МРНТИ 27.39.21 https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m5

Единственность восстановления граничных условий дифференциального оператора по набору спектров

Кангужин Б.Е., д.ф.-м.н, профессор, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан, E-mail: kanbalta@mail.ru

Даирбаева Г., к.ф.-м.н., доцент, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, E-mail: lazat.dairbayeva@gmail.com

Мадибайулы Ж., докторант, Институт механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова, г. Алматы, Казахстан, E-mail: zhumabaymadibaiuly@gmail.com

В данной работе приведена постановка обратной задачи восстановления краевых условий дифференциального оператора четвертого порядка на конечном отрезке по набору спектров четырех родственных операторов. Доказана теорема единственности восстановления граничных функций по набору спектров четырех родственных операторов. Фиксированное линейное дифференциальное выражение четвертого порядка рассматривается с произвольными усиленно регулярными двухточечными граничными условиями. Считается, что об этом операторе известна полная информация о собственных значениях и собственных функциях. Дальше поочередно возмущаем граничные условия. Сначала только к первому краевому условию добавляется интегральное возмущение. Затем возмущаем интегральными членами первое и второе краевые условия. Так строятся четыре родственные краевые задачи. Обратная задача заключается в том, чтобы по четырем спектрам родственных краевых задач восстановить добавленные интегральные возмущения граничных условий. Доказана однозначность восстановления интегральных возмущений. Отметим, что интегральные возмущения могут содержать производные решений. Однако на порядок производной накладываются естественные ограничения. В случае многоточечных краевых задач результаты работы значительно упрощаются.

Ключевые слова: Граничные условия, корректное сужение, корректное суженое, интегральное возмущение.

Дифференциалдық оператордың спектрлар жиынтығы бойынша шектік шарттарды қалпына келтірудің жалғыздығы

Кангужин Б.Е., ф.-м.ғ.д., профессор, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: kanbalta@mail.ru

Даирбаева Г., ф.-м.ғ.к., доцент, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: lazat.dairbayeva@gmail.com

Мәдібайұлы Ж., докторант, Академик Ө.А. Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институты, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: zhumabaymadibaiuly@gmail.com

Бұл жұмыста төртінші ретті дифференциалдық оператордың ақырлы кесіндідегі туыстас төрт спектр жиынтығы бойынша шекаралық шарттарды қалпына келтірудің кері есебінің қойылымы келтірілді. Төрт байланысты оператордың спектрлер жиынтығынан шекаралық функцияларды қалпына келтірудің бірегейлігі туралы теорема дәлелденді. Туыстас төрт операторлардың жиынтығы бойынша шекаралық функцияның қалпына келтіруінің жалғыздық теоремасы дәлелденеді. Төртінші ретті белгіленген сызықты дифференциалдық өрнек ерікті қаркынды тұрақты екі нүктелі шекаралық шарттармен қарастырылады. Бұл оператор туралы барлық мәліметтер меншікті мәндері мен меншікті функциялары белгілі. Содан кейін біз кезек-кезек шекара шарттарын бұзамыз. Біріншіден, интегралды бұзылу тек бірінші шекаралық шартқа қосылады. Содан кейін интералдық мүшелермен бірінші және екінші шекаралық шарттарды бұзамыз. Осылайша төрт туыстас шекаралық шарттар құрылады. Кері есептің мәні төрт спектр туыстас шекаралық есеп арқылы шекаралық шарттардың интегралдық бұзылуынан қалпына келтіру. Интегралдық бұзылулардың ішінде туындылы шешімдері

болатынын атап өткеніміз жөн. Дегенмен туындының ретіне табиғи түрде шектеу қойылады. Көпнүктелі шекаралық есептің жағдайындағы жұмыстың нәтижесі біршама жеңілдетіледі.
Түйін сөздер: Шекаралық шарттар, дұрыс тарылту, дұрыс тарылту, интегралдық бұзылу.

Uniqueness of the restoration of boundary conditions differential operator on a set of spectra

Kanguzhin B.E., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, E-mail: kanbalta@mail.ru
Dairbayeva G., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent,
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, E-mail: lazat.dairbayeva@gmail.com
Madibaiuly Zh., doctoral student, Institute of Mechanics and Mechanical Engineering named after Academician U.A. Zholdasbekov, Almaty, Kazakhstan, E-mail: zhumabaymadibaiuly@gmail.com

In this paper, we pose the inverse problem of reconstructing the boundary conditions of a fourth-order differential operator on a finite interval from the set of spectra of four related operators. The uniqueness theorem for the restoration of boundary functions from the set of spectra of four related operators is proved. A fourth-order fixed linear differential expression is considered with arbitrary intensely regular two-point boundary conditions. It is believed that complete information about eigenvalues and eigenfunctions is known about this operator. Then we alternately perturb the boundary conditions. First, an integral perturbation is added only to the first boundary condition. Then we perturb the first and second boundary conditions with integral terms. Thus, four related boundary value problems are constructed. The inverse problem is to reconstruct the added integral perturbations of the boundary conditions from the four spectra of related boundary value problems. The uniqueness of the restoration of integral perturbations is proved. Note that integral perturbations may contain derivatives of solutions. However, the order of the derivative is subject to natural restrictions. In the case of multipoint boundary value problems, the results are greatly simplified.
Key words: Boundary conditions, correct narrowing, correct narrowin, integral disturbance.

1 Введение и обзор литературы

Задача восстановления граничных условий дифференциального оператора по набору спектров относится к обратным задачам спектрального анализа. Истоки указанного научного направления определяются основополагающей работой И.М.Гельфанда, Б.М. Левитана [1]. В их постановке восстановление дифференциального оператора происходило по спектральной функции оператора. В дальнейшем вместо спектральной функции оператора изучались задачи восстановления дифференциального оператора второго порядка по двум спектрам. Наиболее продвинутые результаты в этом направлении можно найти в обзорной статье Б.М. Левитана, М.Г. Гасымова [2]. Подобный подход для дифференциальных операторов высших порядков можно найти в работах З.Л. Лейбензона [3] и В.А. Юрко [4]. В частности, результаты З.Л. Лейбензона касаются дифференциальных операторов высших порядков с не распадающимися краевыми условиями. В то же время исследования В. А. Юрко охватывают случай не распадающихся граничных условий. Несколько с иных позиции обратные задачи спектрального анализа для дифференциальных операторов второго порядка с не распадающимися граничными условиями рассматривал В.А. Садовничий [5].

В настоящей работе изучается вопрос восстановления дифференциальных операторов с интегро-дифференциальными условиями по некоторому набору спектров. Вообще говоря, в таком случае восстановление оператора соответствует однозначному нахождению как коэффициентов дифференциального выражения, так и определению функций, входящих в граничные условия. Однако в данной работе восстанавливаются только граничные коэффициенты. При этом считаем, что коэффициенты дифференциального выражения заданы. Поэтому изучаемые в данной работе проблемы относятся к восстановлению граничных условий оператора при заданном дифференциальном выражений, порождающий искомый оператор. Абстрактная постановка подобной проблемы сформулирована в работе авторов [6]. Ниже в данной статье сохраняются обозначения работы [6].

2 Материал и методы

2.1 Вспомогательные предложения и обозначения

В данном пункте напомним постановку задачи восстановления граничных условий и некоторые предложения из работы [6] переформируем в удобной для дальнейшего форме.

В функциональном пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим оператор $B_{\max}$, порожденный линейным дифференциальным выражением четвертого порядка с гладкими коэффициентами

$$l(y) \equiv y^{(4)}(x) + \sum_{k=0}^{2} p_k(x) y^{(k)}(x)$$

по формуле $B_{\max} y(x) = l(y)$ на области определения $D(B_{\max}) = W_2^4[0,1]$. Заметим, что $Ran(B_{\max}) = L_2(0,1)$ и $\dim(Ker(B_{\max})) = 4$. По теореме Михайлова-Кесельмана [7, 8] существует набор двухточечных граничных условий вида

$$U_j(y) = \alpha_j y^{(\gamma_j)}(0) + \beta_j y^{(\gamma_j)}(1) = 0, \ j = 1, \ldots, 4$$

таких, что если выбрать область определения оператора S_U (который представляет сужение $B_{\max}$) в виде

$$D(S_U) = \{y \in W_2^n[0,1] : U_j(y) = \alpha_j y^{(\gamma_j)}(0) + \beta_j y^{(\gamma_j)}(1) = 0, \quad j = 1, \ldots, 4\}$$

то система корневых функций оператора S_U образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. В дальнейшем считаем, что набор форм $\{U_j\}$ фиксирован и выбран по Михайлову-Кесельману. А.А. Шкаликов [9] заметил, что сужение S_V сохраняет свойство базисности, если набор форм $\{U_j\}$ заменить на другой набор форм $\{V_j\}$ где

$$V_j(y) = U_j(y) + \sum_{k=0}^{\gamma_j - 1} (\alpha_{jk} y^{(k)}(0) + \beta_{jk} y^{(k)}(1)) + \sum_{k=0}^{\gamma_j} \int_0^1 y^{(k)}(t) \sigma_{jk}(t) dt$$

Всюду будем предполагать, что S_V – сужение максимального оператора $B_{\max}$ является ограниченно обратимым в пространстве $L_2(0,1)$.

В следующей теореме набор граничных форм $\{V_j\}$ заменен на другой эквивалентный набор форм.

Теорема 1 *Область определения*

$$D(S_V) = \left\{y \in W_2^2[0,1] : V_j(y) = 0, \quad j = 1, \ldots, 4\right\}$$

оператора S_V может быть записана в виде

$$D(S_V) = \left\{ y \in W_2^2[0,1] : U_j(y) + \int_0^1 \sigma_j(t) l(y) dt = 0, \quad j = 1, \ldots, 4 \right\}$$

Детали доказательства теоремы 1 можно найти в работе [6]. Для дальнейших целей удобно операторы S_U и S_V переобозначить через S_0 и S_4, а также ввести операторы S_1, S_2, S_3. Оператор S_k вводится по формуле

$$S_k y(x) = B_{\max} y(x)$$

$$U_j(y) + \int_0^1 \sigma_j(t) B_{\max} y(t) dt = 0, \quad j = 1, \ldots, k$$

$$U_j(y) = 0, \quad j = k+1, \ldots, 4$$

Согласно работе [6] вытекает следующая постановка задачи: по максимальному оператору $B_{\max}$, граничным формам $\{U_j\}$ и набору спектров $\{\sigma(S_k),\ k = 1, \ldots, 4$ операторов $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ требуется восстановить граничные функций $\{\sigma_1(t),\ \sigma_2(t),\ \sigma_3(t),\ \sigma_4(t)\}$.

2.2 Основной результат

В данном пункте сформулирован и доказан основной результат данной статьи. Для этого удобно операторы S_1, S_2, S_3, S_4 обозначать через $S_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, $S_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, $S_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, $S_4(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$.

Теорема 2 *Пусть имеются два набора граничных функций $\{\sigma_1(t),\ \sigma_2(t),\ \sigma_3(t),\ \sigma_4(t)\}$ и $\{\tau_1(t),\ \tau_2(t),\ \tau_3(t),\ \tau_4(t)\}$, удовлетворяющих условиям теоремы 1 из работы [6]. Пусть спектры операторов $S_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ и $S_i(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ при $i = 1, 2, 3, 4$ попарно совпадают. Тогда справедливы равенства $\sigma_i(t) = \tau_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ при почти всех $t \in (0, 1)$.*

Для доказательства теоремы 2 удобно сформулировать следующие следствия из нее.

Следствие 1 *Пусть имеются два набора граничных функций $\{\sigma_1(t),\ \sigma_2(t),\ \sigma_3(t),\ \sigma_4(t)\}$ и $\{\tau_1(t),\ \tau_2(t),\ \tau_3(t),\ \tau_4(t)\}$, удовлетворяющих условиям теоремы 1 из работы [6]. Фиксируем k из множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Пусть спектры операторов $S_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ и $S_i(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ при $i = 1, \ldots, k$ попарно совпадают. Тогда справедливы равенства $\sigma_i(t) = \tau_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$ при почти всех $t \in (0, 1)$.*

Достаточно доказать следствие при $k = 1$. При других k доказывается по индукции.

Доказательство следствия при $k = 1$. Сначала напомним известные свойства указанных операторов S_1, S_0. Граничные условия

$$U_j(y) = \alpha_j y^{(\gamma_j)}(0) + \beta_j y^{(\gamma_j)}(1) = 0, \quad j = 1, \ldots, 4,$$

выбранные согласно теореме Михайлова-Кесельмана, часто называют усиленно-регулярными граничными условиями [7, 8]. Поэтому собственные значения оператора S_0 асимптотически простые и отделены [10], то есть найдется положительное число δ при котором любые два собственных значения оператора S_0 отстоят друг от друга на расстояние больше чем δ. Также из работ [7, 8] следует, что система собственных и присоединенных функций оператора S_0 образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Заметим, что оператор S_1 обладает теми же свойствами, что и оператор S_0. Обозначим целую функцию $\Delta_0(\lambda)$, нули которой однозначно с учетом кратностей определяют собственные значения оператора S_0. Детали можно найти в монографии [10]. Введем решение однородного уравнения

$$l(y) = \lambda\ y$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$U_j(y) = \alpha_j y^{(\gamma_j)}(0) + \beta_j y^{(\gamma_j)}(1) = 0, \quad j = 2, \dots, 4,$$

$$\alpha_1 y^{(\gamma_1)}(0) + \beta_1 y^{(\gamma_1)}(1) = \Delta_0(\lambda)$$

и обозначим такое решение через $\Theta_1(x,\lambda)$. Пусть λ_1 простое собственное значение оператора S_1. Тогда $\Theta_1(x,\lambda_1)$ представляет собственную функцию оператора S_1 соответствующую собственному значению λ_1. Поскольку λ_1 собственное значение оператора S_1, то

$$U_1(\Theta_1(x,\lambda_1)) + \int\limits_0^1 \sigma_1(t) l(\Theta_1(x,\lambda_1)) dt = 0$$

С другой стороны, имеем равенство $l(\Theta_1(x,\lambda_1)) = \lambda_1 \Theta_1(x,\lambda_1)$. Следовательно, можем записать соотношение

$$U_1(\Theta_1(x,\lambda_1)) + \lambda_1 \int\limits_0^1 \sigma_1(t) \Theta_1(x,\lambda_1) dt = 0$$

Таким образом, находим один из коэффициентов Фурье функции $\sigma_1(t)$ по системе корневых функций сопряженного оператора S_1^* к оператору S_1. Поскольку система корневых функций образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$, то функция $\sigma_1(t)$ по полному набору ее коэффициентов Фурье восстанавливается однозначно. Так как коэффициенты Фурье функции $\sigma_1(t)$ и $\tau_1(t)$ совпадают между собой, то $\sigma_1(t) = \tau_1(t)$ почти всюду. Следствие при $k = 1$ полностью доказано.

3 Заключение

Результаты данной статьи сформулированы для случая оператора четвертого порядка. Однако все результаты справедливы для произвольных операторов высших порядков.

При гладких $\{\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t), \sigma_4(t)\}$ предлагаемые граничные возмущения охватывают многоточечные краевые задачи. В отдельной работе будет изучено восстановление многоточечных граничных условий. Приведем численное восстановление многоточечных граничных условий.

Список литературы

[1] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – 15:4. – С. 309-360.

[2] Левитан Б.М., Гасымов М.Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам // УМН. – 1964. – 19:2(116). – С. 3-63.

[3] Лейбензон З.Л. Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Тр. ММО. – 1966. – 15. – С. 70-144

[4] Юрко В.А. Восстановление дифференциальных операторов высших порядков // Дифференц. уравнения. – 1989. – 25:9. – С. 1540-1550

[5] Садовничий В.А. Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися краевыми условиями. Регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя // Докл. АН СССР. – 1972. – 206:2. – С. 293-296

[6] Кангужин Б.Е, Даирбаева Г., Мадибайулы Ж. Идентификация граничных условий дифференциального оператора // Вестник КазНУ, серия математика. – 2019. – № 3 (103). – С. 13-18

[7] Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L_2(0;1)$ // Докл. АН СССР. – 1962. – 144, № 5. – С. 981-984.

[8] Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов СССР. Математика. – 1964. – № 2. – С. 82-93.

[9] Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. Мат. Мех. – 1982. – № 6. – С. 12-21.

[10] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.

References

[1] Gelfand I.M., Levitan B.M., "Ob opredelenii differentsialnogo uravneniya po ego spektralnoy funktsii [On the definition of a differential equation by its spectral function]", *Izv. AN SSSR. Ser. matem.* 15:4 (1951): 309–360.

[2] Levitan B.M., Gasyimov M.G., "Opredelenie differentsialnogo uravneniya po dvum spektram [Determination of a differential equation by two spectra]", *UMN* 19:2 (116) (1964): 3–63.

[3] Leybenzon Z.L., "Obratnaya zadacha spektralnogo analiza obyiknovennyih differentsialnyih operatorov vyisshih poryadkov [The inverse problem of spectral analysis of ordinary differential operators of higher orders]", *Tr. MMO* 15 (1966): 70–144

[4] Yurko V.A., "Vosstanovlenie differentsialnyih operatorov vyisshih poryadkov [Recovering differential operators of higher orders]", *Differents. uravneniya* 25:9 (1989): 1540–1550.

[5] Sadovnichiy V.A., "Edinstvennost resheniya obratnoy zadachi v sluchae uravneniya vtorogo poryadka s neraspadayuschimisya kraevyimi usloviyami. Regulyarizovannyie summyi chasti sobstvennyih chisel. Faktorizatsiya harakteristicheskogo opredelitelya [The uniqueness of the solution of the inverse problem in the case of a second-order equation with non-decaying boundary conditions. The regularized sums of a part of the eigenvalues. Factorization of the characteristic determinant]", *Dokl. AN SSSR* 206:2 (1972): 293–296

[6] Kanguzhin B.E, Dairbaeva G., Madibayulyi Zh., "Identifikatsiya granichnyih usloviy differentsialnogo operatora [Identification of boundary conditions of a differential operator]", *Vestnik KazNU, seriya matematika* No 3 (103) (2019): 13-18

[7] Mikhailov V.P., "O bazisah Rissa v L2(0; 1) [On the basis of Riesz in $L_2(0;1)$], *Docl. USSR Academy of Sciences* 144, No 5 (1962): 981-984.

[8] Keselman G.M., "O bezuslovnoj shodimosti razlozhenij po sobstvennym funkciyam nekotoryh differencialnyh operatorov [On the unconditional convergence of eigenfunction expansions of some differential equations operators]", *Iz. VUZ USSR. Mathematics* No 2 (1964): 82-93.

[9] Shkalikov A.A., "O bazisnosti sobstvennyh funkcij obyknovennyh differencialnyh operatorov s integralnymi kraevymi usloviyami [On the basis of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions]", *Westn. Moscow State University. Ser. Math. Mech.* No 6 (1982): 12-21.

[10] Naymark M.A., *Lineinye differentsial'nye operatory* (M.: Nauka, 1969).