УДК 519.624

Ж.М. Кадирбаева

Институт математики и математического моделирования МОН РК,
Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: apelman86pm@mail.ru

Об одном приближенном методе нахождения решения нелокальной краевой задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений

В статье исследуются вопросы существования, единственности решения линейной нелокальной краевой задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений и построения ее приближенных решений. Нелокальная краевая задача для систем нагруженных гиперболических уравнений сводится к эквивалентной задаче, состоящей из семейства двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений и функциональных соотношений. Семейство двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений исследуется методом параметризации с неравномерным разбиением интервала между точками нагружения. Для этой цели осуществляется переход к эквивалентному семейству многоточечных краевых задач с функциональными параметрами. Функциональные параметры вводятся как значения неизвестной функции $v(x,t)$ на линиях разбиения. Предлагается алгоритм нахождения решения семейства краевых задач с функциональными параметрами. Основным условием осуществимости и сходимости алгоритма является обратимость матрицы $Q_\nu(a,x)$ специальной структуры, построенной по матрицам $A_j(x,t)$, $j=\overline{0,m+1}$, $P_2(x)$, $S_2(x)$, $(x,t)\in\bar{\Omega}$, и с учетом поведения матрицы $A_0(x,t)$ между точками нагружения. Неизвестные функции определяются с помощью рекуррентных формул нахождения приближенных решений задач Коши.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, нагруженное гиперболическое уравнение, метод параметризации, функциональный параметр, семейство алгоритмов.

Zh.M. Kadirbayeva

On an approximate method for finding of solution of nonlocal boundary value problem for systems of loaded hyperbolic equations

Questions of existence, uniqueness of the solution of linear nonlocal boundary value problem for systems of loaded hyperbolic equations and constructing of its approximate solutions are investigated in the article. Nonlocal boundary value problem for systems of loaded hyperbolic equations is reduced to the equivalent problem, consisting of a family of two-point boundary value problems for systems of loaded ordinary differential equations and functional relations. The family of two-point boundary value problems for systems of loaded ordinary differential equations is investigated by parametrization method with nonuniform partition of interval between points of load. For this purpose transition to equivalent family of multipoint boundary value problems with functional parameters is carried out. Functional parameters are entered as values of unknown function $v(x,t)$ on the lines of partition. The algorithm for finding of solutions of the family of boundary value problems with functional parameters is offered. The main condition of feasibility and convergence of algorithm is invertibility of matrix $Q_\nu(a,x)$ of the special structure constructed by matrices $A_j(x,t)$, $j=\overline{0,m+1}$, $P_2(x)$, $S_2(x)$, $(x,t)\in\bar{\Omega}$, and taking into account behavior of matrix $A_0(x,t)$ between points of load. Unknown functions are defined by the recurrent formulas for finding of approximate solutions of Cauchy problem.

Key words: nonlocal boundary value problem, loaded hyperbolic equation, parametrization method, functional parameter, family of algorithms.

Ж.М. Қадірбаева

Жүктелген гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал шеттік есептің шешімін табудың бір жуықтау әдісі туралы

Мақалада жүктелген гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықты бейлокал шеттік есептің шешімі болуы, жалқылығы және оның жуықталған шешімін тұрғызу мәселелері зерттеледі. Жүктелген гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал шеттік есеп жүктелген жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есептер әулетінен және функционалдық қатынастардан тұратын пара-пар есепке келтіріледі. Жүктелген жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есептер әулеті жүктелген нүктелер арасындағы аралықты бірқалыпты емес бөлу арқылы параметрлеу әдісімен зерттеледі. Осы мақсатта пара-пар функционалды параметрлі көп нүктелі шеттік есептер әулетіне көшу жүзеге асырылады. Функционалды параметрлер белгісіз $v(x,t)$ функциясының бөлу сызықтарындағы мәндері ретінде енгізіледі. Функционалды параметрлі шеттік есептер әулетінің шешімін табудың алгоритмі ұсынылады. Алгоритмнің жүзеге асырылуының негізгі шарты $A_j(x,t)$, $j=\overline{0,m+1}$, $P_2(x)$, $S_2(x)$, $(x,t)\in\bar{\Omega}$ матрицалары бойынша және жүктелген нүктелердің арасында $A_0(x,t)$ матрицасының қасиетін ескере отырып құрылған $Q_\nu(a,x)$ матрицасының қайтарымдылығы болып табылады. Белгісіз функциялар Коши есебінің жуықтау шешімін табудың рекурренттік формулалары арқылы анықталады..

Түйін сөздер: бейлокал шеттік есептер, жүктелген гиперболалық теңдеулер, параметрлеу әдісі, функционалдық параметр, алгоритмдер әулеті.

Введение

В последние годы в связи с интенсивным исследованием задач оптимального управления, долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги возникла необходимость в изучении нагруженных уравнений. Впервые этот термин был использован в работах А.М.Нахушева, в которых дано наиболее общее определение нагруженного уравнения и подробная классификация различных нагруженных уравнений: нагруженных дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных, функциональных уравнений, а также их многочисленные приложения. Именно результаты А.М.Нахушева и его учеников дали начало интенсивному изучению краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений [1-2].

Некоторые классы краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными исследовались в работах М.Х.Шханукова, А.В.Бородина, В.М.Казиева, А.Х.Аттаева, М.Т.Дженалиева, Л.С.Пулькиной, Д.М.Курьязова, М.Г.Волынской, М.И.Рамазанова и др [3-5].

Краевые задачи для нагруженных гиперболических уравнений впервые были рассмотрены в работах А.М.Нахушева [6]. На основе сведения к интегральным уравнениям Фредгольма получены достаточные условия существования классического решения краевых задач для нагруженных гиперболических уравнений.

Современные задачи естествознания приводят к необходимости обобщения классических задач математической физики, а также к постановке новых задач и разработке методов их исследования. Одним из классов качественно новых задач являются нелокальные задачи для дифференциальных уравнений.

В связи с этим приобретают особую актуальность нелокальные краевые задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений.

Постановка задачи.

В настоящей работе на $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается нелокальная краевая задача для системы нагруженных гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A_0(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + B_0(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + C_0(x,t)u + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(x,t)\frac{\partial u(x,\theta_{i-1})}{\partial x} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m+1} B_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=\theta_{i-1}} + \sum_{i=1}^{m+1} C_i(x,t)u(x,\theta_{i-1}) + f(x,t), \ (x,t) \in \Omega, \ u \in \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (2)$$

$$P_2(x)\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} + P_1(x)\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} + P_0(x)u(x,0) +$$

$$+S_2(x)\frac{\partial u(x,T)}{\partial x} + S_1(x)\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=T} + S_0(x)u(x,T) = \psi(x), \quad x \in [0,\omega], \qquad (3)$$

где $(n \times n)$-матрицы $A_j(x,t)$, $B_j(x,t)$, $C_j(x,t)$, $j = \overline{1, m+1}$, $P_k(x)$, $S_k(x)$, $k = \overline{0,2}$, n-вектор-функции $f(x,t)$, $\psi(x)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, $[0,\omega]$ соответственно и n-вектор-функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, $0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_m < \theta_{m+1} = T$.

Нормы элемента $\mathbb{R}^n$ и $(n \times n)$-матрицы определяем равенствами:

$$||u|| = \max_{s=\overline{1,n}} |u_s|, \qquad ||A(x,t)|| = \max_{s=\overline{1,n}} \sum_{k=1}^{n} |a_{sk}(x,t)|.$$

Через $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ $(C([0,\omega], \mathbb{R}^n))$ обозначим пространство непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ $(\psi : [0,\omega] \to \mathbb{R}^n)$ с нормой $||u||_0 = \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}} ||u(x,t)||$ $(||\psi||_1 = \max_{x\in[0,\omega]} ||\psi(x)||)$.

Определение 1. *Функция $u(x,t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные* $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, *называется классическим решением задачи (1) – (3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$ и выполняются краевые условия (2), (3).* Нелокальная краевая задача с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений без слагаемых с нагружениями и с условиями (2), (3) рассмотрена в [7]. Методом введения функциональных параметров были установлены коэффициентные достаточные условия существования единственного классического решения нелокальной краевой задачи для системы гиперболических уравнений. В работе [8] для решения линейной нелокальной краевой задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений (1) - (3) был предложен метод, основанный на сведении к эквивалентной задаче, состоящей из семейства двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений и функциональных соотношений. Были установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1) - (3) в терминах исходных данных и построены алгоритмы нахождения приближенных решений. В данной статье задача (1) - (3) путем введения новых неизвестных функций $v(x,t)$, $w(x,t)$ сводится к эквивалентной задаче, состоящей из семейства двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений и функциональных соотношений. Семейство двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений исследуется методом параметризации с неравномерным разбиением интервала между точками нагружения. Предлагается модифицированный алгоритм нахождения решения семейства двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений. Установлены коэффициентные достаточные условия существования единственного решения задачи (1) - (3). Для семейства периодических краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений на основе метода параметризации ранее были получены условия однозначной разрешимости исследуемой задачи в терминах исходных данных [9]. Алгоритмы нахождения решения семейство периодических краевых задач, предложенные в указанной работе, включали пункт, где решалась задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. В отличие от [9] в данной работе модифицированный алгоритм включает пункт, где используются приближенные решения задачи Коши в виде рекуррентных формул.

Переход к семейству двухточечных краевых задач

Введем новые неизвестные функции $v(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $w(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ и вместо (1) – (3) рассмотрим следующую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A_0(x,t)v+\sum_{i=1}^{m+1}A_i(x,t)v(x,\theta_{i-1})+F(x,t,w,u,\theta),\quad (x,t)\in\Omega, \tag{4}$$

$$P_2(x)v(x,0)+S_2(x)v(x,T)=d(x,w(x,0),u(x,0),w(x,T),u(x,T)),\quad x\in[0,\omega], \tag{5}$$

$$u(x,t)=\varphi(t)+\int_0^x v(\xi,t)d\xi,\qquad w(x,t)=\dot{\varphi}(t)+\int_0^x \frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t}d\xi, \tag{6}$$

где $F(x,t,w,u,\theta)=B_0(x,t)w(x,t)+C_0(x,t)u(x,t)+f(x,t)+$
$$+\sum_{i=1}^{m+1}B_i(x,t)w(x,\theta_{i-1})+\sum_{i=1}^{m+1}C_i(x,t)u(x,\theta_{i-1}),$$
$d(x,w(x,0),u(x,0),w(x,T),u(x,T))=$
$$=\psi(x)-P_1(x)w(x,0)-P_0(x)u(x,0)-S_1(x)w(x,T)-S_0(x)u(x,T).$$
Здесь условие $u(0,t)=\varphi(t)$ учтено в соотношениях (6).

Тройка непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $\{v(x,t),u(x,t),w(x,t)\}$ называется решением задачи (4) – (6), если функция $v(x,t)\in C(\bar{\Omega},R^n)$ имеет непрерывную на $\bar{\Omega}$ производную по t и удовлетворяет однопараметрическому семейству двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (5), где функции $u(x,t)$, $w(x,t)$ связаны с $v(x,t)$, $\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ функциональными соотношениями (6).

Задачи (1) – (3) и (4) – (6) эквивалентны том смысле, что если $u(x,t)$ – классическое решение задачи (1) – (3), то тройка функций $\{v(x,t),\,u(x,t),\,w(x,t)\}$, где $v(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $w(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, является решением задачи (4) – (6). И наоборот, если тройка функций $\{v(x,t),u(x,t),w(x,t)\}$ – решение задачи (4) – (6), то $u(x,t)$ является классическим решением задачи (1) – (3).

Семейство двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений

При известных $w(x,t)$, $u(x,t)$ в задаче (4), (5) требуется найти решение однопараметрического семейства двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому сначала рассмотрим семейство двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_0(x,t)v + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(x,t)v(x,\theta_{i-1}) + F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{7}$$

$$P_2(x)v(x,0) + S_2(x)v(x,T) = d(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{8}$$

где $F(x,t) \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $d(x) \in C([0,\omega], \mathbb{R}^n)$.

При фиксированных $x \in [0,\omega]$ задача (7), (8) является линейной двухточечной краевой задачей для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая была исследована различными методами. В работе [10] для решения линейной двухточечной краевой задачи для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений был использован метод параметризации [11]. Алгоритмы метода параметризации были построены без учета поведение матрицы дифференциальной части: интервалы между точками нагружения разбивались на одинаковое количество подинтервалов - l частей при всех $i = \overline{1, m+1}$. Получены необходимые и достаточные условия однозначной и корректной разрешимости исследуемой задачи в терминах исходных данных и предложены алгоритмы нахождения ее решения.

При изменении переменной x на $[0,\omega]$ получим семейство двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Непрерывная функция $v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, имеющая на $\bar{\Omega}$ непрерывную производную по t, называется решением краевой задачи (7), (8), если она удовлетворяет семейству систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений (7) и краевому условию (8).

Задачу (7), (8) исследуем методом параметризации с неравномерным разбиением интервала $[\theta_{i-1}, \theta_i)$, $i = \overline{1, m+1}$. Пусть $\|A_j(x,t)\| \le \alpha_j(x,t)$, где $\alpha_j(x,t)$, $j = \overline{0, m+1}$, непрерывны на $\bar{\Omega}$, и $\max\limits_{x \in [0,\omega]} \alpha_0(x,t) = \alpha(t)$. Возьмем число $a > 0$, предположим, что $\theta_{i-1,0} = \theta_{i-1}$ и через k_{i-1} обозначим число разбиения промежутка $[\theta_{i-1}, \theta_i)$, при котором имеет место неравенство $\int\limits_{\theta_{i-1,k_{i-1}-1}}^{\theta_i} \alpha(\tau)d\tau \le a$. Пусть $p_0 = 0$, $p_{l+1} = \sum\limits_{s=0}^{l} k_s$, $l = \overline{0, m}$ и $[0,\omega] \times [0,T) = [0,\omega] \times \bigcup\limits_{r=1}^{p_{m+1}} [t_{r-1}, t_r)$, где $t_0 = \theta_0 = 0$, $t_1 = \theta_{0,1}$, $t_2 = \theta_{0,2}$, ..., $t_{p_1} = \theta_1$, $t_{p_1+1} = \theta_{1,1}$, ..., $t_{p_2} = \theta_2$, ..., $t_{p_{m+1}} = T$.

Сужение функции $v(x,t)$ на $\Omega_r = [0,\omega] \times [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, обозначим через $v_r(x,t)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$. Введя дополнительные неизвестные функции $\lambda_r(x) = v_r(x, t_{r-1})$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, $x \in [0,\omega]$, и на каждой области Ω_r, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, произведя замену $\widetilde{v}_r(x,t) = v_r(x,t) - \lambda_r(x)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, получим краевую задачу с функциональными параметрами $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial \widetilde{v}_r}{\partial t} = A_0(x,t)[\widetilde{v}_r + \lambda_r(x)] + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(x,t)\lambda_{p_{i-1}+1}(x) + F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_r, \tag{9}$$

$$\widetilde{v}_r(x,t_{r-1})=0, \quad x\in[0,\omega], \quad r=\overline{1,p_{m+1}}, \tag{10}$$

$$P_2(x)\lambda_1(x)+S_2(x)\lambda_{p_{m+1}}(x)+S_2(x)\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_{p_{m+1}}(x,t)=d(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{11}$$

$$\lambda_s(x)+\lim_{t\to t_s-0}\widetilde{v}_s(x,t)=\lambda_{s+1}(x), \quad x\in[0,\omega], \quad s=\overline{1,p_{m+1}-1}. \tag{12}$$

Пусть $C(\bar{\Omega},\Omega_r,\mathbb{R}^{np_{m+1}})$ – пространство систем функций $v(x,[t])=(v_1(x,t),v_2(x,t),...,v_{p_{m+1}}(x,t))$, где функция $v_r:\Omega_r\to\mathbb{R}^n$ непрерывна и равномерно относительно $x\in[0,\omega]$ имеет конечный левосторонний предел $\lim\limits_{t\to t_r-0}v_r(x,t)$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$ с нормой $||v||_1=\max\limits_{r=\overline{1,p_{m+1}}}\sup\limits_{(x,t)\in\Omega_r}||v_r(x,t)||$.

Решением задачи (9) - (12) является пара $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*(x,[t]))$, с элементами $\lambda^*(x)=(\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),...,\lambda_{p_{m+1}}^*(x))\in C([0,\omega],\mathbb{R}^{np_{m+1}})$, $\widetilde{v}^*(x,[t])=(\widetilde{v}_1^*(x,t),\widetilde{v}_2^*(x,t),...,\widetilde{v}_{p_{m+1}}^*(x,t))\in C(\bar{\Omega},\Omega_r,\mathbb{R}^{np_{m+1}})$, где функции $\widetilde{v}_r^*(x,t)$ непрерывно дифференцируемы на Ω_r, и при $\lambda_r(x)=\lambda_r^*(x)$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$, $\lambda_{p_{i-1}+1}(x)=\lambda_{p_{i-1}+1}^*(x)$, $i=\overline{1,m+1}$, удовлетворяет семейство обыкновенных дифференциальных уравнений (9) и условиям (10) – (12).

Задачи (7), (8) и (9) - (12) эквивалентны в следующем смысле. Если пара $(\lambda(x),\widetilde{v}(x,[t]))$, где $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x),...,\lambda_{p_{m+1}}(x))$, $\widetilde{v}(x,[t])=(\widetilde{v}_1(x,t),\widetilde{v}_2(x,t),\ldots,$ $\widetilde{v}_{p_{m+1}}(x,t))$ – решение задачи (9) – (12), то функция $v(x,t)$ определяемая равенствами $v(x,t)=\widetilde{v}_r(x,t)+\lambda_r(x)$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$, $v(x,T)=\lambda_{p_{m+1}}(x)+\lim\limits_{t\to T-0}\widetilde{v}_{p_{m+1}}(x,t)$, является решением задачи (7), (8). И наоборот, если $v^*(x,t)$ является решением задачи (7), (8), то пара $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*(x,[t]))$, где $\lambda^*(x)=(v^*(x,0),v^*(x,t_1),...,v^*(x,t_{p_{m+1}-1}))$, $\widetilde{v}^*(x,[t])=(v^*(x,t)-v^*(x,0),v^*(x,t)-v^*(x,t_1),...,v^*(x,t)-v^*(x,t_{p_{m+1}-1}))$ будет решением задачи (9) - (12).

При фиксированных $\lambda_r(x)$ функция $\widetilde{v}_r(x,t)$ является решением задачи Коши (9), (10), эквивалентной семейству систем интегральных уравнений:

$$\widetilde{v}_r(x,t)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}\Big\{A_0(x,\tau)\Big[\widetilde{v}_r(x,\tau)+\lambda_r(x)\Big]+\sum_{i=1}^{m+1}A_i(x,\tau)\lambda_{p_{i-1}+1}(x)+$$
$$+F(x,\tau)\Big\}d\tau, \quad (x,t)\in\Omega_r, \quad r=\overline{1,p_{m+1}}. \tag{13}$$

Подставив вместо $\widetilde{v}_r(x,\tau)$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$, правую часть (13) и повторив этот процесс ν $(\nu=1,2,\ldots)$ раз получим:

$$\widetilde{v}_r(x,t)=D^0_{\nu,r}(a,x,t)\lambda_r(x)+\sum_{i=1}^{m+1}D^i_{\nu,r}(a,x,t)\lambda_{p_{i-1}+1}(x)+$$
$$+\widehat{F}_{\nu,r}(a,x,t)+G_{\nu,r}(a,x,t,\widetilde{v}), \quad (x,t)\in\Omega_r, \quad r=\overline{1,p_{m+1}}, \tag{14}$$

где $D^i_{\nu,r}(a,x,t)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A_i(x,\tau_1)d\tau_1+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(x,\tau_{\nu-1})\times$

$$\times\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}A_i(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1, \quad i=\overline{0,m+1}, \quad r=\overline{1,p_{m+1}},$$

$\widehat{F}_{\nu,r}(a,x,t)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}F(x,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A_0(x,\tau_1)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_1}F(x,\tau_2)d\tau_2d\tau_1+...+$

$$+\int\limits_{t_{r-1}}^{t} A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} F(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1, \quad r=\overline{1,p_{m+1}},$$

$$G_{\nu,r}(a,x,t,\widetilde{v}) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A_0(x,\tau_1)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x,\tau_{\nu-1})\times$$

$$\times\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A_0(x,\tau_\nu)\widetilde{v}_r(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1, \quad r=\overline{1,p_{m+1}}.$$

Переходя в правой части (14) к пределу при $t \to t_r - 0$, и подставив соответствующие им выражения в условия (11), (12), получим систему уравнений относительно функциональных параметров $\lambda_r(x), \quad r=\overline{1,p_{m+1}}$:

$$P_2(x)\lambda_1(x) + S_2(x)[I + D^0_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T)]\lambda_{p_{m+1}}(x) + S_2(x)\sum_{i=1}^{m+1} D^i_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T)\lambda_{p_{i-1}+1}(x) =$$

$$= d(x) - S_2(x)\widehat{F}_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T) - S_2(x)G_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T,\widetilde{v}), \tag{15}$$

$$[I + D^0_{\nu,s}(a,x,t_s)]\lambda_s(x) + \sum_{i=1}^{m+1} D^i_{\nu,s}(a,x,t_s)\lambda_{p_{i-1}+1}(x) =$$

$$= -\widehat{F}_{\nu,s}(a,x,t_s) - G_{\nu,s}(a,x,t_s,\widetilde{v}), \quad x\in[0,\omega], \quad s=\overline{1,p_{m+1}-1}. \tag{16}$$

Соотношения (15), (16) являются системой линейных функциональных уравнений относительно параметров $\lambda_r(x), \quad r=\overline{1,p_{m+1}}$.

Обозначив через $Q_\nu(a,x)$ матрицу, соответствующую левой части системы (15), (16) и введя векторы
$\widehat{F}_\nu(a,x) = \big(-d(x) + S_2(x)\widehat{F}_{\nu,p_{m+1}}(a,x,t_{p_{m+1}}), \widehat{F}_{\nu,1}(a,x,t_1),\ \ldots, \widehat{F}_{\nu,p_{m+1}-1}(a,x,t_{p_{m+1}-1})\big)$,
$G_\nu(a,x,\widetilde{v}) = \big(S_2(x)G_{\nu,p_{m+1}}(a,x,t_{p_{m+1}},\widetilde{v}), G_{\nu,1}(a,x,t_1,\widetilde{v}),\ \ldots, G_{\nu,p_{m+1}-1}(a,x,t_{p_{m+1}-1},\widetilde{v})\big)$,
запишем систему (15), (16) в виде:

$$Q_\nu(a,x)\lambda(x) = -\widehat{F}_\nu(a,x) - G_\nu(a,x,\widetilde{v}). \tag{17}$$

Алгоритм решения задачи (9) - (12)

Решение краевой задачи с параметром (9) - (12) – пару $(\lambda^*(x), \widetilde{v}^*(x,[t]))$ находим как предел последовательности $(\lambda^{(k)}(x), \widetilde{v}^{(k)}(x,[t]))$, $k=0,1,2,...$, определяемой по следующему алгоритму:

0 - Шаг. а) Предполагая, что при выбранных $a>0$, $\nu\in\mathbb{N}$, матрица $Q_\nu(a,x): \mathbb{R}^{np_{m+1}} \to \mathbb{R}^{np_{m+1}}$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$, начальное приближение $\lambda^{(0)}(x) = (\lambda^{(0)}_1(x), \lambda^{(0)}_2(x), ..., \lambda^{(0)}_{p_{m+1}}(x))$ определяем из системы линейных уравнений $Q_\nu(a,x)\lambda(x) = -\widehat{F}_\nu(a,x)$, $x\in[0,\omega]$. б) На Ω_r определим компоненты системы функций $\widetilde{v}^{(0)}_r(x,[t])$ из следующих соотношений:

$$\widetilde{v}^{(0)}_r(x,t) = D^0_{\nu,r}(a,x,t)\lambda^{(0)}_r(x) + \sum_{i=1}^{m+1} D^i_{\nu,r}(a,x,t)\lambda^{(0)}_{p_{i-1}+1}(x) + \widehat{F}_{\nu,r}(a,x,t).$$

1 - Шаг. а) Подставив вместо $\widetilde{v}(x,[t])$ найденную функцию $\widetilde{v}^{(0)}(x,[t])$ из систем уравнений (17) определяем $\lambda^{(1)}(x) = (\lambda^{(1)}_1(x), \lambda^{(1)}_2(x), ..., \lambda^{(1)}_{p_{m+1}}(x))$, $x\in[0,\omega]$. б) На Ω_r определим компоненты системы функций $\widetilde{v}^{(1)}_r(x,[t])$ из следующих соотношений:

$$\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t) = D^0_{\nu,r}(a,x,t)\lambda_r^{(1)}(x) + \sum_{i=1}^{m+1} D^i_{\nu,r}(a,x,t)\lambda^{(1)}_{p_{i-1}+1}(x) +$$

$$+\widehat{F}_{\nu,r}(a,x,t) + G_{\nu,r}(a,x,t,\widetilde{v}^{(0)}), \quad r=\overline{1,p_{m+1}}.$$

И т. д.

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (7), (8) и сходимость предложенного алгоритма дает следующая

Теорема 1. *Пусть при некоторых* $a>0$, $\nu\in\mathbb{N}$, *матрица* $Q_\nu(a,x):\mathbb{R}^{np_{m+1}}\to\mathbb{R}^{np_{m+1}}$ *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$ *и выполняются неравенства:*

$$\|[Q_\nu(a,x)]^{-1}\| \le \gamma_\nu(a,x), \tag{18}$$

$$q_\nu(a,x) = \Big\{\gamma_\nu(a,x)\max(1,\|S_2(x)\|)\Big[\sum_{l=1}^{\nu}\frac{a^l}{l!} +$$

$$+\hat{h}\sum_{l=0}^{\nu-1}\frac{a^l}{l!}\sum_{i=1}^{m+1}\max_{r=\overline{1,p_{m+1}}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\alpha_i(x,t)\Big]+1\Big\}\frac{a^\nu}{\nu!}<1, \tag{19}$$

где $\gamma_\nu(a,x)$ *- положительная, непрерывная по* $x\in[0,\omega]$ *функция,* $\hat{h}=\max\limits_{r=\overline{1,p_{m+1}}}(t_r-t_{r-1})$.

Тогда семейство двухточечных краевых задач для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений (7), (8) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [12].

Пределом пары последовательных приближений $(\lambda^{(k)}(x),\widetilde{v}^{(k)}(x,[t]))$, определяемых алгоритмом, при $k\to\infty$ будет пара $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*(x,[t]))$, где $\lambda^*(x)=(\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),...,\lambda^*_{p_{m+1}}(x))$, $\widetilde{v}^*(x,[t])=(\widetilde{v}_1^*(x,t),\widetilde{v}_2^*(x,t),...,\widetilde{v}^*_{p_{m+1}}(x,t))$, и является решением задачи (9) - (12), а решение задачи (7), (8) - функция $v^*(x,t)$ определяется равенствами: $v^*(x,t)=\widetilde{v}_r^*(x,t)+\lambda_r^*(x)$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$, $v^*(x,T)=\lambda^*_{p_{m+1}}(x)+\lim\limits_{t\to T-0}\widetilde{v}^*_{p_{m+1}}(x,t)$.

Решение задачи (1) - (3).

Для нахождения решения задачи (1) - (3) используем эквивалентную к (1) - (3) задачу (4) - (6). Решение задачи (4) - (6) определяется как предел последовательности троек $\{v^{(k)}(x,t),u^{(k)}(x,t),w^{(k)}(x,t)\}$, $k=1,2,...$, определяемой по следующему алгоритму:

Функцию $v^{(0)}(x,t)$ найдем решая семейство двухточечных краевых задач для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_0(x,t)v + \sum_{i=1}^{m+1}A_i(x,t)v(x,\theta_{i-1}) + F^{(0)}(x,t,w,u,\theta), \quad (x,t)\in\Omega, \tag{20}$$

$$P_2(x)v(x,0)+S_2(x)v(x,T) = d^{(0)}(x,w(x,0),u(x,0),w(x,T),u(x,T)), \quad x\in[0,\omega], \tag{21}$$

где $F^{(0)}(x,t,w,u,\theta) = B_0(x,t)\dot{\varphi}(t)+C_0(x,t)\varphi(t)+f(x,t)+$

$$+\sum_{i=1}^{m+1}B_i(x,t)\dot{\varphi}(\theta_{i-1}) + \sum_{i=1}^{m+1}C_i(x,t)\varphi(\theta_{i-1}),$$

$d^{(0)}(x,w(x,0),u(x,0),w(x,T),u(x,T)) =$

$$= \psi(x) - P_1(x)\dot{\varphi}(0) - P_0(x)\varphi(0) - S_1(x)\dot{\varphi}(T) - S_0(x)\varphi(T).$$

Функции $u^{(0)}(x,t)$, $w^{(0)}(x,t)$ находим через $\varphi(t)$, $v^{(0)}(x,t)$ по формулам

$$u^{(0)}(x,t) = \varphi(t) + \int_0^x v^{(0)}(\xi,t)d\xi, \quad w^{(0)}(x,t) = \dot{\varphi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(0)}(\xi,t)}{\partial t}d\xi.$$

k-ое приближение $v^{(k)}(x,t)$ определяется как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_0(x,t)v + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(x,t)v(x,\theta_{i-1}) + F^{(k)}(x,t,w,u,\theta), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{20}$$

$$P_2(x)v(x,0) + S_2(x)v(x,T) = d^{(k)}(x, w(x,0), u(x,0), w(x,T), u(x,T)), \quad x \in [0,\omega], \tag{21}$$

где $F^{(k)}(x,t,w,u,\theta) = B_0(x,t)w^{(k-1)}(x,t) + C_0(x,t)u^{(k-1)}(x,t) + f(x,t)+$

$$+\sum_{i=1}^{m+1} B_i(x,t)w^{(k-1)}(x,\theta_{i-1}) + \sum_{i=1}^{m+1} C_i(x,t)u^{(k-1)}(x,\theta_{i-1}),$$

$d^{(k)}(x, w(x,0), u(x,0), w(x,T), u(x,T)) =$

$$= \psi(x) - P_1(x)w^{(k-1)}(x,0) - P_0(x)u^{(k-1)}(x,0) - S_1(x)w^{(k-1)}(x,T) - S_0(x)u^{(k-1)}(x,T).$$

Функции $u^{(k)}(x,t)$, $w^{(k)}(x,t)$ определяются равенствами

$$u^{(k)}(x,t) = \varphi(t) + \int_0^x v^{(k)}(\xi,t)d\xi, \qquad w^{(k)}(x,t) = \dot{\varphi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(k)}(\xi,t)}{\partial t}d\xi,$$

где $k = 1, 2, \ldots$.

При выполнении условий теоремы 1 последовательность троек $\{v^{(k)}(x,t),\ u^{(k)}(x,t),\ w^{(k)}(x,t)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ сходится к $\{v^*(x,t),\ u^*(x,t),\ w^*(x,t)\}$ - единственному решению задачи (4) -(6). Из эквивалентности задач (4) - (6) и (1) - (3) вытекает

Теорема 2. *Пусть при некоторых $a > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$, матрица $Q_\nu(a,x) : \mathbb{R}^{np_{m+1}} \to \mathbb{R}^{np_{m+1}}$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства (18), (19) теоремы 1. Тогда нелокальная краевая задача для систем нагруженных гиперболических уравнений (1) - (3) имеет единственное классическое решение $u^*(x,t)$.*

Доказательство теоремы 2 проводится на основе построенного алгоритма.

Заключение

Таким образом, в работе получены достаточные условия существования единственного решения задачи (1) - (3) и предложен новый алгоритм нахождения приближенных решений исследуемой задачи. Алгоритм учитывает поведение и значение нормы матрицы дифференциальной части, играющей важную роль при построении приближенных и численных методов нахождения решения краевой задачи.

Литература

[1] *Нахушев А.М.* Уравнения мат. биологии // Высшая школа, 1995. - 205 с.

[2] *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* О разрешимости граничных задач для нагруженных уравнений // Матем. журнал МОН РК. - 2001. - Т. 1, - С. 21-29.

[3] *Пулькина Л.С.* Нелокальная задача для нагруженного гиперблического уравнения // Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова. - 2002. - Т. 236. - С. 298-303.

[4] *Волынская М.Г.* О разрешимости одной смешанной задачи для нагруженного гиперблического уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. - 2008, - С. 40-49.

[5] *Нахушев А.М.* Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их прилождения к прогнозу почвенной влаги //Дифференц. уравнения. - 1979. - Т. 15, - С. 96 – 105.

[6] *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. - 2003. - Т. 39, - С. 1343-1354.

[7] *Кадирбаева Ж.М.* Об однозначной разрешимости линейной нелокальной краевой задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. -2011. - С. 19-23.

[8] *Кадирбаева Ж.М.* Условия однозначной разрешимости семейства периодических краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений // Материалы Межд. научно-техн. конф. "III Ержановские чтения 21 - 22 мая 2010 г. - С.149-154.

[9] *Бакирова Э.А.* О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений //Математический журнал. - 2005. - Т. 5, - С. 25-34.

[10] *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. -1989. -Т.29, - С. 50 – 66.

References

[1] *Nakhushev A.M.* Uravneniya mat. biologii// Visshaya shkola, 1995. - 205 s.

[2] *Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* O razreshimosti granichnikh zadach dlya nagruzhennikh uravnenii // Matem. zhurnal MON RK. - 2001. - T. 1, - S. 21-29.

[3] *Pul'kina L.S.* Nelokal'naya zadacha dlya nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniya // Trudi matem. in-ta im. V.A. Steklova. - 2002. - T. 236. - S. 298-303.

[4] *Volinskaya M.G.* O razreshimosti odnoi smeshannoi zadachi dlya nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniya // Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya. - 2008, - S. 40-49.

[5] *Nakhushev A.M.*Kraevie zadachi dlya nagruzhennikh integro-differentcial'nikh uravnenii giperbolicheskogo tipa i nekotorie ikh prilozheniya k prognozu pochvennoi vlagi //Differentc. uravneniya. - 1979. - T. 15, - S. 96 – 105.

[6] *Asanova A.T., Dzhumabaev D.S.* Odnoznachnaya razreshimost' nelokal'noi kraevoi zadachi dlya sistem giperbolicheskikh uravnenii // Differentcial'nie uravneniya. - 2003. - T. 39, - S. 1343-1354.

[7] *Kadirbayeva Zh.M.* Ob odnoznachnoi razreshimosti lineinoi nelokal'noi kraevoi zadachi dlya sistem nagruzhennikh giperbolicheskikh uravnenii // Izvestiya NAN RK. Seriya fiziko-matematicheskaya. -2011. - S. 19-23.

[8] *Kadirbayeva Zh.M.* Usloviya odnoznachnoi razreshimosti semeistva periodicheskikh kraevikh zadach dlya nagruzhennikh differentcial'nikh uravnenii // Materiali Mezhd. nauchno-tekhn. konf. "III Erzhanovskie chteniya 21 - 22 maya 2010 g. - S.149-154.

[9] *Bakirova E.A.* O neobkhodimikh i dostatochnikh usloviyakh odnoznachnoi razreshimosti dvukhtochechnoi kraevoi zadachi dlya nagruzhennikh differentcial'nikh uravnenii // Matematicheski zhurnal. - 2005. - T. 5, - S. 25-34.

[10] *Dzhumabaev D.S.* Priznaki odnoznachnoi razreshimosti lineinoi kraevoi zadachi dlya obiknovennogo differentcial'nogo uravneniya // Zh. vichisl. matem. i matem. fiz. -1989. -T.29, - S. 50 – 66.