МРНТИ 27.29.19; 27.31.17; 27.39.21 https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m2

Построение характеристического определителя одного типа задач на собственные значения при интегральном возмущении двух краевых условий

Иманбаев Н.С., к.ф.-м.н., профессор,
Институт математики и математического моделирования, г. Алматы,
Южно-Казахстанский государственный педагогический университет,
г. Шымкент, Казахстан, E-mail: imanbaevnur@mail.ru
Садыбеков М.А., д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. НАН РК,
Институт математики и математического моделирования,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: sadybekov@math.kz

Хорошо известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис. Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в определенном смысле)возмущении исходного оператора. Для случая произвольного обыкновенного дифференциального оператора, когда невозмущенные краевые условия являются усиленно регулярными, вопрос об устойчивости свойства базисности корневых векторов при их интегральном возмущении положительно решен в работах А.А. Шкаликова. В серии наших предыдущих работ рассматривался вопрос о построении характеристического определителя и об устойчивости свойства базисности корневых векторов при интегральном возмущении одного из краевых условий. Были рассмотрены практически все возможные типы краевых условий, которые являются регулярными, но не усиленно регулярными. В настоящей работе рассматривается спектральная задача для оператора кратного дифференцирования при интегральном возмущении краевых условий одного типа, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными. В отличие от предыдущих работ нами рассматривается случай, когда интегральное возмущение присутствует в обоих краевых условиях. Первым основным результатом работы является построение характеристического определителя спектральной задачи. На основании полученной формулы делаются выводы об асимптотике собственных значений и собственных функций задачи. Вторым основным результатом работы является обоснование базисности Рисса системы корневых функций рассматриваемой задачи при интегральном возмущении двух краевых условий.
Ключевые слова: Характеристический определитель, базис Рисса, усиленно регулярные краевые условия, корневые функции, интегральное возмущение краевого условия.

Қос шеттік шарттарға да интегралдық әсер етумен толқытылған меншікті мәндерін зерттеу есебінің бір типінің характеристикалық анықтауышын құру

Иманбаев Н.С., ф.-м.ғ.к., профессор,
Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ,
Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық университеті,
Шымкент қ, Қазақстан, E-mail: imanbaevnur@mail.ru
Садыбеков М.А., ф.-м.ғ.д., профессор, ҚР ҰҒА корреспондент-мүшесі,
Математика және математикалық модельдеу институты,
Алматы қ, Қазақстан, E-mail: sadybekov@math.kz

Кез-келген өзіне-өзі түйіндес шеттік шарттармен және өзіне-өзі түйіндес формальді дифференциалдық амалмен берілген, спектрі дискретті болатын оператордың меншікті функцияларының жүйесінің ортонормаланған базис құрайтындығы белгілі жәй. Көптеген жұмыстарда (әлсіз мағынада) толқытылған бастапқы берілген оператордың базистілік қасиетінің сақталу мәселесі зерттелген. Толқытылмаған шеттік шарттары күшейтілмеген регулярлы болған жағдайдағы қарапайым дифференциалдық оператор үшін шеттік шарттарын интегралдық толқытқандағы түбірлік векторлардың базистілік қасиеттерінің орнықтылығы туралы мәселе А.А. Шкаликовтың жұмыстарында дұрыс шешімін тапқан. Алдыңғы жарияланған біздің сериялық жұмыстарымызда характеристикалық анықтауышты құру және шеттік шарттардың кез-келген біреуін интегралдық толқытқандағы түбірлік векторлардың базистілік қасиеттерінің орнықтылығын анықтау сұрақтары зерттелген болатын. Регулярлы, бірақ күшейтілмеген регулярлы шеттік шарттардың барлық мүмкін болатын типтері түгелдей дерлік қарастырылды. Осы жұмыста регулярлы, бірақ күшейтілмеген, бір типтегі интегралдық толқытылған шеттік шарттармен берілген еселі дифференциалдау операторы үшін спектралдық есебі қарастырылады. Шеттік шарттардың екеуіне де интегралдық толқыту арқылы әсер еткендігімен алдыңғы жарыққа шыққан жұмыстардан бұл жұмыс ерекшеленеді. Бірінші кезектегі қол жеткізген нәтиже, ол қарастырылып отырған спектралдық есептің характеристикалық анықтауышының құрылуы. Алынған формуланың негізінде спектралдық есептің меншікті мәндері мен меншікті функцияларының асимптотикалары туралы қорытынды жасалады. Екінші кезектегі алынған негізгі нәтиже, осы спектралдық есептің, шеттік шарттарының екеуіне де интегралдық толқытумен әсер еткендегі түбірлік функциялар жүйесінің Рисс базистілігін тұжырымдау болып табылады.

Түйін сөздер: Характеристикалық анықтауыш, Рисс базисі, күшейтілген регулярлы шеттік шарттар, түбірлік функциялар, шеттік шарттардың интегралдық толқытылуы.

Construction of a characteristic determinant for one type of eigenvalue problems under integral perturbation of two boundary conditions

Imanbaev N.S., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty,
South Kazakhstan State Pedagogical University, Shymkent, Kazakhstan,
E-mail: imanbaevnur@mail.ru
Sadybekov M.A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Corresponding Member of NAS RK,
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
Almaty, Kazakhstan, E-mail: sadybekov@math.kz

It is well known that the system of eigenfunctions of an operator given by a formally self-adjoint differential expression, with arbitrary self-adjoint boundary conditions providing a discrete spectrum, forms an orthonormal basis. In many papers, the question on saving basis properties under some (weak in a certain sense) perturbation of the initial operator has been investigated. For the case of an arbitrary ordinary differential operator, when unperturbed boundary conditions are strongly regular, the question of the stability of the basis property of root vectors under their integral perturbation is positively solved in papers of A.A. Shkalikov. In a series of our previous papers, we have considered the question of constructing a characteristic determinant and of the stability of the basis property of the root vectors under the integral perturbation of one of the boundary conditions. Almost all possible types of the boundary conditions that are regular but not strongly regular have been considered. In the present paper, a spectral problem for the multiple differentiation operator under the integral perturbation of one type boundary conditions being regular but not strongly regular is considered. In contrast to the previous papers we consider a case when the integral perturbation is present in both boundary conditions. The first main result of the paper is to construct a characteristic determinant of the spectral problem. Based on the obtained formula, we come to the conclusion about the asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the problem. The second main result of the paper is to justify the Riesz basis property of the system of root functions of the problem under consideration under the integral perturbation of two boundary conditions.

Key words: Characteristic determinant, Riesz basis property, strongly regular boundary conditions, root functions, integral perturbation of boundary condition.

1 Введение

Хорошо известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис пространства L_2. Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в определенном смысле) возмущении исходного оператора. Например, для случая самосопряженного исходного оператора аналогичный вопрос исследовался в [1-3], а для несамосопряженного – в [4-6].

В серии наших предыдущих работ [7-14] рассматривался вопрос о построении характеристического определителя и об устойчивости свойства базисности корневых векторов при интегральном возмущении одного краевого условия. Были рассмотрены практически все возможные типы краевых условий. Заключительные формулировки можно найти в нашей обзорной статье [15].

В настоящей работе мы исследуем спектральные свойства задачи, в которой оба краевых условия имеют интегральное возмущение:

$$l(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) + \alpha u(0) = \int_0^1 \overline{p_1(x)} u(x) dx, p_1(x) \in L_2(0,1), \tag{2}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) - u(1) = \int_0^1 \overline{p_2(x)} u(x) dx, \ p_2(x) \in L_2(0,1). \tag{3}$$

Здесь $\alpha \neq 0$ - произвольное комплексное число.

В [3] были исследованы вопросы устойчивости базисных свойств периодической задачи (случай $\alpha = 0$) для уравнения (1), при интегральном возмущении второго краевого условия ($p_1(x) \equiv 0$). Было доказано, что множество P функций $p_2(x)$, при которых задача обладает свойством базисности собственных функций - плотно в $L_1(0,1)$, множество $L_1(0,1) \backslash P$ также плотно в $L_1(0,1)$.

В нашей работе [7] были исследованы вопросы устойчивости базисных свойств этой задачи в случае $\alpha \neq 0$ при интегральном возмущении второго краевого условия ($p_1(x) \equiv 0$). Было доказано, что свойство базисности Рисса систем корневых функций задачи является устойчивым относительно интегрального возмущения краевого условия. В частности, показано, что в случае, когда $\alpha \neq 0$ и $p_1(x) \equiv 0$, система корневых функций задачи (1)-(3) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$ при любых возмущениях $p_2(x) \in W_2^1(0,1)$.

Вопрос о базисности корневых функций оператора с более общими интегральными краевыми условиями положительно решен в [5-6], где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности по Биркгофу [16, с. 66–67] краевых условий невозмущенной задачи; а при дополнительном предположении усиленной регулярности - базисность Рисса. В нашем случае невозмущенные (при $p_1(x) \equiv p_2(x) \equiv 0$) краевые условия (2), (3) являются регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями.

Поэтому в этом случае для исследования базисности Рисса не применимы результаты [5-6], а требуется дополнительное подробное исследование.

Из [5] следует, что система собственных и присоединенных функций задачи (1)-(3) полна и минимальна в $L_2(0,1)$. В настоящей работе мы построим характеристический определитель спектральной задачи (1)-(3). На основании полученной формулы может быть доказана устойчивость свойства базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций задачи при интегральном возмущении краевых условий.

В качестве невозмущенной задачи мы принимаем задачу, рассмотренную нами в [7], то есть задачу (1)-(3) при $p_2(x) \equiv 0$. И рассмотрим спектральны свойства задачи при возмущении второго краевого условия (3) интегральным членом с плотностью $p_2(x)$.

2 Невозмущенная задача.

В этом пункте $p_2(x) \equiv 0$. Как следует из [7], при любых $\alpha \neq 0$ невозмущенная задача

$$l(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad U_1(u) = \int_0^1 \overline{p_1(x)} u(x)dx, \quad U_2(u) = 0 \tag{4}$$

обладает асимптотически простым спектром, а система ее нормированных собственных функций образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Сформулируем этот результат более подробно, в виде леммы.

Лемма 1 *([7]) Пусть $p_1(x) \in W_2^1(0,1)$. Тогда собственные значения невозмущенной задачи – задачи (4) – образуют две серии:*

$$\lambda_{1k}^0 = (2\pi k + \delta_{1k})^2, k = 1, 2, ...,$$

$$\lambda_{2k}^0 = (2\pi k + \delta_{2k})^2, k = 0, 1, 2, ...,$$

где δ_{1k} и δ_{2k} – убывающие к нулю коэффициенты такие, что $\{k\delta_{1k}\} \in l_2$ и $\{k\delta_{2k}\} \in l_2$. Эти собственные значения асимптотически простые, то есть $\delta_{1k} \neq \delta_{2k}$ для всех достаточно больших номеров k.
Задача (4) имеет не более, чем конечное число присоединенных функций.
Собственные функции задачи асимптотически имеют вид

$$\begin{array}{l} u_{1k}^0(x) = \sqrt{2}\sin(\lambda_{1k}^0 x) + \beta_{1k}\cos(\lambda_{1k}^0 x), \\ u_{2k}^0(x) = \sqrt{2}\cos(\lambda_{2k}^0 x) + \beta_{2k}\sin(\lambda_{2k}^0 x), \end{array} \tag{5}$$

где последовательности β_{1k} и β_{2k} – убывающие к нулю так, что $\{k\beta_{1k}\} \in l_2$ и $\{k\beta_{2k}\} \in l_2$.
Система нормированных собственных функций и присоединенных функций (если существуют) задачи (4) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Через $\{v_{1k}^0(x), v_{2k}^0(x)\}$ обозначим систему, биортогональную системе собственных и присоединенных функций задачи (4). Нумерация выбрана таким образом, чтобы выполнялись условия биортогональности

$$\left(u_{jk}^0, v_{nm}^0\right) = \delta_{jn}\delta_{km}, \; j, n = 1, 2.$$

В силу леммы 1, эта система также образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Поэтому функция $p_2(x)$ представима в виде ряда Фурье по базису Рисса $\{v_{1k}^0(x), v_{2k}^0(x)\}$:

$$p_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} v_{1k}^0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} v_{2k}^0(x). \tag{6}$$

Система $\{v_{1k}^0(x), v_{2k}^0(x)\}$ является системой корневых функций задачи, сопряженной к задаче (4). Следует отметить, что впервые построение сопряженных операторов в случае интегральных краевых условий проводилось в статье A.M. Krall [17].

Непосредственным вычислением не сложно убедиться, что спектральная задача, сопряженная задаче (4) – это задача для нагруженного дифференциального уравнения с нелокальными краевыми условиями:

$$l^*(v) \equiv -v''(x) + p_1(x)v(0) = \overline{\lambda} v(x),\ 0 < x < 1, \tag{7}$$

$$V_1(u) \equiv v'(0) - v'(1) + \overline{\alpha} v(0) = 0, \tag{8}$$

$$V_2(u) \equiv v(0) - v(1) = 0. \tag{9}$$

3 Характеристический определитель задачи (1)-(3).

Удовлетворяя общее решение $u(x,\lambda) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$ уравнения (1) условиям (2), (3), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_k:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \left[\alpha + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \cos\sqrt{\lambda}x dx\right] + \\ C_2 \left[\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \sin\sqrt{\lambda}x dx\right] = 0, \\ C_1 \left[1 - \cos\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_2(x)} \cos\sqrt{\lambda}x dx\right] + \\ C_2 \left[-\sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_2(x)} \sin\sqrt{\lambda}x dx\right] = 0. \end{array} \right. \tag{10}$$

Ее определитель и будет характеристическим определителем задачи (1)-(3):

$$\Delta_1(\lambda) = \left| \begin{array}{cc} \alpha + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \cos\sqrt{\lambda}x dx & 1 - \cos\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_2(x)} \cos\sqrt{\lambda}x dx \\ \sqrt{\lambda}(1 - \cos\sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \sin\sqrt{\lambda}x dx & -\sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_2(x)} \sin\sqrt{\lambda}x dx \end{array} \right|. \tag{11}$$

Легко видеть, что характеристический определитель невозмущенной задачи (1)-(3) получается отсюда при $p_2(x) \equiv 0$. Обозначим его через

$$\Delta_0(\lambda) = \left| \begin{array}{cc} \alpha + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \cos\sqrt{\lambda}x dx & 1 - \cos\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda}(1 - \cos\sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \sin\sqrt{\lambda}x dx & -\sin\sqrt{\lambda} \end{array} \right|. \tag{12}$$

Используя разложение (6), найдем более удобное представление определителя $\Delta_1(\lambda)$. Для этого сначала вычислим входящие в (11) интегралы. Для простоты демонстрации вычислений будем считать, что все собственные значения невозмущенной задачи (4) - простые (нет присоединенных функций).

Принимая во внимание уравнение (7) и краевые условия (8), (9), которым удовлетворяют функции $v^0_{jk}(x)$, вычисляем:

$$(\lambda-\lambda^0_{jk})\int_0^1 \overline{v^0_{jk}(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx=\int_0^1 \overline{v^0_{jk}(x)}\lambda\cos\sqrt{\lambda}x dx-\int_0^1 \overline{\overline{\lambda^0} v^0_{jk}(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx=$$

$$=-\int_0^1 \overline{v^0_{jk}(x)}\left(\cos\sqrt{\lambda}x\right)''dx+\int_0^1 \overline{v^0_{jk''}(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx-\overline{v^0_{jk}(0)}\int_0^1 \overline{p_1(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx=$$

$$=\int_0^1\left\{-\overline{v^0_{jk}(x)}\left(\cos\sqrt{\lambda}x\right)'+\overline{v^0_{jk'}(x)}\cos\sqrt{\lambda}x\right\}'dx-\overline{v^0_{jk}(0)}\int_0^1 \overline{p_1(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx=$$

$$=\overline{v^0_{jk}(0)}\left[\alpha+\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}-\int_0^1 \overline{p_1(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx\right]+\overline{v^0_{jk'}(1)}\left[\cos\sqrt{\lambda}-1\right].$$

Аналогично вычисляется и второй интеграл

$$(\lambda-\lambda^0_{jk})\int_0^1 \overline{v^0_{jk}(x)}\sin\sqrt{\lambda}x dx=$$

$$=\overline{v^0_{jk}(0)}\left[\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}-\int_0^1 \overline{p_1(x)}\sin\sqrt{\lambda}x dx\right]+\overline{v^0_{jk'}(1)}\left[\sin\sqrt{\lambda}\right].$$

Поэтому из разложения (6) будем иметь представления:

$$\int_0^1 \overline{p_2(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx=A(\lambda)\left[\cos\sqrt{\lambda}-1\right]+B(\lambda)\left[\alpha+\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}-\int_0^1 \overline{p_1(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx\right],$$

$$\int_0^1 \overline{p_2(x)}\sin\sqrt{\lambda}x dx=A(\lambda)\left[\sin\sqrt{\lambda}\right]+B(\lambda)\left[\sqrt{\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right)-\int_0^1 \overline{p_1(x)}\sin\sqrt{\lambda}x dx\right],$$

где обозначено

$$A(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{a_{1k}}}{\lambda-\lambda^0_{1k}}\overline{v^0_{1k'}(1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{a_{2k}}}{\lambda-\lambda^0_{2k}}\overline{v^0_{2k'}(1)},$$

$$B(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{a_{1k}}}{\lambda-\lambda^0_{1k}}\overline{v^0_{1k}(0)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{a_{2k}}}{\lambda-\lambda^0_{2k}}\overline{v^0_{2k}(0)}.$$

Используя полученное, стандартными преобразованиями определитель (9) приводится к виду:

$$\Delta_1(\lambda)=\Delta_0(\lambda)\left[1+A(\lambda)\right]\equiv\Delta_0(\lambda)\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{a_{1k}}}{\lambda-\lambda^0_{1k}}\overline{v^0_{1k'}(1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{a_{2k}}}{\lambda-\lambda^0_{2k}}\overline{v^0_{2k'}(1)}\right]. \quad (13)$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1 *Характеристический определитель задачи (1)-(3) с возмущенными интегралом условиями представим в виде (13), где $\Delta_0(\lambda)$ – характеристический определитель невозмущенной задачи (4), λ_{jk}^0 – собственные значения невозмущенной задачи (4), а a_{jk} – коэффициенты разложения (6) функции $p_2(x)$ в биортогональный ряд по базису Рисса $\{v_{1k}^0(x), v_{2k}^0(x)\}$ являющегося системой корневых функций задачи, сопряженной к задаче (4).*

Замечание 1 *В представлении (13) функция $A(\lambda)$ имеет полюса в точках $\lambda = \lambda_{1k}^0$ первого порядка. Однако в этих же точках функция $\Delta_0(\lambda)$ имеет нули первого порядка. Поэтому функция $\Delta_1(\lambda)$, представленная по формуле (13) является целой аналитической функцией переменной λ.*

4 Собственные значения задачи (1)-(3).

Из анализа формулы (13) легко видеть, что собственные значения λ_{jk}^0 невозмущенной задачи (4) являются собственными значениями возмущенной задачи (1)-(3), если для этих номеров j, k соответствующий коэффициент Фурье в разложении (6) равен нулю: $a_{jk} = 0$.

Случай простого вида характеристического определителя (13) – когда $p_2(x)$ представляется в виде (6) с конечной суммой слагаемых. То есть, когда существует такой номер N, что $a_{jk} = 0$ для всех $k > N$, $j = 1, 2$. В этом случае формула (13) принимает вид

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)\left[1 + A(\lambda)\right] \equiv \Delta_0(\lambda)\left[1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{\overline{a_{1k}}}{\lambda - \lambda_{1k}^0} \overline{v_{1k'}^0(1)} + \sum_{k=0}^{N} \frac{\overline{a_{2k}}}{\lambda - \lambda_{2k}^0} \overline{v_{2k'}^0(1)}\right].$$

Из этого частного случая формулы (13) легко обосновать следующую

Лемма 2 *Для любых наперед заданных чисел – комплексного $\widehat{\lambda}$ и натурального $\widehat{m}$ – всегда существует такая функция $p_2(x)$, что $\widehat{\lambda}$ будет являться собственным значением задачи (1)-(3) кратности $\widehat{m}$.*

В силу этой леммы возмущенная задача может иметь любое конечное число кратных собственных значений. Поэтому ее корневые подпространства состоят из собственных и (может быть) присоединенных функций.

Перейдем к определению асимптотики собственных значений возмущенной задачи в общем случае. Обозначим собственные значения возмущенной задачи через λ_{jk}^1.

Стандартными рассуждениями, связанными с применением теоремы Руше, находим, что для достаточно больших номеров k нули характеристического определителя (13) имеют вид

$$\sqrt{\lambda_{jk}^1} = 2\pi k + \gamma_{jk}, \ |\gamma_{jk}| < 1.$$

Уточним асимптотику δ_{jk}. Из (13) легко видеть, что имеет место асимптотика

$$\left|\gamma_{jk}\right| = \left|a_{jk}\right| \cdot \left|O(1)\right|. \tag{14}$$

Так как коэффициенты Фурье по базису Рисса принадлежат пространству последовательностей l_2, то отсюда следует, что числовая последовательность $\{\gamma_{jk}\} \in l_2$, $j = 1, 2$. Это и дает искомую асимптотику собственных значений. Таким образом, доказана

Лемма 3 *Пусть $p_2(x) \in L_2(0,1)$. Тогда собственные значения задачи (1)-(3) образуют две серии:*

$$\begin{array}{l} \lambda^1_{1k} = (2\pi k + \gamma_{1k})^2, k = 1, 2, ...,, \\ \lambda^1_{2k} = (2\pi k + \gamma_{2k})^2, k = 0, 1, 2, ..., \end{array} \tag{15}$$

где $\{\gamma_{jk}\} \in l_2$, $j = 1, 2$. Причем $\gamma_{jk} = \delta_{jk}$ при $a_{jk} = 0$.
Эти собственные значения асимптотически простые, то есть $\gamma_{1k} \neq \gamma_{2k}$, $j = 1, 2$, для всех достаточно больших номеров k.

Для более гладких функций $p_2(x)$ асимптотика собственных значений может быть уточнена.

Лемма 4 *Если $p_2(x) \in W^1_2(0,1)$, то собственные значения задачи (1)-(3) имеют асимптотику (15), где $\{k\gamma_{jk}\} \in l_2$, $j = 1, 2$. Собственные значения задачи (1)-(3) асимптотически простые и отделенные.*

Доказательство этой леммы проводится по классической схеме с использованием повышеной гладкости функции $p_2(x) \in W^1_2(0,1)$. Здесь на подробностях вычислений мы останавливаться не будем.

Используя обозначения п.3, систему (10) можем переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \left[\alpha + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx\right] + \\ + C_2 \left[\sqrt{\lambda}\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}\right) - \int_0^1 \overline{p_1(x)}\sin\sqrt{\lambda}x dx\right] = 0, \\ \left\{C_1\left[1 - \cos\sqrt{\lambda}\right] + C_2\left[-\sin\sqrt{\lambda}\right]\right\}[1 + A(\lambda)] = 0. \end{array} \right. \tag{16}$$

Соответственно, характеристический определитель (11) возмущенной задачи запишется в виде

$$\Delta_1(\lambda) = \left| \begin{array}{cc} \alpha + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx & \left[1 - \cos\sqrt{\lambda}\right][1 + A(\lambda)] \\ \\ \sqrt{\lambda}(1 - \cos\sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p_1(x)}\sin\sqrt{\lambda}x dx & \left[-\sin\sqrt{\lambda}\right][1 + A(\lambda)] \end{array} \right|. \tag{17}$$

Из этого представления явно видно, что при интегральном возмущении второго краевого условия, собственные значения первой серии не изменяются и совпадают с собственными значениями невозмущенной задачи (4). Таким образом доказана следующая теорема о собственных значениях возмущенной задачи (1)-(3).

Теорема 2 *Пусть $p_1(x) \in W^1_2(0,1)$ и $p_2(x) \in W^1_2(0,1)$. Тогда собственные значения возмущенной задачи – задачи (1)-(3) – образуют две серии. Первая серия собственных значений совпадает с первой серией собственных значений невозмущенной задачи (4):*

$$\lambda^1_{1k} \equiv \lambda^0_{1k} = (2\pi k + \delta_{1k})^2, k = 1, 2, ...,$$

где δ_{1k} *– убывающие к нулю коэффициенты из леммы 1, такие, что* $\{k\delta_{1k}\} \in l_2$.
Вторая серия собственных значений имеет вид

$$\lambda^1_{2k} = (2\pi k + \gamma_{2k})^2, k = 0, 1, 2, ...,$$

где γ_{2k} *– убывающие к нулю коэффициенты такие, что* $\{k\gamma_{2k}\} \in l_2$. *Эти собственные значения асимптотически простые, то есть* $\delta_{1k} \neq \gamma_{2k}$ *для всех достаточно больших номеров* k.

5 Собственные функции задачи (1)-(3).

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $p_1(x) \in W^1_2(0,1)$ и $p_2(x) \in W^1_2(0,1)$. Используя обозначения п.3, систему (10) можем переписать в виде (16). Анализируя (16) легко видеть, что собственные функции, соответствующие первой серии собственных значений задачи, не меняются при интегральном возмущении второго краевого условия. То есть собственные функции, соответствующие первой серии собственных значений задачи, у возмущенной и невозмущенной задач совпадают.

Это позволяет выписать асимптотику собственных функций возмущенной задачи и показать, что эта асимптотика совпадает с асимптотикой собственных функций невозмущенной спектральной задачи (4). На подробностях вычислений мы не будем здесь останавливаться.

Принимая во внимание результат наших работ [3-1], сформулирвоанный в лемме 1, приходим к следующей теореме.

Теорема 3 *Пусть* $p_1(x) \in W^1_2(0,1)$ *и* $p_2(x) \in W^1_2(0,1)$. *Тогда спектр задачи (1)-(3) асимптотически простой. Задача (1)-(3) может иметь не более, чем конечное число присоединенных функций. Собственные функции возмущенной задачи – задачи (1)-(3) – образуют две серии. Первая серия собственных функций совпадает с первой серией собственных функций невозмущенной задачи (4):*

$$u^1_{1k}(x) \equiv u^0_{1k}(x) = \sqrt{2}\sin(\lambda^0_{1k}x) + \beta_{1k}\cos(\lambda^0_{1k}x),$$

где последовательность β_{1k} *– последовательность из Леммы 1 – убывающая к нулю так, что* $\{k\beta_{1k}\} \in l_2$.
Вторая серия собственных функций имеет асимптотику

$$u^1_{2k}(x) = \sqrt{2}\cos(\lambda^0_{2k}x) + \mu_{2k}\sin(\lambda^0_{2k}x),$$

где последовательность μ_{2k} *– убывающая к нулю так, что* $\{k\mu_{2k}\} \in l_2$.
Система нормированных собственных функций и присоединенных функций (если существуют) задачи (1)-(3) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Следствие 1 *Если* $p_1(x) \in W^1_2(0,1)$ *и* $p_2(x) \in W^1_2(0,1)$, *то свойство базисности Рисса в* $L_2(0,1)$ *системы корневых функций задачи (1)-(3) сохраняется при интегральном возмущении краевых условий.*

6 Заключение

Необходимо отметить, что для дифференциального оператора заданного выражением $l(u) = -u''(x)$ на отрезке $(0, 1)$ и краевыми условиями на концах этого отрезка вопросы полноты и базисности систем корневых функций полностью решены в работе P. Lang и J. Locker [18]. В случае же, когда дифференциальный оператор задается тем же дифференциальным выражением $l(u) = -u''(x)$ на отрезке $(0, 1)$, но с более общими условиями (не краевыми) вопросы о существовании собственных значений, о полноте и о базисности системы корневых функций окончательно еще далеко не решен.

В связи с этим возникает необходимость отдельного исследования конкретных задач с нелокальными возмущениями краевых условий. Предыдущие наши работы демонстрировали различные варианты – и устойчивости и неустойчивости свойства базисности – при интегральном возмущении одного краевого условия. В настоящей работе исследован случай, когда интегральное возмущение присутсивует в обоих краевых условиях.

Результаты настоящей работы демонстрируют устойчивость свойств базисности корневых функций при интегральном возмущении обоих краевых условий для одного типа задач, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными.

7 Благодарности

Авторы благодарят профессора Б.Е. Кангужина за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Первый автор поддержан грантом AP05132587 (рук. проф. Дауылбаев М.К.), второй автор поддержан грантом AP05133271 (рук. проф. Садыбеков М.А.) грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерством образования и науки Республики Казахстан на 2018-2020 годы.

Список литературы

[1] Маркус А.С. О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора // Докл. АН СССР. - 1962. - Т.142, № 3. - С. 538 - 541.

[2] Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р. О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач // Матем. заметки. - 1998. - Т.64, Вып. 4. - С. 448 - 563.

[3] Макин А.С. О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференц. уравнения. - 2006. - Т. 42, №4. - С. 560-562.

[4] Ильин В.А., Крицков Л.В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. - Т. 96. М.: ВИНИТИ. - 2006. - С. 5-105.

[5] Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. Математика и механика. - 1982, № 6. - С. 12-21.

[6] Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // Успехи мат. наук. - 1979. - Т. 34, № 5. - С. 235–236.

[7] Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. Stability of basis property of a type of problems on eigenvalues with nonlocal perturbation of boundary conditions // Ufimsk. Mat. Zh. - 2011. - V. 3, no. 2. - P. 28–33.

[8] Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. On the Basis Property of Root Functions of a Periodic Problem with an Integral Perturbation of the Boundary Condition // Differential Equations. - 2012. - V. 48, no. 6. - P. 896-900.

[9] Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Eurasian Mathematical Journal. - 2013. - V. 4, no. 3. - P. 53-62.

[10] Imanbaev N.S. On stability of the basis property of the system of root vectors of the Sturm-Liouville operator with an integral perturbation of the boundary conditions in a not strengthened regular problems of Samarskii-Ionkin type // Математический журнал. - 2015. - Т. 15, № 3. - С. 96-107.

[11] Imanbaev N. Stability of the basis property of system of root functions of Sturm-Liouville operator with integral boundary condition // Математический журнал. - 2016. - Т. 16, № 3. - С. 125-136.

[12] Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. On a problem not having the property of basis property of root vectors, connected with the perturbed regular operator of multiple differentiation // Математический журнал. - 2017. - Т. 17, № 3. - С. 117-125.

[13] Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. A Regular Differential Operator with Perturbed Boundary Condition // Mathematical Notes. - 2017. - V. 101, no. 5. - P. 878-887.

[14] Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. Characteristic determinant of a boundary value problem, which does not have the basis property // Eurasian Math. J. - 2017. - V. 8, no. 2. - P. 40–46.

[15] Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. Regular Sturm-Liouville Operators with Integral Perturbation of Boundary Condition // Functional Analysis in Interdisciplinary Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. - 2017. - V. 216. - P. 222–234.

[16] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - М. - 1969.

[17] Krall A.M. The development of general differential and general differential-boundary systems // Rocky Mountain J. Math. - 1975. - V. 5, no. 4. - P. 493–542.

[18] Lang P., Locker J. Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by -D^2 // J. Math. Anal. And Appl. - 1990. - V. 146, №1. - P.148-191.

References

[1] Markus A.S., "O razlozhenii po kornevym vektoram slabo vozmushchennogo samosopryazhennogo operatora" , *Dokl. AN SSSR* V.142, no. 3 (1962): 538–541.

[2] Kerimov N.B. and Mamedov K.R., "On the Riesz basis property of the root functions in certain regular boundary value problems" , *Mathematical Notes* V. 64, no. 3-4(1998): 483–487.

[3] Makin A.S., "On a nonlocal perturbation of a periodic eigenvalue problem" , *Differential Equations* 42(2006): 599–602.

[4] Il'in V.A and Kritskov L.V., "Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators" , *Journal of Mathematical Sciences (New York)* V.116, no.5 (2003): 3489—3550.

[5] Shkalikov A.A., "Basis Property of Eigenfunctions of Ordinary Differential Operators with Integral Boundary Conditions" , *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mech.* 6(1982): 12–21.

[6] Shkalikov A.A., "On the basis problem of the eigenfunctions of an ordinary differential operator" , *RussianMath. Surveys* 34 (1979): 249-–250.

[7] Imanbaev N.S. and Sadybekov M.A., "Stability of basis property of a type of problems on eigenvalues with nonlocal perturbation of boundary conditions" , *Ufimsk. Mat. Zh.* 3(2011): 28–33.

[8] Sadybekov M.A. and Imanbaev N.S., "On the Basis Property of Root Functions of a Periodic Problem with an Integral Perturbation of the Boundary Condition" , *Differential Equations* 48(2012): 896–900.

[9] Imanbaev N.S. and Sadybekov M.A., "On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition" , *Eurasian Mathematical Journal* 4(2013): 53–62.

[10] Imanbaev N.S., "On stability of the basis property of the system of root vectors of the Sturm-Liouville operator with an integral perturbation of the boundary conditions in a not strengthened regular problems of Samarskii-Ionkin type" , *Matematicheskiy zhurnal* 15(2015): 96–107.

[11] Imanbaev N., "Stability of the basis property of system of root functions of Sturm-Liouville operator with integral boundary condition" , *Matematicheskiy zhurnal* 16(2016): 125–136.

[12] Sadybekov M.A. and Imanbaev N.S., "On a problem not having the property of basis property of root vectors, connected with the perturbed regular operator of multiple differentiation", *Matematicheskiy zhurnal* 17(2017): 117–125.

[13] Sadybekov M.A. and Imanbaev N.S., "A Regular Differential Operator with Perturbed Boundary Condition", *Mathematical Notes* V. 101, no. 5(2017): 878–887.

[14] Sadybekov M.A. and Imanbaev N.S., "Characteristic determinant of a boundary value problem, which does not have the basis property", *Eurasian Math. J.* 8(2017): 40—46.

[15] Imanbaev N.S. and Sadybekov M.A., "Regular Sturm-Liouville Operators with Integral Perturbation of Boundary Condition", *Functional Analysis in Interdisciplinary Applications, Springer Proceedings in Mathematics* & *Statistics* 216(2017): 222—234.

[16] Naymark M.A., "Lineynyye differentsial'nyye operatory Moskva, 1969.

[17] Krall A.M., "The development of general differential and general differential-boundary systems", *Rocky Mountain J. Math* 5(1975): 493—542.

[18] Lang P. and Locker J., "Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by -D^2", *J. Math. Anal. And Appl* 146(1990): 148–191.