МРНТИ 27.29.19 https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m1

Аналитическая природа функции Грина в окрестности простого полюса

Аймал Раса Гулам Хазрат, PhD докторант, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан, E-mail: aimal.rasa14@gmail.com

Аузерхан Г.С., PhD докторант, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан, E-mail: auzerkhanova@gmail.com

Бейсенбай А.А., магистр, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан, E-mail: arayb1502@gmail.com

Известно, что функция Грина краевой задачи представляет мероморфную функцию от спектрального параметра. Когда краевые условия содержат интегро-диференциальные члены, то мероморфность функции Грина такой задачи также можно доказать. При этом удается выписать структуру вычета в особых точках функции Грина краевой задачи с интегродифференциальными возмущениями. Анализ структуры вычета позволяет утверждать, что собственные функций исходного оператора достаточно гладкие функции. Удивительно, что сопряженный оператор может иметь негладкие собственные функций. В работе выяснена степень негладкости собственной функции сопряженного оператора к оператору с интегро-диференциальными краевыми условиями. Указывается, что даже сопряженные к многоточечным граничным задачам обладают негладкими собственными функциями.

Ключевые слова: Оценка, полюс, собственные значения, интегро-дифференциальные условия, единственное решение, ряд Лорана, сопряженной оператор, собственная функция, возмущенная краевая задача, граничные условия, функция Грина, резольвента, базис Рисса, простой нуль.

Қарапайым полюс маңайындағы Грин функциясының аналитикалық табиғаты

Аймал Раса Гулам Хазрат, PhD докторант, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: aimal.rasa14@gmail.com
Аузерхан Г.С., PhD докторант, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: auzerkhanova@gmail.com
Бейсенбай А.А., магистр, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: arayb1502@gmail.com

Шекаралық есептің Грин функциясы спектральды параметрдің мероморфтық функциясы екені белгілі. Егер шекаралық шарттарда интегро-дифференциалды мүшелер болса, онда мұндай есептің Грин функциясының мероморфтылығын да дәлелдеуге болады. Бұл жағдайда ауытқыған интегро-дифференциалды шекаралық есептердің Грин функциясының сингулярлы нүктелеріндегі шегерімнің құрылымын жазуға болады. Қалдық құрылымын талдау бастапқы оператордың меншікті функциялары жеткілікті тегіс функция болатынын тұжырымдауға мүмкіндік береді. Бір таңқаларлығы, түйіндес оператордың тегіс емес меншікті функциялары болуы мүмкін.Бұл жұмыста интегро-дифференциалды шекаралық шарттар бар операторға түйіндес оператордың меншікті функциясының тегіс еместігінің деңгейі анықталды. Көпнүктелі шекралық есептерге түйіндестердің де тегіс емес меншікті функцияларға ие болатыны көрсетілген.

Түйін сөздер: бағалау, полюс, меншікті мәндер, интегро-дифференциалды шарттар, жалғыз шешім, Лоран тізбегі, түйіндес оператор, меншікті функция, шекаралық ауытқыған есеп, шекаралық шарттар, Грин функциясы, резольвента, Рисс базисі, жай нөл.

© 2019 Al-Farabi Kazakh National University

The analytical nature of the Green's function in the vicinity of a simple pole

Ghulam Hazrat Aimal Rasa, PhD doctoral, Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
E-mail: aimal.rasa14@gmail.com
Auzerkhan G.S., PhD doctoral, Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
E-mail: auzerkhanova@gmail.com
Beisenbay A.A., master, Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
E-mail: arayb1502@gmail.com

It is known that the Green function of a boundary value problem is a meromorphic function of a spectral parameter. When the boundary conditions contain integro-differential terms, then the meromorphism of the Green's function of such a problem can also be proved. In this case, it is possible to write out the structure of the residue at the singular points of the Green's function of the boundary value problem with integro-differential perturbations. An analysis of the structure of the residue allows us to state that the eigenfunction functions of the original operator are sufficiently smooth functions. Surprisingly, the adjoint operator can have non-smooth eigenfunctions. The degree of non-smoothness of the eigenfunction of the adjoint operator to an operator with integro-differential boundary conditions is clarified. It is indicated that even those conjugate to multipoint boundary value problems have non-smooth eigenfunctions.

Key words: Estimate, pole, eigenvalues, integro-differential conditions, unique solution, Laurent series, adjoint operator, eigenfunction, perturbed boundary, value problem, boundary conditions, Green's function, resolution, Riesz basis, simple zero .

1 Введение

Пусть 0<x<1 и задано дифференциальное выражение

$$L(y) = y^n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) y^{(k)}(x), 0 < x < 1$$

с гладкими коэффициентами $p_k \in \mathrm{C}^k[0,1], k = 0,1,...,n-1$. Дальнейшие все рассуждения показаны для случая n=3, однако приводимые результаты (при соответствующей их модификации) выполняются для произвольных n. Найдем набор чисел $\alpha_1,\ \beta_1, \gamma_1, \alpha_2,\ \beta_2, \gamma_2, \alpha_3,\ \beta_3, \gamma_3$ таких, что $\theta_0 \neq 0$ и $\theta_1 \neq 0$, где

$$\theta_0 = \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{(\gamma_1)} & \alpha_1\omega_2^{(\gamma_1)} & \beta_1\omega_3^{(\gamma_1)} \\ \alpha_2\omega_1^{(\gamma_2)} & \alpha_2\omega_2^{(\gamma_2)} & \beta_2\omega_3^{(\gamma_2)} \\ \alpha_3\omega_1^{(\gamma_3)} & \alpha_3\omega_2^{(\gamma_3)} & \beta_3\omega_3^{(\gamma_3)} \end{vmatrix}, \theta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{(\gamma_1)} & \beta_1\omega_2^{(\gamma_1)} & \beta_1\omega_3^{(\gamma_1)} \\ \alpha_2\omega_1^{(\gamma_2)} & \beta_2\omega_2^{(\gamma_2)} & \beta_2\omega_3^{(\gamma_2)} \\ \alpha_3\omega_1^{(\gamma_3)} & \beta_3\omega_2^{(\gamma_3)} & \beta_3\omega_3^{(\gamma_3)} \end{vmatrix},$$

$$\omega_1 = -1,\ \omega_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \omega_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Из результатов работ [1], [2] вытекает, что совокупность граничных условий

$$U_1(y) = \alpha_1 y^{(\gamma_1)}(0) + \beta_1 y^{(\gamma_1)}(1) = 0,$$
$$U_2(y) = \alpha_2 y^{(\gamma_2)}(0) + \beta_2 y^{(\gamma_2)}(1) = 0, \quad (1)$$
$$U_3(y) = \alpha_3 y^{(\gamma_3)}(0) + \beta_3 y^{(\gamma_3)}(1) = 0$$

,

представляют усиленно-регулярные краевые условия.Поэтому система собственных функций задачи на собственные значения

$$L(y) = \lambda y, \quad 0 < x < 1 \tag{2}$$

с краевыми условиями (1) образуют базис Рисса в функциональном пространстве $L_2(0,1)$.Согласно монографии [3], асимптотика одной серии собственных значений краевой задачи (1), (2) имеет вид

$$\lambda_k^{'} = (-2k\pi i)^3 \left[1 - \frac{3\ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]$$

Другая серия собственных значений краевой задачи (1), (2) имеет аналогичный вид. Из результатов работы [4], вытекает, что следующие краевые условия

$$V_j(y) \equiv U_j(y) + \sum_{s=0}^{\gamma_j} \int_0^1 y^{(s)}(t)\rho_{s_J}(t)dt = 0,\ j = 1, ..., n \tag{3}$$

также представляют усиленно-краевые условия. Поэтому остаются справедливости результаты работ [1],[2], так что система собственных и присоединенных функции оператора с краевыми условиями (3) образуют базис Рисса в функциональном пространстве $L_2(0,1)$. Для дальнейших целей краевые условия (3) удобно переписать в каноническом виде, предложенном в работе [5]. Уравнение $L(y) = f(x), \quad 0 < x < 1$ с интегро-дифференциальными условиями вида

$$V_j(y) \equiv U_j(y) - \int_0^1 L(y)\overline{\sigma_j(x)}dx = 0, j = 1, 2, 3 \tag{4}$$

при произвольном наборе граничных функции

$$\sigma_1 \in L_2(0,1),\ \sigma_2 \in L_2(0,1),\ \sigma_3 \in L_2(0,1).$$

имеет единственное решение $y(x)$ при любом f из $L_2(0,1)$ причем справедлива оценка $\|y\|_{L_2(0,1)} \le c\,\|f(x)\|_{L_2(0,1)}$. Обратное утверждение также верно. Если уравнение $L(y) = f(x), \quad 0 < x < 1$ с некоторыми дополнительными линейными условиями при любом f из $L_2(0,1)$ имеет единственное решение с требованием $\|y\|_{L_2(0,1)} \le c\,\|f(x)\|_{L_2(0,1)}$ то найдется такой набор граничных функции $\sigma_1 \in L_2(0,1)$, $\sigma_2 \in L_2(0,1)$, $\sigma_3 \in L_2(0,1)$, что дополнительные условия будут эквивалентны условиям (3).

Согласно приведенной теореме условия (3) эквивалентны условиям (4) при некоторых $\sigma_1 \in L_2(0,1)$, $\sigma_2 \in L_2(0,1)$, $\sigma_3 \in L_2(0,1)$. Подробности вычисления граничных функции σ_1, σ_2, σ_3 по функциям $\{\rho_{sj}(t)\}$ можно найти в работе [6].

2 Обзор литературы

Статья посвящена построению функции Грина краевой задачи для дифференциального уравнения с усиленно-регулярными краевыми условиями в окрестности полюса. Вопросы, как построение функции Грина и разложение по собственным функциям для дифференциальных операторов с усиленно- регулярными краевыми условиями мало изучены. Для изучения аналитической природы функции Грина мы развиваем идеи работ [Кангужин, Вычетное и спектральное разложения дифференциального оператора на графе-звезде, Вестник КазНУ, 2018], [Келдыш]. Отметим работы [9], [10] посвящены разложению по собственным функциям дифференциальных самосопряженных и несамосопряженных операторов.

В работе [14] изучены обратные задачи для дифференциальных операторов с регулярно краевыми условиями для 2-го порядка. В работе [17] рассмотрены спектральные задачи для дифференциального оператора нечетного порядка. В работе [13], [15], [18],[19], [20] приведены некоторые вопросы спектрального анализа обратных задач для дифференциальных операторов.

А в данной работе выведена формула разложения функции Грина по собственным функциям дифференциального оператора 3-го порядка с усиленно- регулярными краевыми условиями.

3 Функция Грина невозмущенной краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\begin{array}{l} L(y) = f(x), \quad 0 < x < 1 \\ U_1(y) = 0, \quad U_2(y) = 0, \quad U_3(y) = 0 \end{array}$$

Резольвента оператора L имеет вид

$$(L_0 - \lambda I)^{-1} f = \int_0^1 G_0(x,t,\lambda) f(t) dt$$

где

$$G_0(x,t,\lambda) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & y_3(x,\lambda) & g(x,t) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(g) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(g) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(g) \end{vmatrix}}{\Delta_0(\lambda)}$$

- функция Грина оператора L_0. Здесь при $x > t$ функция $g(x,t)$ имеет следующий вид:

$$g(x,t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ & & \end{vmatrix}$$

если $x \leq t$, тогда $g(x,t) = 0$.

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) \end{vmatrix}$$

,

3.1 Возмущенная краевая задача и ее функция Грина

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\begin{array}{l} L(y) = f(x), \quad 0 < x < 1 \\ V_1(y) \equiv U_1(y) - \int_0^1 L(y)\overline{\sigma_1(x)}dx = 0 \\ U_2(y) = 0, \quad U_3(y) = 0 \end{array}$$

Резольвента оператора L имеет вид

$$(L - \lambda I)^{-1} f(x) = \int_0^1 G(x,t,\lambda) f(t) dt, \qquad 0 < x < 1$$

где

$$G(x,t,\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} \kappa_1(x,\lambda) & G_0(x,t,\lambda) \\ V_1(\kappa_1) & V_1(G_0) \end{vmatrix}}{V_1(\kappa_1)} = G_0(x,t,\lambda) - \frac{\kappa_1(x,\lambda)V_1(G_0)}{V_1(\kappa_1)}$$

-функция Грина оператора L.
Здесь $\kappa_1(x,\lambda)$- решение однородного уравнения

$$L(\kappa_1) = \lambda\kappa_1 \ , \qquad 0 < x < 1,$$

с неоднородными краевыми условиями

$$U_1(\kappa_1) = 1, \ U_2(\kappa_1) = 0, \ U_3(\kappa_1) = 0.$$

3.2 Главная часть разложения в ряд Лорана функции Грина

В этом пункте вычислена главная часть разложения в ряд Лорана функции Грина возмущенного оператора в окрестности простого собственного значения. В нашем случае, нули функции $V_1(\kappa_1)$ являются полюсами резольвенты $(L - \lambda I)^{-1}$. Пусть λ_0-простой нуль функции $V_1(\kappa_1) = 0$ $\left.\frac{d}{d\lambda}V_1(\kappa)\right|_{\lambda_0} \neq 0$. Тогда разложение в ряд Лорана в окрестности простого полюса примет вид

$$G(x,t,\lambda) = -\frac{\underset{\lambda_0}{res}\, G(x,t,\lambda)}{\lambda - \lambda_0} + \text{прав. часть}$$

где

$$\underset{\lambda_0}{res}\, G(x,t,\lambda) = -\frac{\kappa_1(x,\lambda)V_1(G_0)}{\left.\frac{d}{d\lambda}V_1(\kappa_1)\right|_{\lambda=\lambda_0}} \tag{5}$$

По теореме Келдыша [7] известно, что

$$G(x,t,\lambda) = -\frac{u_0(x)\overline{v_0(t)}}{\lambda - \lambda_0} + h_0(x,t,\lambda), \tag{6}$$

где $h_0(x,t,\lambda)\underline{-\text{ре}}$гулярная в окрестности точки λ_0.Здесь $u_0(x)-$собственная функция оператора L, а $\overline{v_0(t)}$ - собственная функция сопряженного оператора L^*к операторуL, то есть

$$\begin{aligned} &L(u_0)=\lambda_0 u_0, && u_0\in D(L),\\ &L^*(v_0)=\overline{\lambda_0}v_0, && v_0\in D(L^*). \end{aligned}$$

Сравнивая соотношения (5) и (6), получим равенства

$$u_0(x)=\kappa_1(x,\lambda_0),\qquad v_0(t)=\frac{V_1(G_0)}{\frac{d}{d\lambda}V_1(\kappa_1)\Big|_{\lambda=\lambda_0}}$$

Теорема 1. Если λ_0-простое собственное значение оператора L, тогда собственная функция оператора L имеет следующий вид

$$k_1(x,\lambda_0)=\frac{1}{\Delta_0\left(\lambda_0\right)}\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda_0) & y_2(x,\lambda_0) & y_3(x,\lambda_0)\\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3)\\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) \end{vmatrix}$$

То есть удовлетворяет следующей возмущенной краевой задаче

$$\begin{aligned} &L\kappa_1(x,\lambda_0)=\lambda_0\kappa_1(x,\lambda_0),\\ &V_1\kappa_1(x,\lambda_0)=U_1\kappa_1(x,\lambda_0)-\textstyle\int_0^1 L(\kappa_1(x,\lambda_0))\overline{\sigma_1(x)}dx=0,\\ &U_2\kappa_1(x,\lambda_0)=U_3(\kappa_1(x,\lambda_0))=0 \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть λ_0- простой нуль функции $V_1(\kappa_1)$.Тогда функция Грина оператора L в окрестности простого полюса имеет представление

$$G(x,t,\lambda)=\frac{\dfrac{\kappa_1(x,\lambda_0)V_1(G_0)}{\frac{d}{d\lambda}V_1(\kappa_1)\Big|_{\lambda=\lambda_0}}}{\lambda-\lambda_0}+G_0(x,t,\lambda_0)$$

Здесь $\kappa_1(x,\lambda_0)$ - собственная функция оператора L, $V_1(G_0)$ - собственная функция сопряженного оператора L^* к оператору L. Причем она определяется по формуле

$$V_1(G_0)=\sigma_1(t)+\overline{\lambda_0}\int_t^1\overline{g(x,t,\lambda)}\sigma_1(x)dx+\frac{\overline{\lambda_0}}{\Delta_0(\lambda_0)}$$

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t)\\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t)\\ \int\limits_0^1\sum\limits_{k=1}^{2}\beta_{k+1}y_1^{(k)}(1)A_3\overline{\sigma_1(x)}dx & \int\limits_0^1\sum\limits_{k=1}^{2}\beta_{k+1}y_2^{(k)}(1)A_3\overline{\sigma_1(x)}dx & \int\limits_0^1\sum\limits_{k=1}^{2}\beta_{k+1}y_3^{(k)}(1)A_3\overline{\sigma_1(x)}dx \end{vmatrix}$$

,

4 Заключение

В заключении отметим, что собственная функция исходного оператора гладкая функция. В то же время собственная функция сопряженного оператора может быть негладкой и степень ее гладкости зависит от гладкости граничного возмущения. Эти выводы вытекают из представления собственных функций данных в теореме 2. В частности даже сопряженные к многоточечным граничным задачам обладают негладкими собственными функциями. В данной теореме 2 приведены результаты, касающихся возмущения только одного граничного условия. Аналогичные результаты получаются, когда возмущению подвергаются все три граничных условия.

Список литературы

[1] Михайлов В.П. О базисах Рисса // ДАН СССР. – 1962. – № 5 (144). – С. 981-984.

[2] Кесельман Г.М. Обезусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. Вузов СССР, Математика. – 1964. – № 2. – С. 82-93.

[3] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М., 1969. – 528 с.

[4] Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. Мат. Мех. – 1982. – № 6. – С. 12-21.

[5] Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширений и сужений операторов // Докл. АН СССР. – 1983. – № 6 (271). – С. 1307-1313.

[6] Кангужин Б.Е., Даирбаева Г., Мадибайулы Ж. Идентификация граничных условий дифференциального оператора // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2019. – № 3 (103). – С.13-18

[7] Дезин А.А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач // Тр. МИАН. М., Наука. МАИК «Наука/Интерпериодика». – 2000. – № 229. – С.3-175

[8] Левитан Б.М. Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля в случае конечно-зонных и бесконечно -зонных потенциалов // Труды Моск. Матем.об-во.-МГУ.-М. – 1982. – С. 3-36.

[9] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям. – М.-Л, 1950.

[10] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наукова Думка, 1965. – 798 с.

[11] Марченко В.А. Операторы Штурма-Луивилля и их приложения. – Киев: Наукова Думка, 1977. – 329 с.

[12] Като Т. Теория возмущенний линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

[13] Лейбензон З.Л. Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков / З.Л. Лейбензон // Труды Москов. мат. об-ва. – 1966. – Т. 15. – С. 70-144.

[14] Юрко В.А. Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями / В.А. Юрко // Мат. заметки. – 1975. – Т. 18. – № 4. – С. 569-576.

[15] Садовничий В.А. О связи между спектром дифференциального оператора с симметричными коэффицентами и краевыми условиями / В.А. Садовничий, Б.Е. Кангужин // ДАН СССР. – 1982. – Т. 267. – №2. – С. 310-313.

[16] Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями / А.А. Шкаликов // Вестник МГУ. Сер. Мат. Мех. – 1982. – № 6. – С. 12-21

[17] Станкевич М. Об одной обратной задаче спектрального анализа для обыкнове иного дифференциального оператора четного порядка / М. Станкевич // Вестник МГУ. Сер. Мат. Мех. – 1981. – № 4. – С. 24-28.

[18] Ахтямов А.М. Обобщения теоремы единственности Борга на случай неразделенных граничных условий / А.М. Ахтямов В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев // Евразийская математика. – 2012. – Т. 3. – №4. – С. 10-22.

[19] Ахтямов А.М. Обратная задача для пучка операторов с неразделенными граничными условиями / А.М. Ахтямов В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев // Евразийский матем. – 2010. – Т. 1. – №2. – С. 5-16.

[20] Садовничий В.А. Теорема единственности решения обратной задачи спектрального анализа в случае дифференциального уравнения с периодическими граничными условиями // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – № 2. – С. 271–277.

References

[1] Mihaylov V.P. "O bazisah Rissa [On Riesz bases]" , *DAN SSSR* No 5 (144) (1962): 981-984.

[2] Keselman G.M. "Obezuslovnoy shodimosti razlozheniy po sobstvennyim funktsiyam nekotoryih differentsialnyih operatorov [Unconditional convergence of expansions in eigenfunctions of certain differential operators]" , *Izv. Vuzov SSSR, Matematika* No 2 (1964): 82-93.

[3] Naymark M.A. *Lineynyie differentsialnyie operatoryi* [Linear differential operators] (M.: 1969): 528.

[4] Shkalikov A.A. "O bazisnosti sobstvennyih funktsiy obyiknovennyih differentsialnyih operatorov s integralnyimi kraevyimi usloviyami [On the basis property of the Eigen functions of ordinary differential operators with integral boundary conditions]" , *Vestn. MGU. Ser. Mat. Meh.* No 6 (1982): 12-21.

[5] Kokebaev B.K., Otelbaev M., Shyinyibekov A.N. "K voprosam rasshireniy i suzheniy operatorov [To questions of extensions and restrictions of operators]" , *Dokl. AN SSSR* No 6 (271) (1983): 1307-1313.

[6] Kanguzhin B.E., Dairbaeva G., Madibayulyi Zh. "Identifikatsiya granichnyih usloviy differentsialnogo operatora [Identification of the boundary conditions of a differential operator]" , *Vestnik KazNU. Seriya matematika, mehanika, informatika.* No 3 (103) (2019): 13-18

[7] Dezin A.A. "Differentsialno-operatornyie uravneniya. Metod modelnyih operatorov v teorii granichnyih zadach [Differential operator equations. The method of model operators in the theory of boundary value problems]" , *Tr. MIAN. M., Nauka. MAIK «Nauka/Interperiodika»* No 229 (2000): 3-175

[8] Levitan B.M. "Obratnaya zadacha dlya operatora Shturma-Liuvillya v sluchae konechno-zonnyih i beskonechno-zonnyih potentsialov [The inverse problem for the Sturm-Liouville operator in the case of finite-band and infinitely-band potentials]" , *Trudyi Mosk. Matem.ob-vo. MGU. M.* (1982): 3-36.

[9] Berezanskiy Yu.M. *Razlozhenie po sobstvennyim funktsiyam* [Expansion in eigenfunctions] (M.-L.: 1950).

[10] Berezanskiy Yu.M. *Razlozhenie po sobstvennyim funktsiyam samosopryazhennyih operatorov* [Expansion in eigenfunctions of self-adjoint operators] (Kiev: Naukova Dumka, 1965): 798.

[11] Marchenko V.A. *Operatoryi Shturma-Luivillya i ih prilozheniya* [Sturm-Louisville Operators and their Applications] (Kiev: Naukova Dumka, 1977): 329.

[12] Kato T. *Teoriya vozmuschenniy lineynyih operatorov* [Perturbation theory of linear operators] (M.: Mir, 1972): 740.

[13] Leybenzon Z.L. "Obratnaya zadacha spektralnogo analiza obyiknovennyih differentsialnyih operatorov vyisshih poryadkov / Z.L. Leybenzon [The inverse problem of spectral analysis of ordinary differential operators of higher orders]" , *Trudyi Moskov. mat. ob-va* Vol. 15 (1966): 70-144.

[14] Yurko V.A. "Obratnaya zadacha dlya differentsialnyih operatorov vtorogo poryadka s regulyarnyimi kraevyimi usloviyami / V.A. Yurko [The inverse problem for second-order differential operators with regular boundary conditions]" , *Mat. zametki* Vol. 18, No 4 (1975): 569-576.

[15] Sadovnichiy V.A. "O svyazi mezhdu spektrom differentsialnogo operatora s simmetrichnyimi koeffitsentami i kraevyimi usloviyami / V.A. Sadovnichiy, B.E. Kanguzhin [On the relationship between the spectrum of a differential operator with symmetric coefficients and boundary conditions]" , *DAN SSSR* Vol. 267, No 2 (1982): 310-313.

[16] Shkalikov A.A. "O bazisnosti sobstvennyih funktsiy obyiknovennyih differentsialnyih operatorov s integralnyimi kraevyimi usloviyami / A.A. Shkalikov [On the basis property of the eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions]" , *Vestnik MGU. Ser. Mat. Meh.* No 6 (1982): 12-21

[17] Stankevich M. "Ob odnoy obratnoy zadache spektralnogo analiza dlya obyiknove inogo differentsialnogo operatora chetnogo poryadka / M. Stankevich [On an inverse problem of spectral analysis for an ordinary other differential operator of even order]" , *Bestnik MGU. Ser. Mat. Meh.* No 4 (1981): 24-28.

,

[18] Ahtyamov A.M. "Obobscheniya teoremyi edinstvennosti Borga na sluchay nerazdelennyih granichnyih usloviy / A.M. Ahtyamov V.A. Sadovnichiy, Ya.T. Sultanaev [Generalizations of Borg‘s uniqueness theorem to the case of nonseparated boundary conditions]", *Evraziyskaya matematika* Vol. 3, No 4 (2012): 10-22.

[19] Ahtyamov A.M. "Obratnaya zadacha dlya puchka operatorov s nerazdelennyimi granichnyimi usloviyami / A.M. Ahtyamov V.A. Sadovnichiy, Ya.T. Sultanaev [Inverse problem for an operator pencil with nonseparated boundary conditions]", *Evraziyskiy matem.* Vol. 1, No 2 (2010): 5-16.

[20] Sadovnichiy V.A. "Teorema edinstvennosti resheniya obratnoy zadachi spektralnogo analiza v sluchae differentsialnogo uravneniya s periodicheskimi granichnyimi usloviyami [Uniqueness theorem for the inverse problem of spectral analysis in the case of differential equations with periodic boundary conditions]", *Differents. uravneniya* Vol. 9, No 2 (1973): 271–277.