МРНТИ 27.31.17 https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m4

Сильная неосцилляторность и осцилляторность полулинейного разностного уравнения второго порядка

Калыбай А.А., Университет КИМЭП, г. Алматы, Казахстан, E-mail: kalybay@kimep.kz
Каратаева Д.С., Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан, E-mail: danagul83@inbox.ru

Настоящая статья посвящена исследованию признаков сильной осцилляторности и неосцилляторности одного класса квазилинейных и линейных разностных уравнений второго порядка. К вопросу осцилляционных свойств разностных уравнений посвящены достаточно много статей, монографии и книг. Более сильно исследованы линейные, квазилинейные разностные уравнения второго порядка с различными методами. Среди разнообразных методов исследования осцилляционных свойств дифференциальных и разностных уравнения имеются два основных метода, один из которых называется "техника Риккати исходящий из теории линейных дифференциальных и разностных уравнений, а другой "вариационный принцип"или просто "вариационный метод". В большинстве работ, посвященных к осцилляционным свойствам дифференциальных и разностных уравнении, используются техника Риккати. Это связано тем, что в вариационном методе задача сводится к исследованию выполнения некоторого весового неравенства на множестве финитных последовательности, который является не менее сложная задача. В данной работе используя результаты авторов по весовым неравенствам Харди в разностной форме и на основе вариационного принципа получены различные необходимые и достаточные условия сильной осцилляторности и неосцилляторности для двухчленного полулинейного и линейного разностного уравнения второго порядка. Как приложение полученных результатов даны критерии ограниченности снизу и дискретности спектра одного одночленного разностного оператора второго порядка.

Ключевые слова: полулинейное разностное уравнение, сильная неосцилляторность, сильная осцилляторность, весовое дискретное неравенство Харди, последовательность чисел, дискретный оператор, дискретность спектора.

Екінші ретті жартылай сызықты айырымдық теңдеудің күшті тербелімсіздігі және тербелімділігі

Қалыбай Ә.А., ҚМЭБИ университеті, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: kalybay@kimep.kz
Қаратаева Д.С., Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан, E-mail: danagul83@inbox.ru

Бұл мақала екінші ретті квазисызықты және сызықтық айырымдық теңдеулердің бір класының қатты тербелімділік және тербелімсіздік белгілерін зерттеуге арналған. Айырымдық теңдеулердің тербелімділік қасиеттері туралы көптеген мақалалар, монографиялар мен кітаптар берілген. Екінші ретті сызықтық, квазисызықтық айырымдық теңдеулер әртүрлі әдістермен неғұрлым күшті зерттелген. Дифференциалдық және айырымдық теңдеулердің тербелімділік қасиеттерін зерттеудің әртүрлі әдістерінің ішінде екі негізгі әдіс бар, олардың бірі сызықтық дифференциалдық және айырымдық теңдеулер теориясынан шығатын "Риккати техникасы" деп аталады, ал екіншісі – "вариативті принцип" немесе жай "вариациялық әдіс". Дифференциалдық және айырымдық теңдеулердің тербелімділік қасиеттеріне арналған көптеген жұмыстарда Риккати әдісі қолданылады. Бұл вариациялық әдісте, есеп финитті тізбектер жиынындағы қандайда бір салмақты теңсіздікті зерттеуге әкелінетініне байланысты, мұның өзі оңай есеп емес. Бұл жұмыста авторлардың айырымдық түрдегі салмақты Харди теңсіздіктерінің нәтижелерін қолдана отырып және вариациялық принцип негізінде екінші ретті екімүшелі жартылайсызықты және сызықты айырымдық теңдеуі үшін күшті тербелімділік пен тербелімсіздіктің әртүрлі қажеттілік және жеткіліктілік шарттары алынды. Алынған нәтижелерге сүйене отырып, төменнен шенелгендік және екінші ретті бір бірмүшелі айырымдық оператордың спектрінің дискреттілігі критерилері берілген.

Түйін сөздер: жартылай сызықты айырымдық теңдеу, күшті тербелімсіздік, күшті тербелімділік, салмақты дискретті Харди теңсіздігі, сандық тізбектер, дискретті оператор, спектрдің дискреттілігі.

Strong non-oscillation and Oscillation second order half-linear difference equation

Kalybay A.A., KIMEP university, Almaty, Kazakhstan, E-mail: kalybay@kimep.kz
Karatayeva D.S., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan, E-mail: danagul83@inbox.ru

This article is devoted to the study of the signs of strong oscillation and non-oscillation of one class of second-order quasilinear and linear difference equations. A lot of articles, monographs and books are devoted to the question of the oscillatory properties of difference equations. More strongly investigated are linear, quasilinear difference equations of the second order with various methods. Among the various methods for studying the oscillation properties of differential and difference equations, there are two main methods, one of which is called the "Riccati technique", which proceeds from the theory of linear differential and difference equations, and the other is the "variational principle" or simply the "variational method". In most works devoted to the oscillatory properties of differential and difference equations, the Riccati technique is used. This is due to the fact that in the variational method the problem is reduced to studying the fulfillment of some weighted inequality on the set of compactly supported sequences, which is an equally difficult task. In this paper, using the results of the authors on the Hardy weight inequalities in difference form and based on the variational principle, various necessary and sufficient conditions for strong oscillation and non-oscillation for the two-term half-linear and linear difference equation of the second order are obtained. As an application of the results obtained, criteria are given for boundedness below and discreteness of the spectrum of a one-term difference operator of the second order.

Key words: half-linear difference equation, strong non-oscillation, strong oscillation, discrete Hardy weighted inequality, sequence of numbers, discrete operator, discreteness of the spectrum.

1 Введение

Рассмотрим полулинейное разностное уравнение второго порядка:

$$\Delta(\rho_i\,|\Delta y_i|^{p-2}\,\Delta y_i) + \lambda\upsilon_i\,|y_{i+1}|^{p-2}\,y_{i+1} = 0, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ ..., \tag{1}$$

где $\lambda > 0$, $1 < p < \infty$ и $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. Относительно коэффициентов уравнения (1) полагаем, что $\upsilon = \{\upsilon_i\}$ и $\rho = \{\rho_i\}$ являются последовательностями неотрицательных действительных чисел. Более того, пусть $\rho_i > 0$ для всех $i = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ и для каждого $m > 1$ существует $i > m$ такой, что $\upsilon_i \neq 0$.

Приведем необходимые для настоящей работы определения и утверждения. Пусть $m \geq 0$ и $n \geq 0$– целые числа. Для краткости будем писать "интервал", подразумевая "дискретный интервал".

– Говорят, что интервал $(m,\ m+1]$ содержит обобщённый нуль нетривиального решения $y = \{y_i\}$ уравнения (1), если $y_m \neq 0$ и $y_m y_{m+1} < 0$.

– Нетривиальное решение y уравнения (1) называется осцилляторным, если оно имеет бесконечное число обобщённых нулей, в противном случае оно называется неосцилляторным.

– Уравнение (1) называется осцилляторным, если все его нетривиальные решения являются осцилляторными, в противном случае оно называется неосцилляторным.

– В силу теоремы Штурма о разделении нулей [1, Theorem 3], уравнение (1) осцилляторно, если одно его нетривиальное решение осцилляторно.

– Уравнение (1) называется сильно осцилляторным или неосцилляторным, если оно при всех $\lambda > 0$ соответственно является осцилляторными или неосцилляторным.

Уравнение (1) и его частный случай при $p = 2$ является дискретным уравнением Штурма-Лиувилля

$$\Delta(\rho_i \Delta y_i) + \lambda \upsilon_i y_{i+1} = 0, \;\; i = 0,\ 1,\ 2,\ ..., \tag{2}$$

Уравнение (1) и (2) являются разностным аналогом следующих дифференциальных уравнении

$$(\rho(t)\,|y'(t)|^{p-2}\,y'(t))' + \upsilon(t)\,|y(t)|^{p-2}\,y(t) = 0, \;\; p > 1, \tag{3}$$

$$(\rho(t) y'(t))' + \upsilon(t) y(t) = 0, \tag{4}$$

соответственно.

Кроме того сильной неосцилляторностью уравнения (2) тесно связно со спектральным свойством соответствующего оператора. Основной целью этой работы является получение необходимые и достаточные условия сильной неосцилляторности и осцилляторности уравнения (1).

2 Обзор литературы и методы исследования

Исследования осцилляционных свойств уравнения (4) начинается в знаменитой работе Штурма [14] и развивается в настоящее время. В начале прошлого века стали интенсивно исследовать осцилляционные свойства и нелинейные дифференциальные уравнения. Отметим книгу [15], в которых даны достаточные успехи в этой области в первой половине прошлого века. Позже стало увеличиваться количество работ, посвященных этой тематике, в связи с применением результатов в различных направлениях качественной теории дифференциальных уравнений второго порядка, например в спектральной теории дифференциальных операторов [17].

Исследования свойств решения уравнения (3) начались с работы Бихари [11], Эльберта [13] и Мирзова [12], которых обычно называют "пионерами" качественной теории (HL).

Основные результаты и методы исследования качественной теории уравнения (3) и уравнения (1) до 2005 года изложены в прекрасной книге Досли и Рехака [8], где первый автор вложил много сил для развития качественной теории (3).

Интерес к качественной теории (3) связан с одной стороны, как обобщение линейного уравнения (4), с другой стороны, как одномерный случай дифференциальных уравнений в частных производных с так называемым p-Лапласианом, имеющие большие приложения в физике, биологии, а также в теории не Ньютоновской среды или в некоторых моделей гласеологии [16]. Исследования уравнения (1) начались в 70 годах прошлого века и как дискретный аналог уравнения (3) имеют многочисленные приложения (см., например, [9], [10]).

Среди разнообразных методов исследования осцилляционных свойств уравнения (1) имеются два основных метода, один из которых называется "техника Риккати", исходящий из теории линейных уравнений (2), а другой "вариационный принцип" или просто "вариационный метод" [8]. Большая часть работы посвященные к осцилляционным свойствам уравнения (1) и (2) используют технику Риккати и ее различные обобщения (см., например, [1], [4], [5], [6]} и приведенные там ссылки). Однако этой техникой очень трудно получить результаты виде критерии. Как показана будеть ниже, вариационный метод сводится к устанавлению весового разностного неравенста на множестве финитных последовательности. Но, когда коэффиценты уравнения (1), (2) произвольные последовательности установление соответстующего неравенства во многих случаях является открытой проблемой. В работе [2] применяя вариационный метод, при условии

$$\sum_{i=s}^{\infty} \rho_i^{1-p'} = \infty, \tag{5}$$

получена достаточные, а также необходимые условия осцилляторности и неосцилляторности уравнения (1) и (2). Здесь использована результаты весового дискретного неравенства Харди [18], [19], [20]. В работах [21], [22] успешно применен резултаты весового интегрального неравенства Харди [23] для установления осцилляционных свойства уравнения вида (3).

В данной работе применяя вариационный прицип получена критерий сильной осцилляторности и неосцилляторности уравнения (1) и (2), но выпольнение условие (5) непредполагается.

3 Основные результаты

Исследование уравнения (1) опирается на следующий вариационный принцип, приведённое в работе [1].

Теорема A *Пусть* $0 \leq m < \infty$. *Уравнение* (1) *является неосцилляторным тогда и только тогда, когда существует m>1 и выполняется неравенство*

$$\sum_{i=m}^{\infty} (\rho_i \left|\Delta y_i\right|^p - \lambda \upsilon_i \left|y_{i+1}\right|^p) \geq 0 \tag{6}$$

для всех нетривиальных $y = \{y_i\}_{i=m}^{n+1}$, $y_m = 0$ *и* $y_{n+1} = 0$

Здесь нам понадобится утверждение, эквивалентное теореме А, доказательство которого приведено в работе [3]. Для этого эквивалентного утверждения дадим определение множества $\overset{\circ}{Y}(m,n)$ для $0 \leq m < n \leq \infty$. Нетривиальную числовую последовательность $y = \{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ назовем финитной, если конечное число её членов отлично от нуля, а множество *supp* $y := \{i \geq 0 : y_i \neq 0\}$ назовем её носителем. Обозначим через $\overset{\circ}{Y}(m,n)$ совокупность всех финитных последовательностей y, у которых *supp* $y \subset [m+1,n]$, $n < \infty$. При $n = \infty$ мы полагаем, что для любого y найдётся целое число $k = k(y) : m < k < \infty$такое, что *supp* $y \subset [m+1,k]$.

Теорема B *Пусть* $0 \leq m < n \leq \infty$. *Уравнение* (1) *является неосцилляторным тогда и только тогда, когда существует* $m > 1$*и выполняется неравенство*

$$\sum_{i=m}^{\infty} \lambda \upsilon_{i-1} \left|y_i\right|^p \leq \sum_{i=m}^{\infty} \rho_i \left|\Delta y_i\right|^p, \quad y \in \overset{\circ}{Y}(m,n), \tag{7}$$

где $\upsilon_{-1} = 0$.

В случае $\lambda = 1$ уравнение (1) и соотношение (7) соответственно имеет вид

$$\Delta(\rho_i \left|\Delta y_i\right|^{p-2} \Delta y_i) + \upsilon_i \left|y_{i+1}\right|^{p-2} y_{i+1} = 0, \quad i = 0, \ 1, \ 2, \ ..., \tag{8}$$

$$\sum_{i=m}^{\infty} \upsilon_{i-1} \left|y_i\right|^p \leq \sum_{i=m}^{\infty} \rho_i \left|\Delta y_i\right|^p, \quad y \in \overset{\circ}{Y}(m,n), \tag{9}$$

где $\upsilon_{-1} = 0$.

Расмотрим весевое неравенство Харди в разностной форме

$$\sum_{i=m}^{\infty} \upsilon_{i-1} \left|y_i\right|^p \leq C_m \sum_{i=m}^{\infty} \rho_i \left|\Delta y_i\right|^p, \quad y \in \overset{\circ}{Y}(m,n), \tag{10}$$

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* C_m *– наилучшей константа в (10). Тогда уравнение* (1)

(i) неосцилляторно тогда и только тогда, когда существует $m > 1$ *и выполнено* $0 < C_m \leq 1$;

(ii) осцилляторно тогда и только тогда, когда для любого $m > 1$ *выполнено* $C_m > 1$.

Доказательство леммы 1. Так как утверждение (ii) является отрицанием утверждения (i), то достаточно доказать утверждение (i). Пусть уравнение (8) неосцилляторно. Тогда, в силу теоремы B, существует $m > 1$ и выполняется неравенство (9) для всех $y \in \overset{\circ}{Y}(m,n)$. Это означает, что $0 < C_m \leq 1$. Обратно, пусть существует $m > 1$ и выполнено $0 < C_m \leq 1$. Тогда для $m > 1$ выполнено (9) для всех $y \in \overset{\circ}{Y}(m,n)$. Поэтому на основания теоремы B уравнение (8) неосцилляторно. Лемма 1 доказана.

В работе [7] найден критерий выполнения неравенства (10) вместе с оценкой его наилучшей константы C_m:

Теорема C. Пусть $0 \leq m < n \leq \infty$ и $1 < p < \infty$. Неравенство (10) выполняется тогда и только тогда, когда $B(m,n) < \infty$. Более того, для наименьшей константы в (10) выполняется

$$B(m,n) \leq C_m \leq 2\tilde{\gamma}_p B(m,n), \tag{11}$$

где

$$B(m,n) \equiv B_{\upsilon,\rho}(m,n) = \sup_{m<t\leq s<n} \left(\sum_{i=t}^{s-1} \upsilon_i\right) \left(\left(\sum_{i=m}^{t} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\sum_{i=s}^{n} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{-1}$$

и

$$\tilde{\gamma}_p = \inf_{1<\mu} \frac{\mu^p(\mu^p - 1)}{(\mu - 1)^p}.$$

Умнажая обе части неравенства (10) на $\lambda > 0$ получим неравенство Харди соответствующее неравенству (7)

$$\sum_{i=m}^{\infty} \lambda\upsilon_{i-1} \left|y_i\right|^p \leq \lambda C_m \sum_{i=m}^{\infty} \rho_i \left|\Delta y_i\right|^p, \quad y \in \overset{\circ}{Y}(m,n), \tag{12}$$

при этом в неравенстве (12) наилучшая константа будет λC_m, где C_m–наилучшая константа в неравенстве (10).

Теперь, на основании леммы 1 и теоремы С имеем

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда уравнение (1)*

(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m\to\infty} B(m,\infty) = \lim_{m\to\infty} \sup_{m<t\le s<\infty} \frac{\sum\limits_{i=t}^{s-1} \upsilon_i}{\left(\sum\limits_{i=m}^{t} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\sum\limits_{i=s}^{\infty} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}} = 0 \tag{13}$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m\to\infty} B(m,\infty) = \lim_{m\to\infty} \sup_{m<t\le s<\infty} \frac{\sum\limits_{i=t}^{s-1} \upsilon_i}{\left(\sum\limits_{i=m}^{t} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\sum\limits_{i=s}^{\infty} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}} = \infty \tag{14}$$

Доказательство теоремы 1. Часть (i). Пусть уравнение (1) сильно неосцилляторно. Тогда, в силу леммы 1, для любого $\lambda > 0$ существует $m(\lambda) > 1$ и выполнено $\lambda C_{m(\lambda)} \le 1$. Откуда $C_{m(\lambda)} \le \frac{1}{\lambda}$ и

$$\lim_{\lambda\to\infty} C_{m(\lambda)} = 0. \tag{15}$$

Так как из $0 < \lambda < \lambda_1$ и $\lambda_1 C_{m(\lambda_1)} \le 1$ следует $\lambda C_{m(\lambda_1)} \le 1$, то $m(\lambda) \le m(\lambda_1)$, т.е., $m(\lambda)$не убывает по $\lambda > 0$. Поэтому существует $\lim\limits_{\lambda\to\infty} m(\lambda) = m(\infty)$. Если $m(\infty) < \infty$, то из (11) и (15) имели бы $B(m(\infty),\infty) = 0$, что невозможно в силу наложенных условия на последовательности $\upsilon,\ \rho$. Следовательно $\lim\limits_{\lambda\to\infty} m(\lambda) = \infty$ и из (15) имеем $\lim\limits_{m\to\infty} C_m = 0$. Тогда из (11) следует выполнение (13).

Обратно, пусть выполнено (13). Тогда для любого $\lambda > 0$ существует $m(\lambda)$ такой, что $B(m(\lambda),\infty) \le \frac{1}{2\tilde{\gamma}_p\lambda}$, т.е., $\lambda 2\tilde{\gamma}_p B(m(\lambda),\infty) \le 1$ Откуда из (11) имеем $\lambda C_{m(\lambda)} \le 1$ для любого $\lambda > 0$. Тогда по лемме 1 уравнение (1) неосцилляторно для любого $\lambda > 0$, т.е., уравнение (1) сильно неосцилляторно.

Теперь докажем утверждение (ii). Пусть уравнение (1) сильно осцилляторно. Тогда по лемме 1 для любого $\lambda > 0$ и для любого $m > 1$выполнено $\lambda C_m > 1$ или $C_m \ge \frac{1}{\lambda}$. Откуда при $\lambda \to 0$ имеем $C_m = \infty$ для любого $m > 1$ и в частности при $\lim\limits_{m\to\infty} C_m = \infty$. Тогда из (11) следует (14).

Обратно, пусть выполнено (14). Тогда $B(m,\infty) = \infty$и из (11) следует $C_m = \infty$, т.е., $\lambda C_m = \infty$ для любого $\lambda > 0$. Следовательно по лемме уравнение (1) сильно осцилляторно. Теорема 1 доказана.

Если

$$\sum_{i=s}^{\infty} \rho_i^{1-p'} = \infty \tag{16}$$

то

$$B(m,\infty) = \sup_{m<t} \sum_{i=t}^{\infty} \upsilon_i \left(\sum_{i=m}^{t} \rho_i^{1-p'} \right)^{p-1}$$

Поэтому из теоремы 1 имеем.

Следствие 1. Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (16). Тогда уравнение (1)
(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=t}^{\infty} \upsilon_i \left(\sum_{i=m}^{t} \rho_i^{1-p'} \right)^{p-1} = 0;$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=t}^{\infty} \upsilon_i \left(\sum_{i=m}^{t} \rho_i^{1-p'} \right)^{p-1} = \infty.$$

Из теоремы 1 как следствие получаем сильной осцилляторности и неосцилляторности уравнение (2).

Следствие 2. Уравнение (2)
(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{m<t\le s<\infty} \frac{\sum\limits_{i=t}^{s-1} \upsilon_i}{\left(\sum\limits_{i=m}^{t} \rho_i^{-1} \right)^{-1} + \left(\sum\limits_{i=s}^{\infty} \rho_i^{-1} \right)^{-1}} = 0$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{m<t\le s<\infty} \frac{\sum\limits_{i=t}^{s-1} \upsilon_i}{\left(\sum\limits_{i=m}^{t} \rho_i^{-1} \right)^{-1} + \left(\sum\limits_{i=s}^{\infty} \rho_i^{-1} \right)^{-1}} = \infty$$

Пусть

$$\sum_{i=s}^{\infty} \rho_i^{-1} = \infty \tag{17}$$

Следствие 3. Пусть выполнено (17). Уравнение (2)
(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=t}^{\infty} \upsilon_i \left(\sum_{i=m}^{t} \rho_i^{-1} \right) = 0;$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=t}^{\infty}\upsilon_i\left(\sum_{i=m}^{t}\rho_i^{-1}\right)=\infty.$$

Далее, мы предположим, что последовательности $\upsilon=\{\upsilon_i\}$ и $\rho=\{\rho_i\}$ положительные. Тогда на основании принципа взаимности [8] уравнение (1) и взаимное уравнение

$$\Delta\left(\upsilon^{-1}\left|\Delta y_i\right|^{p-2}\Delta y_i\right)+\lambda\rho_i^{-1}\left|y_{i+1}\right|^{p-2}y_{i+1}=0,\ \ i=0,\ 1,\ 2,\ ... \tag{18}$$

одновременно осцилляторно или неосцилляторно.

Применяя принцип взаимности, на основе теоремы 1 и следствие 1, 2 и 3 получаем следующее утверждения.

Теорема 2. Пусть $1<p<\infty$. Тогда уравнение (1)

(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{m<t\le s<\infty}\frac{\sum\limits_{i=t}^{s-1}\rho_i^{-1}}{\left(\sum\limits_{i=m}^{t}\upsilon_i^{p'-1}\right)^{1-p}+\left(\sum\limits_{i=s}^{\infty}\upsilon_i^{p'-1}\right)^{1-p}}=0$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{m<t\le s<\infty}\frac{\sum\limits_{i=t}^{s-1}\rho_i^{-1}}{\left(\sum\limits_{i=m}^{t}\upsilon_i^{p'-1}\right)^{1-p}+\left(\sum\limits_{i=s}^{\infty}\upsilon_i^{p'-1}\right)^{1-p}}=\infty$$

Пусть

$$\sum_{i=s}^{\infty}\upsilon_i^{p'-1}=\infty \tag{19}$$

Следствие 4. Пусть $1<p<\infty$ и выполнено (19). Тогда уравнение (1)

(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=t}^{\infty}\rho_i^{-1}\left(\sum_{i=m}^{t}\upsilon_i^{p'-1}\right)^{p-1}=0;$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=t}^{\infty}\rho_i^{-1}\left(\sum_{i=m}^{t}\upsilon_i^{p'-1}\right)^{p-1}=\infty.$$

Из теоремы 2 и следствие 4 для уравнение (2) имеем.

Следствие 5. Уравнение (2)

(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{m<t\le s<\infty}\frac{\sum\limits_{i=t}^{s-1}\rho_i^{-1}}{\left(\sum\limits_{i=m}^{t}\upsilon_i\right)^{-1}+\left(\sum\limits_{i=s}^{\infty}\upsilon_i\right)^{-1}}=0$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{m<t\le s<\infty}\frac{\sum\limits_{i=t}^{s-1}\rho_i^{-1}}{\left(\sum\limits_{i=m}^{t}\upsilon_i\right)^{-1}+\left(\sum\limits_{i=s}^{\infty}\upsilon_i\right)^{-1}}=\infty$$

Пусть

$$\sum_{i=s}^{\infty}\upsilon_i=\infty \tag{20}$$

Следствие 6. Пусть выполнено (20). Уравнение (2)
(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=t}^{\infty}\rho_i^{-1}\left(\sum_{i=m}^{t}\upsilon_i\right)=0;$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=t}^{\infty}\rho_i^{-1}\left(\sum_{i=m}^{t}\upsilon_i\right)=\infty.$$

Утверждения следствия 1,3,4 и 6 дополняет результаты работы [2].

Пусть минимальный дискретный оператор $L_{\min}$, порожденный разностным выражением

$$l(y)_i=\frac{1}{u_i}\Delta(\rho_i\Delta y_i),\ i\ge 1$$

в пространстве $l_{2,u}$со скалярным произведением $(f,g)_{2,u}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_ig_iu_i$ (т.е.$L_{\min}(y)=l(y)$) является оператором с областью определение

$$D(L_{\min})=\{y=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}:y\in \overset{\circ}{Y}(1,\infty)\}.$$

Известно, что все самосопряженные расширения L минимального оператора имеют подобные спектры, см., [17].

Рассмотрим вопрос ограниченности снизу и дискретности спектра оператора L.

Связь между осцилляторностью уравнения (2) и спектральными свойствами оператора L показано в следующем утверждении.

Лемма 2. [17] Оператор L ограничен снизу и имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда уравнение (2) сильно неосцилляторно.

На основания следствие 2 и 5, имеем

Теорема 3. Пусть последовательности ρ, υ положительные. Тогда оператор L ограничен снизу и имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда выполняются

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{m<t\le s<\infty}\frac{\sum\limits_{i=t}^{s-1}\upsilon_i}{\left(\sum\limits_{i=m}^{t}\rho_i^{-1}\right)^{-1}+\left(\sum\limits_{i=s}^{\infty}\rho_i^{-1}\right)^{-1}}=0$$

или

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{m<t\le s<\infty}\frac{\sum\limits_{i=t}^{s-1}\rho_i^{-1}}{\left(\sum\limits_{i=m}^{t}\upsilon_i\right)^{-1}+\left(\sum\limits_{i=s}^{\infty}\upsilon_i\right)^{-1}}=0$$

4 Заключение

Основной целью работы был получение необходимых и достаточных условии сильной осцилляторности и неосцилляторности двухчленного полулинейного и линейного разностного уравнения второго порядка. Используя ранее полученным результатом по весовому разностному неравенству Харди на множестве финитных последовательностей, и применяя вариационный принцип в теории осцилляции полулинейных разностных уравнений получены критерий сильной осцилляторности и неосцилляторности двухчленного полулинейного и линейного разностного уравнения второго порядка. Как приложение этих результатов получено критерии ограниченности снизу и дискретности спектра одного одно членного дискретного оператора. Здесь предполагалось, что коэффициенты рассматриваемого уравнения неотрицательные последовательности. Методы исследования могуть быть применен, когда один из коэффициентов уравнения меняет свой знак.

5 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проектов Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05130975, 2018-2020 годы)

Список литературы

[1] Rehak P. Oscillatory properties of second order half-linear difference equations // Czech. Math. J. – 2001. – V. 51, No. 126. – P. 303-321.

[2] Алимагамбетова А.З., Ойнаров Р. Критерии осцилляторности и неосцилляторности полулинейного разностного уравнения второго порядка // Математический журнал. – 2007. – Т. 7, № 1 (23). – С. 15-24.

[3] Алимагамбетова А.З., Ойнаров Р. Двухсторонние оценки для решений одного класса нелинейных разностных уравнений второго порядка // Математический журнал. – 2008. – Т. 8, № 3(29). – С. 12-21.

[4] Hasil P., Vesely M. Oscillation constants for half-linear difference equations with coefficients having mean values // Advances in difference equations. – 2015. – V. 2015:20. – doi: http://dx.doi.org/10.11861313662-015-0544-1.

[5] Jiang J., Tang X. Oscillation of second order half-linear difference equations (I) // Applied Math. Sciences. – 2014. – V. 8, No. 40. – P. 1957-1968.

[6] Rehak P. Comparision theorems and strong oscillation in the half-linear discrete oscillation theory // Rocky Mountain J. Math. – 2003. – V. 33, No. 1. – P. 333-352.

[7] Kalybay A., Karatayeva D., Oinarov R., Temirkhanova A. Oscillation of a second order half-linear difference equation and the discrete Hardy inequality // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. – 2017. – No. 43. – P. 1-16. - doi: http://dx.doi.org/10.14232/ejqtde.2017.1.43.

[8] Dosly O., Rehak P. Half-linear differential equations. – North-Holland, Math. Studies, 2005. – V. 202. – 517 p.

[9] Agarwal R.P. Difference equations and inequalities, second ed. // Pure Appl. Math. Dekker. New York. – 2000. – Vol. 228.

[10] Ahlbrand C.D., Peterson A.C. Discrete Hamiltonion Systems: Difference equations, Continued Fractions, and Riccati equations. – Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

[11] Bihari I. An oscillation theorem concerning the half-linear differential equation of the second order // Publ. Math. Ins. Hunger. Acad. Sci. A 8. – 1964. – P. 275–280.

[12] Mirzov J.D. On some analogs of Sturm's and Kneser's theorems for nonlinear systems // J.Math.Anal. Appl. – 1976. – Vol. 53. – P. 418-425.

[13] Elbert A. A half linear second order differential equations // Colloq. Math. Soc. Janos Bolayi. – 1979. – Vol. 30. – P. 158-180.

[14] Sturm C. Sur les equations differentielles lineaires du second ordre // J.Math. Pures. Appl. – 1836. –1. – P. 106-186.

[15] Sansone G. Equazioni diferenziali nel campo reale I, II. – Zanichelli, Bologna, 1949.

[16] Diaz J.I. Nonlinear partial differential equations and free boundaries Vol I. – Elleptic Equations, Pitman, London, 1985.

[17] Глазман Н.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. – М.: Физматгиз, 1963. – 340 с.

[18] Bennett G. Some elementary inequalities // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1987. (2) 38, No. 152. – C. 401-425.

[19] Bennett G. Some elementary inequalities II // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1988. (2) 39, No. 156. – C. 385-400.

[20] Bennett G. Some elementary inequalities III // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1991. (2) 42, No. 166. – C. 149-174.

[21] Oinarov R. and Rakhimova S.Y. Weighted Hardy inequalities and their application to oscillation theory of half-linear differential equation // Eurasian Math. J., Kazakhstan. – 2010. – V.1, No. 42. – P. 110–124.

[22] Oinarov R. and Rakhimova S.Y. Oscillation and nonoscillation of two terms linear and half-linear equations of higher order // E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Hungary. – 2010. – No. 49. – P. 1-15.

[23] Kufner A., Maligranda L. and Persson L-E. The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results // Vydavatelský servis, 2007. – 161 p.

References

[1] Rehak P. "Oscillatory properties of second order half-linear difference equations *Czech. Math. J.* V. 51, No. 126 (2001): 303-321.

[2] Alimagambetova A.Z., Oynarov R. "Kriterii ostsillyatornosti i neostsillyatornosti polulineynogo raznostnogo uravneniya vtorogo poryadka [Oscillator and non-oscillator criteria for a second-order nonlinear difference equation]" , *Matematicheskiy zhurnal* Vol. 7, No 1 (23) (2007): 15-24.

[3] Alimagambetova A.Z., Oynarov R. "Dvuhstoronnie otsenki dlya resheniy odnogo klassa nelineynyih raznostnyih uravneniy vtorogo poryadka [Bilateral estimates for solutions of one class of second-order nonlinear difference equations]" , *Matematicheskiy zhurnal* Vol. 8, No 3(29) (2008): 12-21.

[4] Hasil P., Vesely M. "Oscillation constants for half-linear difference equations with coefficients having mean values"*Advances in difference equations* V. 2015:20 (2015) – doi: http://dx.doi.org/10.11861313662-015-0544-1.

[5] Jiang J., Tang X. "Oscillation of second order half-linear difference equations (I)"*Applied Math. Sciences* V. 8, No. 40 (2014): 1957-1968.

[6] Rehak P. "Comparision theorems and strong oscillation in the half-linear discrete oscillation theory"*Rocky Mountain J. Math.* V. 33, No. 1 (2003): 333-352.

[7] Kalybay A., Karatayeva D., Oinarov R., Temirkhanova A. "Oscillation of a second order half-linear difference equation and the discrete Hardy inequality *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* No. 43 (2017): 1-16. – doi: http://dx.doi.org/10.14232/ejqtde.2017.1.43.

[8] Dosly O., Rehak P. *Half-linear differential equations* V. 202 (North-Holland, Math. Studies, 2005): 517.

[9] Agarwal R.P. "Difference equations and inequalities, second ed."*Pure Appl. Math. Dekker. New York.* Vol. 228 (2000).

[10] Ahlbrand C.D., Peterson A.C. *Discrete Hamiltonion Systems: Difference equations, Continued Fractions, and Riccati equations* (Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996).

[11] Bihari I. "An oscillation theorem concerning the half-linear differential equation of the second order"*Publ. Math. Ins. Hunger. Acad. Sci.* A 8 (1964): 275–280.

[12] Mirzov J.D. "On some analogs of Sturm's and Kneser's theorems for nonlinear systems"*J. Math. Anal. Appl.* Vol. 53 (1976): 418-425.

[13] Elbert A. "A half linear second order differential equations"*Colloq. Math. Soc. Janos Bolayi* Vol. 30 (1979): 158-180.

[14] Sturm C. "Sur les equations differentielles lineaires du second ordre"*J.Math. Pures. Appl.* 1 (1836): 106-186.

[15] Sansone G. *Equazioni diferenziali nel campo reale I, II* (Zanichelli, Bologna, 1949).

[16] Diaz J.I. *Nonlinear partial differential equations and free boundaries Vol I, Elleptic Equations* (Pitman, London, 1985).

[17] Glazman N.M. *Pryamyie metodyi kachestvennogo spektralnogo analiza singulyarnyih differentsialnyih operatorov* [Direct methods for the qualitative spectral analysis of singular differential operators] (M.: Fizmatgiz, 1963): 340.

[18] Bennett G. "Some elementary inequalities"*Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 38, No. 152 (1987): 401-425.

[19] Bennett G. "Some elementary inequalities II"*Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 39, No. 156 (1988): 385-400.

[20] Bennett G. "Some elementary inequalities III"*Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 42, No. 166 (1991): 149-174.

[21] Oinarov R. and Rakhimova S.Y. "Weighted Hardy inequalities and their application to oscillation theory of half-linear differential equation"*Eurasian Math. J., Kazakhstan* V.1, No. 42 (2010): 110–124.

[22] Oinarov R. and Rakhimova S.Y. "Oscillation and nonoscillation of two terms linear and half-linear equations of higher order"*E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Hungary* No. 49 (2010): 1-15.

[23] Kufner A., Maligranda L. and Persson L-E. "The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results *Vydavatelský servis* (2007): 161.