширение.

Kanguzhin B.E., Nalzhupbayeva G.M.

An analogue of Green's formulae and self-adjoint operators in punctured domains

The object of study of this article is polyharmonic operator. Polyharmonic operator is a generalization biharmonic operator. It is some models of thin flat elastic plates with point interactions. In two dimention, it is the biharmonic equation satisfied, to a good approximation, by a small transverse deflection of a thin flat elastic plate. In this work for an operator generated by a polyharmonic equation and Dirichlet boundary conditions in the punctured domain $\Omega_0 := \Omega \setminus \{M_0\}$, where Ω - a simply connected domain with sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$ in $\mathbb{R}^2$ and $M_0 = x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ - internal fixed point of the region $Omega$, we obtain an analogue of Green's formula and described class of self-adjoint problems. For this we introduce a special function space $\mathcal{D}_m$. Function space $\mathcal{D}_m$ is defined with a special functional $\alpha(\cdot)$, which was first introduced in 2011 year in Kanguzhin Baltabek Esmatovich and Aniyarov Almir Askarovich for the Laplace operator. Another application is a polyharmonic operators with singular potentials. properties and application of the Laplace operator with singular potentials investigated in many studies. And this article is a continuation of series of works in this direction.
Key words: polyharmonic equation, punctured domain, Green's formulae, self-adjoint extension.

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант 0732/ГФ, 2012г.–2014г.

Кангужин Б.Е., Нәлжұпбаева Г.М.

Грин формуласының аналогы және ойылған аймақтағы өзіне–өзі түйіндес операторлар

Зерттеу нысаны полигармоникалық оператор болып табылады. Полигармоникалық оператор бигармоникалық оператордың жалпыламасы болып табылады. Екі өлшемді жағдайда бигармоникалық оператор жұқа пластинаның математикалық моделі болып табылады. Бұл жұмыста ойылған $\Omega_0 := \Omega \setminus \{M_0\}$, мұнда Ω – бірбайланысты аймақта $\mathbb{R}^2$-дауы $\partial\Omega$ шекарасымен, ал $M_0 = x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ – ішкі бекітілген Ω аймауындауы ішкі нүкте, полигармоникалық теңдеуімен және Дирихле шекаралық шарттарымен туындалған оператор үшін Грин формуласының аналогы және өзіне өзі түйіндес табылды. Ол үшін арнайы функционалдық $\mathcal{D}_m$ кеңістігі еңгізілді. Функционалдық $\mathcal{D}_m$ кеңістігі $\alpha(\cdot)$ функционалы арқылы еңгізілді, ол алғашқы рет 2011 жылы Кангужин Балтабек Есматович пен Анияров Альмир Аскаровичтың жұмыстарында Лаплас операторы үшін сипатталды және өзіне өзі түйіндес операторлардың кванттық механикада, физикада, әрі математикадағы маңыздылығы жоғары болғандықтан өзіне өзі түйіндес кеңейтулерін зерттеу өте маңызды болып табылады.
Түйін сөздер: полигармоникалық теңдеу, ойылған аймақ, Грин формуласы, өзіне–өзі түйіндес кеңейту.

Введение

Свойства и приложения оператора Лапласа с сингулярными потенциалами были исследованы во многих работах (к примеру, в одномерном случае [1]-[2] и во многомерных случаях [3]). В статье [4] изучены корректно разрешимые краевые задачи для оператора Лапласа в проколотой области. В данной работе опишем класс корректно разрешимых задач для полигармонического оператора в проколотой области и выделим из них самосопряженные задачи. Данная работа является продолжением серии работ [4]-[6]. Введем в рассмотрение для натурального числа $m > 1$ дифференциальное выражение

$$(-\Delta)^m u := \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^m$$

в области $\Omega_0 := \Omega \setminus \{M_0\}$, где Ω – односвязная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^2$, а $M_0 = x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ – внутренняя фиксированная точка области Ω. Перейдем от выражения $(-\Delta)^m u$ к оператору в пространстве $L_2(\Omega)$. Класс функций, представимых в виде

$$u(x) = u_0(x) + \alpha_u G(x, x^0),$$

обозначим через $\mathcal{D}_m$. Где α_u – некая постоянная, $u_0(x) \in \mathbb{D}_m$:

$$u \in W_2^{2m}(\Omega), \ \ u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, ..., \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{m-1} u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Здесь и далее, $G(x, x^0)$ – функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения. Для краткости записи, через G будем обозначать функцию $G(x, x^0)$. Обозначим

$$\Pi_\delta^0 = \{(x_1, x_2) : -\delta \le x_1 - x_1^0 \le \delta, \ -\delta \le x_2 - x_2^0 \le \delta\}.$$

Для $h \in \mathcal{D}_m$ введем следующий функционал

$$\alpha(h) = \frac{1}{2} \lim_{\delta \to +0} \int_{x_1^0-\delta}^{x_1^0+\delta} \left[\frac{\partial(-\Delta)^{m-1} h(\xi, x_2^0 + \delta)}{\partial x_2} - \frac{\partial(-\Delta)^{m-1} h(\xi, x_2^0 - \delta)}{\partial x_2}\right] d\xi +$$

$$+\int_{x_2^0-\delta}^{x_2^0+\delta}\left[\frac{\partial(-\Delta)^{m-1}h(x_1^0+\delta,\eta)}{\partial x_1}-\frac{\partial(-\Delta)^{m-1}h(x_1^0-\delta,\eta)}{\partial x_1}\right]d\eta. \qquad (1)$$

Заметим, что $\alpha(h) = 0$ для $h \in C^{2m-1}(\Omega)$. Для начала, докажем необходимую для дальнейших исследований лемму.

Лемма 1 *Для функции $G(x, x^0)$ выполняется соотношение*

$$\alpha(G(x,x^0)) = 1.$$

Доказательство. Так как $G(x, x^0)$ – функция Грина, то ее можно представить в виде

$$G(x,x^0) = \varepsilon_{m,2}(x,x^0) + f_m(x,x^0),$$

где $f_m(x, x^0)$ достаточно гладкая функция и

$$(-\Delta_x)^m f_m(x,x^0) = 0,\ x \in \Omega$$

и $\alpha(f_m(x, x^0)) = 0$, а $\varepsilon_{m,2}(x, y)$ – фундаментальное решение полигармонического оператора $(-\Delta)^m$. Из свойства фундаментального решения, имеем

$$(-\Delta_x)^{m-1}\varepsilon_{m,2}(x,y) = \varepsilon_{1,2}(x,y),$$

где

$$\varepsilon_{1,2}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2)$$

– фундаментальное решение оператора Лапласа. Учитывая замеченные выше свойства функции Грина, фундаментального решения и того, что

$$\frac{\partial\ln((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2)}{\partial x_1} = \frac{2(x_1-y_1)}{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},$$

$$\frac{\partial\ln((x_2-y_2)^2+(x_2-y_2)^2)}{\partial x_2} = \frac{2(x_1-y_1)}{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

несложными вычислениями придем к

$$\alpha(G(x,x^0)) = \frac{1}{4\pi}\lim_{\delta\to+0}\int_{x_2^0-\delta}^{x_2^0+\delta}\left(\frac{4\delta}{\delta^2+(x_2^0-y)^2}\right)dy+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\lim_{\delta\to+0}\int_{x_1^0-\delta}^{x_1^0+\delta}\left(\frac{4\delta}{\delta^2+(x_1^0-x)^2}\right)dx = 1.$$

Таким образом лемма доказана. Из определения и в силу леммы 1 для произвольных $u, v \in \mathcal{D}_m$ справедливы разложения вида

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \alpha(u)G(x,x^0)$$

и

$$v(x,y) = v_0(x,y) + \alpha(v)G(x,x^0),$$

где $u_0, v_0 \in \mathbb{D}_m$.

Обозначим через

$$\xi^-(u) := u_0(x^0),$$

$$\xi^+(u) := 2\alpha(u).$$

С дифференциальным выражением $(-\Delta)^m u$ свяжем оператор L_M, определенный равенством

$$L_M u = (-\Delta)^m u, \quad x \in \Omega_0$$

на $u \in \mathcal{D}_m$. Оператор L_m определим как сужение L_M на область

$$D(L_m) = \{u | u \in \mathcal{D}_m,\ \xi^-(u) = 0, \xi^+(u) = 0\}.$$

Через $\mathcal{R}(L_m)$ обозначим область значений оператора L_m. Заметим, что оператор L_M замкнут. В данной статье решили работать сразу с замкнутыми операторами, так как достаточно много работ посвященных к замыканию операторов. На самом деле, оператор L_m является сужением оператора m–лапласа с граничными условиями Дирихле в области Ω, то есть является сужением самосопряженного оператора (с конечным индексом дефекта). Как ниже будет показано, оператор L_M является сопряженным оператором к оператору L_m. Таким образом L_M – замкнутый оператор.

Аналог формулы Грина и класс самосопряженных задач

Цель данного параграфа выписать аналог формулы Грина и класс самосопряженных расширений оператора L_m.

Теорема 1 *(Аналог формулы Грина) Пусть $u, v \in \mathcal{D}_m$. Тогда*

$$< L_M u, v >=< u, L_M v > +\xi^-(u)\xi^+(v) - \xi^-(v)\xi^+(u).$$

Доказательство. Так как $(-\Delta)^m_x G = 0$ в области Ω_0, то для произвольных $u, v \in \mathcal{D}_m$

$$\int_{\Omega_0}\int (-\Delta)^m u(x,y)v(x,y) - u(x,y)(-\Delta)^m v(x,y)dxdy =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}\Big[\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta^0}\left(\frac{\partial(-\Delta)^i u}{\partial n}(-\Delta)^{m-1-i}v - (-\Delta)^i u\frac{\partial(-\Delta)^{m-1-i}v}{\partial n}\right)ds\Big] =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}\Big[\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta^0}\left(\frac{\partial(-\Delta)^i u_0}{\partial n}(-\Delta)^{m-1-i}v_0 - (-\Delta)^i u_0\frac{\partial(-\Delta)^{m-1-i}v_0}{\partial n}\right)ds\Big] +$$

$$+\alpha(u)\left(\sum_{i=0}^{m-1}\Big[\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta^0}\left(\frac{\partial(-\Delta)^i u_0}{\partial n}(-\Delta)^{m-1-i}G - (-\Delta)^i u_0\frac{\partial(-\Delta)^{m-1-i}G}{\partial n}\right)ds\Big]\right) +$$

$$+\alpha(v)\left(\sum_{i=0}^{m-1}\Big[\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta^0}\left(\frac{\partial(-\Delta)^i G}{\partial n}(-\Delta)^{m-1-i}v_0 - (-\Delta)^i G\frac{\partial(-\Delta)^{m-1-i}v_0}{\partial n}\right)ds\Big]\right).$$

Очевидно, что

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta^0}\left(\frac{\partial(-\Delta)^i u_0}{\partial n}(-\Delta)^{m-1-i}v_0-(-\Delta)^i u_0\frac{\partial(-\Delta)^{m-1-i}v_0}{\partial n}\right)ds=0,\ i=0,1,...,m-1,$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta^0}\left(\frac{\partial(-\Delta)^i u_0}{\partial n}(-\Delta)^{m-1-i}G-(-\Delta)^i u_0\frac{\partial(-\Delta)^{m-1-i}G}{\partial n}\right)ds=0,\ i=1,...,m-1,$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta^0}\left(\frac{\partial(-\Delta)^i G}{\partial n}(-\Delta)^{m-1-i}v_0-(-\Delta)^i G\frac{\partial(-\Delta)^{m-1-i}v_0}{\partial n}\right)ds=0,\ i=0,...,m-2,$$

поскольку $u_0,v_0\in W_2^{2m}(\Omega)$. Тогда имеем

$$\int_{\Omega_0}\int(-\Delta)^m u(x,y)v(x,y)-u(x,y)(-\Delta)^m v(x,y)dxdy=$$

$$=\alpha(u)\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta^0}\left(\frac{\partial(-\Delta)^{m-1}G}{\partial n}v-(-\Delta)^{m-1}G\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds-$$

$$-\alpha(v)\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta^0}\left(\frac{\partial(-\Delta)^{m-1}G}{\partial n}u-(-\Delta)^{m-1}G\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

В дальнейшем, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2 *Для произвольного* $v\in W_2^2(\Omega)$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta^0}\left(\frac{\partial(-\Delta)^{m-1}G}{\partial n}v-(-\Delta)^{m-1}G\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds=2v(x^0).$$

Доказательство. Применяя не сложные преобразования и пользуясь тем, что $v\in W_2^2(\Omega)$ вычислим

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta^0}\left(\frac{\partial(-\Delta)^{m-1}G}{\partial n}v-(-\Delta)^{m-1}G\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{x_2^0-\delta}^{x_2^0+\delta}\frac{v(x_1^0+\delta,y)-v(x_1^0,x_2^0)}{\delta}\delta\frac{\partial(-\Delta)^{m-1}G(x_1^0+\delta,y,x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1}dy+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_2^0-\delta}^{x_2^0+\delta}\frac{v(x_1^0,x_2^0)-v(x_1^0-\delta,y)}{\delta}\delta\frac{\partial(-\Delta)^{m-1}G(x_1^0-\delta,y,x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1}dy+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_2^0-\delta}^{x_2^0+\delta}v(x_1^0,x_2^0)\left(\frac{\partial(-\Delta)^{m-1}G(x_1^0+\delta,y,x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1}-\frac{\partial(-\Delta)^{m-1}G(x_1^0-\delta,y,x_0,x_2^0)}{\partial x_1}\right)dy+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_1^0-\delta}^{x_1^0+\delta}\frac{v(x,x_2^0+\delta)-v(x_1^0,x_2^0)}{\delta}\delta\frac{\partial(-\Delta)^{m-1}G(x,x_2^0+\delta,x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2}dx+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_1^0-\delta}^{x_1^0+\delta}\frac{v(x_1^0,x_2^0)-v(x,x_2^0-\delta)}{\delta}\delta\frac{\partial(-\Delta)^{m-1}G(x,x_2^0-\delta,x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2}dx+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_1^0-\delta}^{x_1^0+\delta}v(x_1^0,x_2^0)\left(\frac{\partial(-\Delta)^{m-1}G(x,x_2^0+\delta,x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2}-\frac{\partial(-\Delta)^{m-1}G(x,x_2^0-\delta,x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2}\right)dx-$$

$$-\lim_{\delta\to+0}\int_{x_2^0-\delta}^{x_2^0+\delta}\frac{\frac{\partial v(x_1^0+\delta,y)}{\partial x_1}-\frac{\partial v(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1}}{\delta}\delta(-\Delta)^{m-1}G(x_1^0+\delta,y,x_1^0,x_2^0)dy-$$

$$-\lim_{\delta\to+0}\int_{x_2^0-\delta}^{x_2^0+\delta}\frac{\frac{\partial v(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1}-\frac{\partial v(x_1^0-\delta,y)}{\partial x_1}}{\delta}\delta(-\Delta)^{m-1}G(x_1^0-\delta,y,x_1^0,x_2^0)dy-$$

$$-\lim_{\delta\to+0}\int_{x_2^0-\delta}^{x_2^0+\delta}\frac{\partial v(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1}\left((-\Delta)^{m-1}G(x_1^0+\delta,y,x_1^0,x_2^0)-(-\Delta)^{m-1}G(x_1^0-\delta,y,x_1^0,x_2^0)\right)dy-$$

$$-\lim_{\delta\to+0}\int_{x_1^0-\delta}^{x_1^0+\delta}\frac{\frac{\partial v(x,x_2^0+\delta)}{\partial x_2}-\frac{\partial v(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2}}{\delta}\delta(-\Delta)^{m-1}G(x,x_2^0+\delta,x_1^0,x_2^0)dx-$$

$$-\lim_{\delta\to+0}\int_{x_1^0-\delta}^{x_1^0+\delta}\frac{\frac{\partial v(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2}-\frac{\partial v(x,x_2^0-\delta)}{\partial x_2}}{\delta}\delta(-\Delta)^{m-1}G(x,x_2^0-\delta,x_1^0,x_2^0)dx-$$

$$-\lim_{\delta\to+0}\int_{x_1^0-\delta}^{x_1^0+\delta}\frac{\partial v(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2}\left((-\Delta)^{m-1}G(x,x_2^0+\delta,x_1^0,x_2^0)-(-\Delta)^{m-1}G(x,x_2^0-\delta,x_1^0,x_2^0)\right)dx=$$

$$=2\alpha(G(x,x^0))v(x_1^0,x_2^0).$$

Отсюда и в силу леммы 1 получим требуемое.

Из лемм 1 и 2 следует справедливость теоремы 1.

Лемма 3 *Имеет место разложение*

$$\mathcal{R}(L_m)\oplus\mathbf{Ker}L_M=L_2(\Omega).$$

Доказательство. Пусть $f\in\mathcal{R}(L_m)$. Тогда для произвольного $v\in\mathbf{Ker}L_M$ в силу аналога формулы Лагранжа имеем

$$<f,v>=<L_mu,v>=<u,L_Mv>=0.$$

Пусть теперь найдется такое $f\in L_2(\Omega)$, что для любого $v\in\mathbf{Ker}L_M$

$$<f,v>=0.$$

Не сложно убедится в том, что $G(x,x^0) \in \mathbf{Ker} L_M$. Тогда для функции

$$u_0(x) = \int_\Omega \int G(x,\xi) f(\xi_1,\xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

выполнены следующие включения и равенства:

$$u_0 \in \mathbb{D}_m,$$

$$(-\Delta)^m u_0(x) = f(x),\ x \in \Omega_0,$$
$$u_0(x^0) = < f, G > = 0,$$
$$\alpha(u_0) = 0.$$

То есть $u_0 \in D(L_m)$. Таким образом, лемма 3 доказана.

Лемма 4 *$D(L_m)$ плотно в $L_2(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть функция $g \in L_2(\Omega)$ ортогональна линеалу $D(L_m)$. Найдем функцию v–произвольное решение уравнения $L_M v = g$. Тогда для любого $u \in D(L_m)$ имеем

$$0 = < u, g > = < u, L_M v > = < L_m u, v > .$$

В силу леммы 3 выполнено $v \in \mathbf{Ker} L_M$. Поэтому $g = L_M v = 0$. Лемма 4 доказана.

Теорема 2 *Оператор L_θ введенный следующим образом*

$$(-\Delta)^m u = f,\ \ x \in \Omega_0$$

для $u \in \mathcal{D}_m$ с условием

$$\theta_1 \xi^-(u) = \theta_2 \xi^+(u) \tag{2}$$

является самосопряженным расширением оператора L_m в пространстве $\mathcal{D}_m$, где $\theta = (\theta_1,\, \theta_2)$, θ_1, θ_2– некоторые вещественные числа и $\theta_1^2 + \theta_2^2 \neq 0$.

Доказательство. Так как для любых $u, v \in D(L_m)$

$$< L_m u, v > = < u, L_m v >,$$

то по определению [7] L_m – эрмитовый оператор. А в силу леммы 4 L_m – симметрический оператор. Таким образом, для того чтобы оператор L_θ был самосопряженным, достаточно, чтобы

$$D(L_\theta) = D(L_\theta^*). \tag{3}$$

Это следует из непосредственных вычислений с применением теоремы 1. Из условии теоремы следует, что хотя бы одно из чисел θ_1, θ_2 не равно нулю. Пусть $\theta_1 \neq 0$. Тогда условие (3) запишем в следующем виде

$$\xi^-(u) = \mu \xi^+(u), \tag{4}$$

где $\mu = \theta_2/\theta_1$. Тогда для произвольных $u \in D(L_\theta)$ и $v \in \mathcal{D}_m$ с учетом формулы (5) имеем

$$< (-\Delta)^m u, v > = < u, (-\Delta)^m v > + \xi^-(u)\xi^+(v) - \xi^-(v)\xi^+(u) =$$

$$= < u, (-\Delta)^m v > + \mu\xi^+(u)\xi^+(v) - \xi^-(v)\xi^+(u) =$$

$$= < u, (-\Delta)^m v > + [\mu\xi^+(v) - \xi^-(v)]\xi^+(u).$$

Так как достаточно много функций $u \in D(L_\theta)$ для которых $\xi^+(u) \neq 0$, то из полученного следует справедливость равенства (4). Случай $\theta_2 \neq 0$ рассматривается аналогично. Таким образом, теорема 2 доказана полностью. Аналогом теоремы 2 для обыкновенных дифференциальных операторов можно познакомиться в работе [6].

Литература

[1] *Березин, Ф.А.* Замечания об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом / Ф.А. Березин, Л.Д. Фаддеев // ДАН СССР. -1961. -Т. 137. -С. 1011-–1014.

[2] *Albeverio, S.* Some exactly solvable models in quantum mechanics: monograph / S. Albeverio, F. Gestezy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden. - Verlag: Springer, 1988. -P. 417.

[3] *Павлов, Б.С.* Теория расширений и явнорешаемые модели / Б.С. Павлов // Успехи мат. наук. -1987. -Т. 42. -Вып. 6. -С. 99–131.

[4] *Кангужин, Б.Е.* Корректные задачи для оператора Лапласа в проколотой области / Б.Е. Кангужин, А.А. Анияров // Мат. заметки. - 2011. -Т. 89. -Вып. 6. -С. 856–867.

[5] *Берикханова, Г.Е.* Резольвенты конечномерных возмущенных корректных задач для бигармонического оператора / Г.Е. Берикханова, Б.Е. Кангужин // Уфимский математический журнал. - 2010. - Т. 2. С. 17—34.

[6] *Кангужин, Б.Е.* О свойствах одной задачи Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом / Б.Е. Кангужин, Г.М. Нальжупбаева // Вестник КазНУ. Серия мат., инф., мех. - 2014. - Т. 78. - С. 23–32.

[7] *Наймарк, М.А.* Линейные дифференциальные операторы: монография. - М.: Наука, - 1969. - 528 с.

References

[1] *Berezin, F.A.* SZamechaniya ob uravnenii Shrodingera s singulyarnym potentsialom / F.A. Berezin, L.D. Faddeyev // DAN SSSR. -1961. - T. 137. - S. 1011 – 1014.

[2] *Albeverio, S.* Some exactly solvable models in quantum mechanics: monograph / S. Albeverio, F. Gestezy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden. - Verlag: Springer, 1988. -P. 417.

[3] *Pavlov, B.S.* The theory of extensions and explicitly solvable models / B.S. Pavlov // Usp. Sciences. -1987. -T. 42. , Vyp. 6. -S. 99 - 131.

[4] *Kanguzhin, B.E.* Korrektnyye zadachi dlya operatora Laplasa v prokolotoy oblasti / B.E. Kanguzhin, A.A. Aniyarov // Mat. zametki. - 2011. -T. 89. -Vyp. 6. -S. 856–867.

[5] *Berikkhanova, G.E.* MRezol'venty konechnomernykh vozmushchennykh korrektnykh zadach dlya bigarmonicheskogo operatora / G.E. Berikkhanova, B.E. Kanguzhin // Ufimskiy matematicheskiy zhurnal. -2010. -T. 2. -Vyp. 1. -S. 17–34.

[6] *Kanguzhin , B.E.* O svoystvakh odnoy zadachi Shturma - Liuvillya s singulyarnym potentsialom / B.E. Kanguzhin , G.M. Nalzhupbayeva // Vestnik KazNU. Seriya mat., inf., mekh. - 2014 - T. 78. - S. 23–32.

[7] *Naimark, M.A.* Lineynyye differentsial'nyye operatory: monograph. - M.: Nauka, 1969. - P. 528.