МРНТИ 27.29.21, УДК 517.925 https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m3

Асимптотика решений уравнения Штурма–Лиувилля с мероморфным потенциалом

Ишкин Х.К., д ф.-м. н., доцент, Башкирский государственный университет,
г. Уфа, Россия, E-mail: Ishkin62@mail.ru
Набиуллина А.А., студент, Башкирский государственный университет,
г. Уфа, Россия, E-mail: nabiulina.alina.2000@mail.ru

В предлагаемой работе изучается вопрос о влиянии полюсов потенциала на асимптотику решений соответствующего уравнения Штурма–Лиувилля при больших значениях спектрального параметра. Показано, что асимптотика решений в существенном зависит от того, выполняется или нет для полюсов потенциала условие тривиальной монодромии. Так, если кривая и стягивающая ее хорда не содержат полюсов потенциала, а все полюса, лежащие внутри области, ограниченной кривой и ее хордой, удовлетворяют условию тривиальной монодромии, то результат аналитического продолжения вдоль этой кривой решения с любыми начальными условиями на одном из концов кривой имеет такую же асимптотику, как в случае голоморфного потенциала. Если внутри области, ограниченной кривой и ее хордой, есть хотя бы один полюс, не удовлетворяющий условию тривиальной монодромии, то асимптотика аналитического продолжения вдоль рассматриваемой кривой любого фиксированного решения будет определяться матрицами монодромии части полюсов, лежащих внутри указанной области. Основываясь на полученных оценках, найдена асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля на кривой, потенциал которого имеет внутри выпуклой оболочки указанной кривой один полюс второго порядка, не удовлетворяющий условию тривиальной монодромии.

Ключевые слова: уравнение Штурма–Лиувилля, асимптотика решений, безмонодромные потенциалы

Asymptotics of solutions of the Sturm–Liouville equation with meromorphic potential

Ishkin Kh.K., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent,
Bashkir State University,
Ufa, Russia, E-mail: Ishkin62@mail.ru
Nabiullina A.A., undergraduate student, Bashkir State University,
Ufa, Russia, E-mail: nabiulina.alina.2000@mail.ru

In the present paper, we study the asymptotics for large spectral parameter of the solutions of the Sturm–Liouville equation with a meromorphic potential. It is shown that the asymptotic behavior of solutions depends entirely on the location of the poles and on the fulfillment of the condition of trivial monodromy. So, if a smooth curve γ, free from poles, and a solution φ with Cauchy data at one of the ends of γ are given, then provided that the chord contracting γ also does not contain poles, and all the poles lying inside the domain g bounded by γ and chorda satisfy the trivial monodromy condition, the φ and its derivative at the other end of γ obtained by analytic continuation along γ have the same asymptotics as in the case of a holomorphic potential. The situation is greatly complicated if the domain g contains at least one pole that does not satisfy the condition of trivial monodromy. In this case, the asymptotics of φ and its derivative will be determined by the monodromy matrices of the part of the poles lying inside g. Based on the estimates obtained, we found the spectrum asymptotics of the Sturm–Liouville operator on some smooth curve γ, with a potential having inside the convex hull γ a unique second-order pole that does not satisfy the trivial monodromy condition.

Key words: Sturm–Liouville equation, asymptotics of solutions, monodromy-free potentials

1 Введение

Рассмотрим уравнение

$$-v'' \;=\; \lambda^2\rho(t)v,\ t\in D, \tag{1}$$

где λ – большой параметр, $D\subset\mathbb{C}$ – область, функция ρ голоморфна в D. При определенных условиях на D и функцию ρ для решений этого уравнения справедливы ВКБ-оценки [1, Гл. II, § 2]

$$v_\pm\sim\exp\left(\pm i\lambda\int_{t_0}^{t}\sqrt{\rho}dt\right)\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right], \tag{2}$$

равномерно по $t\in D$. Нули функции ρ называют точками поворота. Вблизи них формулы (2) не работают. Причина этого становится особенно наглядной, если в уравнении (1) сделать подстановку Лиувилля:

$$z(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\rho(s)}ds,\quad v(t,\lambda)=\rho^{-1/4}(t)y(z,\lambda). \tag{3}$$

В результате приходим к следующему уравнению для y

$$-y''(z)+q(z)y(z)=\lambda^2y(z),\ z\in\Omega, \tag{4}$$

где

$$q(z)=-p''(z)/p(z),\quad p(z)=\rho^{1/4}(t(z)). \tag{5}$$

Ω — образ области D при отображении (3). Из равенства (5) видно, что если a точка поворота уравнения (1), то $b=z(a)$ полюс 2-го порядка функции q. Ясно, что асимптотика решений уравнения (5) будет существенно зависеть от полюсов функции q. На наш взгляд, уравнение (4) проще для исследования поведения его решений при больших λ. Между тем нет ни одной работы, специально посвященной исследованию этого вопроса для уравнений с мероморфными коэффициентами. В то же время спектральные задачи с особыми точками и с точками поворота естественным образом возникают в различных разделах математической физики [1, Гл. III], [3, 4, 5].

В предлагаемой работе мы изучаем вопрос: каким образом полюса функции q влияют на асимптотику решений уравнения (5)?

2 Обзор литературы

Первое систематическое исследование поведения решений дифференциальных уравнений с голоморфными в некоторой области комплексной плоскости коэффициентами, зависящими от некоторого большого параметра, было проделано Р.Е. Лангером [2]. Впоследствии результаты Лангера обобщались многими авторами в различных направлениях, в том числе на случай мероморфных коэффициентов (см. [6, 7, 8] и имеющиеся там ссылки).

Укажем также на широкий круг задач, связанных с преобразованием Дарбу [9], где естественным образом возникают уравнения с регулярными особыми точками, — квантовая механика для конструирования точно решаемых потенциалов [10, 11], теория солитонов для нахождения решений уравнения Кортевега де Фриза [12], спектральная теория[13, 14].

3 Материалы и методы

С этого момента мы будем иметь дело только с уравнением (4) (вне связи с (1)), поэтому считаем, что Ω – произвольная область в $\mathbb{C}$ и функция q мероморфна в Ω. Далее пусть K – односвязный компакт из Ω с кусочно-гладкой жордановой границей γ. Без ограничения общности можно считать, что γ содержит точку 0 и функция q голоморфна в 0. Обозначим через $e_\pm$ решения уравнения (4), удовлетворяющие начальным условиям

$$e_\pm(0,\lambda) = 1, \; e'_\pm(0,\lambda) = \pm i\lambda. \tag{6}$$

Поставим вопрос: при каких условиях на q и кривую γ можно получить асимптотические оценки для $e_\pm(z,\lambda)$ при больших λ из некоторого луча или сектора комплексной плоскости?

Начнем с простейшей ситуации: K не содержит полюсов q. Пусть $[0,a] \subset K$. Из работы Лангера [2] следует, что если в замыкании области Ω_γ, ограниченной кривой γ и отрезком $[0,a]$ не содержится полюсов функции q, то для значений $e_\pm$ и их производных на отрезке $[0,a]$ можно выписать полные асимптотические разложения при больших λ из соответствующих полуплоскостей $\Pi_\pm = \{\pm\Im(\lambda a) \geq 0\}$. Так, для e_- эти разложения имеют вид

$$e_-^{(k)}(z,\lambda) = e^{-i\lambda z}(-i\lambda)^k \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}(z)\lambda^{-n}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{7}$$

равномерно по $z \in [0,a]$ и $\arg\lambda \in [-\arg a, \; -\arg a + \pi]$. Здесь $u_k(z)$ – известные функции, которые выражаются через функцию q и первые $k-1$ производных [16, Гл. 1, § 4].

3.1 Случай тривиальной монодромии

Пусть функция q голоморфна на границе K и все ее полюса $z_1, \ldots, z_n$, лежащие внутри K, удовлетворяют условию безмонодромности [15]:

существуют $\nu_k \in \mathbb{N}, \delta_k > 0$ $(k = \overline{1,n})$, такие, что

$$q(z) = \frac{\nu_k(\nu_k - 1)}{(z-z_k)^2} + \sum_{i=0}^{\nu_k - 1} c_{ki}(z-z_k)^{2i} + (z-z_k)^{2\nu_k - 1} q_k(z), \; 0 < |z| < \delta_k, \tag{8}$$

где $c_{k0}, \ldots, c_{k,\nu_k-1}$ – произвольные числа, функция q_k голоморфна в круге $\{|z| < \delta_k\}$.

Как известно [15], при выполнении условий (8) любое решение уравнения (4) при любом значении λ является мероморфной функцией z на K. Другими словами, если $T_k(\lambda)$ – матрица монодромии в точке z_k для ФСР уравнения (4), задаваемой условиями (6), то $T_k(\lambda) \equiv I$.

Введем обозначения. Если $\varepsilon > 0$, то $K(\varepsilon)$ – часть K, полученная удалением ε-окрестностей точек $z_1, \ldots, z_n$. Далее пусть $K_\beta = \{e^{i\beta}z, \; z \in K\}$.

Определение 1 *Точку A, лежащую на границе K, назовем верхней (нижней) для K, если все точки K лежат не выше (соответственно не ниже) прямой $\Im(z - A) = 0$.*

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 *Пусть 0 лежит на границе K, функция q голоморфна на границе K, мероморфна внутри K с полюсами $z_1, \ldots, z_n$, удовлетворяющими условию (8). Тогда справедливы утверждения:*

1) *если для любого $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ 0 – верхняя точка для K_β, то*

$$e_+^{(k)}(z,\lambda) \sim (i\lambda)^k e^{i\lambda z}\left[1 + O\left(\lambda^{-1}\right)\right],\ \lambda \to \infty,\ k = 0,1, \tag{9}$$

равномерно по $z \in K(\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ и $\beta_1 \le \arg\lambda \le \beta_2$;

2) *если для любого $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ 0 – нижняя точка для K_β, то*

$$e_-^{(k)}(z,\lambda) \sim (-i\lambda)^k e^{-i\lambda z}\left[1 + O\left(\lambda^{-1}\right)\right],\ \lambda \to \infty,\ k = 0,1, \tag{10}$$

равномерно по $z \in K(\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ и $\beta_1 \le \arg\lambda \le \beta_2$.

Следствие 1 *Пусть $\gamma \subset K$ – гладкая кривая с началом 0 и концом b, не проходящая через полюса q. Тогда если отрезок $[0,a]$ не содержит полюсов q, то для решения e_- справедлива оценка (7), равномерная по $z \in [0,a]$ и $\arg\lambda \in [-\arg a,\ -\arg a + \pi]$.*

Таким образом, при выполнении условий (8) оценки для функции e_- и ее производной на любом отрезке свободном от полюсов q такая же, что и в случае, когда полюсов нет вообще.

Если кривая γ выпукла, то есть является частью границы некоторой выпуклой области, то для выполнения оценок (9) и (10) (при определенных значениях β_1, β_2) нет необходимости требовать голоморфность q – достаточна лишь суммируемость q на γ.

Пример 1 *Пусть γ — кривая с параметризацией*

$$z(x) = x + is(x),\ x \in [0,1], \tag{11}$$

где s — непрерывно дифференцируемая выпуклая вниз функция, такая, что $s(0) = s(1) = 0$.

Обозначим $\alpha_z = \operatorname{arctg} s'(\Re z),\ z \in \gamma$. Тогда $-\pi/2 < \alpha_0 < 0 < \alpha_1 < \pi/2$.

Теорема 2 *Пусть функция $q \in L^1(\gamma)$. Тогда при $\lambda \to \infty$ для $e_+(z,\lambda)$ ($e_-(z,\lambda)$) имеют место оценки (9) (*соответственно* (10)), равномерные по $z \in \gamma$ и $\arg\lambda \in [-\pi - \alpha_0, -\alpha_1]$ (*соответственно* $\arg\lambda \in [-\alpha_0, \pi - \alpha_1]$).*

При $\gamma = [0,1]$ $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, так что утверждение теоремы 2 представляет собой хорошо известные [1, гл. II, § 2] ВКБ-оценки решений классического уравнения Штурма–Лиувилля на отрезке.

С другой стороны, если функция q голоморфна в области Ω, ограниченной кривой γ и отрезком $[0,1]$, и непрерывна на замыкании области Ω, то, очевидно, что функции $e_\pm(\cdot,\lambda)$ при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ обладают такими же свойствами. Следовательно, для функций $e_\pm(t,\lambda)$ справедливы указанные ВКБ-оценки, равномерные по $t \in [0,1]$ и $\pm\arg\lambda \in [-\pi, 0]$. Но точно так же мы можем применить теорему 2, выбирая в качестве γ отрезок $[0,z]$, где z – произвольная точка Ω. Отсюда, в частности, следует

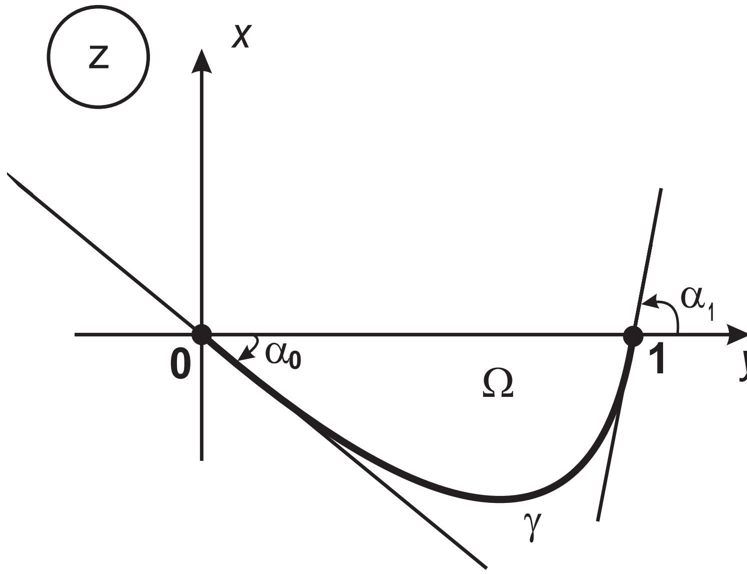

Рисунок 1: Кривая γ

Теорема 3 *Если функция q голоморфна в области Ω и непрерывна на $\overline{\Omega}$, то при каждом фиксированном $z \in \gamma$*

$$e_{\pm}^{(k)}(t,\lambda) \sim (\pm i\lambda)^k e^{\pm it\lambda}\left[1 + O\left(\lambda^{-1}\right)\right],\ \lambda \to \infty, \tag{12}$$

равномерно по $t \in \gamma_{0z}$ и $\arg\lambda \in [-\pi - \alpha_z, -\alpha_z]$ (соответственно $\arg\lambda \in [-\alpha_z, \pi - \alpha_z]$). Здесь $\gamma_{\alpha\beta}$ означает дугу кривой γ с началом и концом в точках α и β.

3.2 Случай ветвления решений

Предположим теперь, что внутри K имеются полюса q, не удовлетворяющие условию (8). Наличие полюсов, порождающих ветвление решений, сильно усложняет дело: если кривая γ не является *каноническим путем* [1, гл. III, § 2] и не *гомотопна*[1] какому-либо каноническому пути $\tilde{\gamma} \subset \Omega$, стандартный метод ВКБ уже неприменим.

Мы ограничимся примером 1 в случае одного полюса

$$q(x) = \frac{k(k+1)}{(x-a)^2} + V,\ k \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}, \tag{13}$$

где $a \in \Omega$ и функция V голоморфна на $\overline{\Omega}$. Случай $k \notin \mathbb{N},\ V = 0$ изучен достаточно подробно (см. [17, п. 10]) и на нем останавливаться не будем. Функция q не удовлетворяет условию (8), когда k не целое или k целое и хотя бы один из коэффициентов $V_1, V_3, \ldots, V_{2k-1}$ не равен 0. Остановимся на втором случае.

Наша цель — показать, что в условиях ветвления решений справедливо утверждение, близкое к теореме 2. Введем обозначения: пусть $\varepsilon > 0, a_\varepsilon$ – точка пересечения лучей

$$\{xe^{i(\alpha_0-\varepsilon)},\ x \ge 0\} \quad \text{и} \quad \{1 + xe^{i(-\pi+\alpha_1+\varepsilon)},\ x \ge 0\},$$

[1]То есть кривые γ и $\tilde{\gamma} \subset \Omega$ имеют одинаковые начало и конец, и в замыкании области, ограниченной этими кривыми, нет полюсов q.

P_ε – ломаная, составленная из отрезков $[0, a_\varepsilon]$ и $[a_\varepsilon, 1]$, Δ_ε – область, ограниченная P_ε и отрезком $[0, 1]$.

Теорема 4 *При любом $\varepsilon > 0$ для e_- и e'_- имеют место оценки*

$$e_-^{(k)}(z,\lambda) \sim (-i\lambda)^k e^{-iz\lambda}\left[1 + O\left(\lambda^{-1}\right)\right],\ \lambda \to \infty, \tag{14}$$

равномерно по $z \in P_\varepsilon$ и $\arg\lambda \in [-\alpha_0 + \varepsilon, \pi - \alpha_1 - \varepsilon]$.

Доказательство. Пусть β – произвольная кривая, лежащая в $\dot{\Omega} := \Omega \backslash \{a\}$ и соединяющая точки 0 и 1. Обозначим через $f_\beta(\lambda)$ результат аналитического продолжения e_- вдоль β. Тогда $f_\gamma(\lambda) \equiv f_\beta(\lambda)$ для любой кривой β, гомотопной γ, то есть обходящей точку a снизу. Возьмем в качестве β ломаную P_ε. Если $\alpha_0(\varepsilon) \le \theta \le \pi - \alpha_1(\varepsilon)$, то 0 – нижняя точка треугольника $e^{i\theta}\Delta_\varepsilon$, поэтому для получения оценки (14) достаточно применить Лемму 1 из [19]. Лемма доказана.

Для нахождения асимптотики $e_-(1,\lambda)$ и $e'_-(1,\lambda)$, когда λ уходит в бесконечность вне сектора $\arg\lambda \in [-\alpha_0 + \varepsilon, \pi - \alpha_1 - \varepsilon]$ необходимо изучать поведение решения e_- вблизи точки a, что требует большой работы и гораздо более тонкой техники. Не вдаваясь в подробности, мы приведем один результат, основанный на указанных асимптотических оценках.

3.3 Оператор Штурма–Лиувилля на кривой с мероморфным потенциалом

Пусть γ – кривая из примера 1. Обозначим через L оператор с областью определения

$$D(L) = \{y \in L^2(\gamma): \qquad y' \in AC(\gamma), -y'' + qy \in L^2(\gamma),\ y(0) = y(1) = 0\}$$

и действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу

$$Ly = -y'' + qy.$$

Точно так же, как в случае $\gamma = [0,1]$ [22, § 17], доказывается, что L — замкнутый оператор с плотной областью определения. Известно [19, Лемма 2], что спектр оператора L дискретен и за исключением конечного числа лежит в угле $\{\mu \in \mathbb{C} : -2\alpha_1 \le \arg\lambda \le -2\alpha_0\}$. Обозначим через $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$ $(-\pi/2 < \arg(\lambda_k) \le \pi/2)$ собственные числа L, пронумерованные в порядке возрастания их модулей с учетом алгебраических кратностей.

Теорема 5 *Пусть потенциал q имеет вид* (13), *где $k \in \mathbb{N}$ и $m := \min\{j : V_{2j-1} \ne 0\} \le k\}$. Тогда спектр оператора L состоит из 2 серий $\left\{\lambda_j^{(1)}\right\}$ и $\left\{\lambda_j^{(2)}\right\}$, для которых справедливы следующие асимптотические разложения:*

$$\lambda_j^{(1)} = \left(\frac{\pi j}{a}\right)^2\left[1 + \frac{2m-2}{\pi j i}\ln\left(\frac{C_1 j}{\sqrt[2m-2]{V_{2m-1}}}\right) + O\left(\frac{\ln^2 j}{j^2}\right)\right] \tag{15}$$

$$\lambda_j^{(2)} = \left(\frac{\pi j}{1-a}\right)^2\left[1 + \frac{2m-2}{\pi j i}\ln\left(\frac{C_2 j}{\sqrt[2m-2]{V_{2m-1}}}\right) + O\left(\frac{\ln^2 j}{j^2}\right)\right], \tag{16}$$

где C_1, C_2 – явно вычисляемые положительные постоянные.

4 Необходимость условия безмонодромности

Утверждение теоремы 3 сильнее по сравнению с утверждением теоремы 2. Это и понятно, ведь в условии теоремы 2 предполагается лишь суммируемость q на γ, что гораздо слабее условий теоремы 3. В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли ослабить в теореме 3 условия на q, сохранив при этом само утверждение.

В работе [20] показано, что при незначительном ослаблении эти условия оказываются уже необходимыми для выполнения оценок (12).

Теорема 6 *Пусть функция q суммируема. Тогда если существует мероморфная в Ω функция Q, для которой выполнены условия:*

(i) *Q имеет конечное число полюсов $\{z_k\}_1^n$, каждый из которых удовлетворяет условию* (8),

(ii) *функция*

$$\widetilde{Q}(z) = Q(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k(\nu_k - 1)}{(z - z_k)^2}$$

принадлежит пространству Смирнова $E_1(\Omega)$ [21, гл. III, § 6],

(iii) *при почти всех $x \in \gamma$ угловое граничное значение функции $\widetilde{Q}$ в точке x совпадает с $q(x)$,*

то справедливы оценки (12) *равномерно по $t \in \gamma_{0z}$ и $\arg\lambda \in [-\pi - \alpha_z, -\alpha_z]$ (соответственно $\arg\lambda \in [-\alpha_z, \pi - \alpha_z]$).*

Обратно, если при каждом $z \in \gamma$

$$e_-^{(k)}(z,\lambda) \sim (-i\lambda)^k e^{\pm it\lambda}\left[1 + O\left(\lambda^{-1}\right)\right],\ \lambda \to \infty, \tag{17}$$

равномерно по $\arg\lambda \in [-\alpha_z, \pi - \alpha_z]$, то существует мероморфная в Ω функция Q, удовлетворяющая условиям (i) – (iii).

5 Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18–11–00002).

Список литературы

[1] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.

[2] Langer R.E. The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain // Trans. Amer. Math. Soc. – 1939. – Vol. 46. – P. 151–190.

[3] Федорюк М.В. Аналитическая структура решений задачи Штурма–Лиувилля с регулярными особенностями // Дифференц. уравнения. –1990. – Vol. 26, № 9. – С. 1648–1650.

[4] Федорюк М.В. Изомонодромные деформации уравнений с иррегулярными особенностями // Матем. сб. – 1990. – Vol. 181, № 12. – 1623–1639.

[5] Mennicken R., Möller M. Non-Self-Adjoint Boundary Eigenvalue Problems. Amsterdam – London: Elsevier, 2003. – 500 p.

[6] Olver F. Asymptotics and Special Functions. London–New York:Taylor and Francis, 1997. – 592 p.

[7] Wazow W. Asymptotic Expansions for Solutions of Ordinary Differential Equations. New York-London-Sydney: Interscience Publishers [John Wiley and Sons, Inc.], 1965. – 384 p.

[8] Heading J. An Introduction to Phase Integral Methods. – London: Methuen and Co., Ltd., 1961. – 160 p.

[9] Darboux G. Sur une proposition relative aux équations linéaires // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1882. Vol. 94. – P. 1456–1459.

[10] Багров В.Г., Самсонов Б.Ф. Преобразование Дарбу, факторизация, суперсимметрия в одномерной квантовой механике // ТМФ. – 1995. – Vol. 104, № 2. – С. 356–367.

[11] Багров В.Г., Самсонов Б.Ф. // Преобразование Дарбу уравнения Шредингера // ЭЧАЯ. – 1997. – Т. 28. – С. 951–1012.

[12] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М: Наука, 1980.

[13] Обломков А.А. Безмонодромные операторы Шредингера с квадратично растущим потенциалом // ТМФ. – 1999. – Т.121, № 3. – С. 374–386.

[14] Gibbons J., Veselov A.P. On the rational monodromy-free potentials with sextic growth // J. Math. Phys. – 2009. – Vol. 50, № 1. – P. 013513.

[15] Duistermaat J.J. and Grünbaum F.A. Differential equations in the spectral parameter // Commun. Math. Phys. – 1986. – Vol. 103. – P. 177–240.

[16] Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка. – 1977. – 332 с.

[17] Ишкин Х.К. О критерии однозначности решений уравнения Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. – 2008. – Т. 84, № 4. – С. 552–566.

[18] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир. – 1970. – 720 с.

[19] Ишкин Х.К. О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма–Лиувилля на кривой // Матем. заметки. – 2005. Т. 78, № 1. – С. 72–84.

[20] Ишкин Х.К. О критерии безмонодромности уравнения Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. – 2013. Т. 94, № 4. – С. 552–568.

[21] Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.–Л.: ГИТТЛ. 1950. – 337 с.

[22] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.