МРНТИ 27.33.15; 27.31.44 https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m6

[1]М.Т. Космакова, [2]Л.Ж. Касымова

[1]PhD, доцент, E-mail: svetlanamir578@gmail.com
[2]докторант PhD, E-mail: l.kasymova2017@mail.ru
Карагандинский государственный университет имени академика Е.А. Букетова,
г. Караганды, Казахстан

К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДРОБНОЙ НАГРУЗКОЙ

Аннотация.В работе исследуются проблемы разрешимости неоднородной краевой задачи в первом квадранте для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что, во-первых, нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной Капуто по временной переменной, во-вторых, порядок производной в нагруженном слагаемом меньше порядка дифференциальной части и, в-третьих, точка нагрузки является движущейся (с постоянной или переменной скоростями). Обращением дифференциальной части задача сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, ядро которого содержит функцию параболического цилиндра. Произведена оценка ядра полученного интегрального уравнения и показано, что ядро уравнения имеет слабую особенность (при определенных ограничениях на нагрузку), что является основанием для утверждения, что нагруженное слагаемое в уравнении является слабым возмущением его дифференциальной части. Кроме того, исследованы предельные случаи порядка дробной производной. Доказано, что по порядку дробной производной имеет место непрерывность справа. Непрерывность слева нарушается. Результаты статьи могут оказаться полезными при исследовании дробно-нагруженных уравнений теплопроводности в случае, когда нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной Капуто по пространственной переменной.
Ключевые слова: нагрузка, дробная производная, уравнение Вольтерра.

[1]М.Т.Космакова, [2]Л.Ж.Қасымова
[1]PhD, доцент, E-mail: svetlanamir578@gmail.com
[2]PhD студентті, E-mail: l.kasymova2017@mail.ru
Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қарағанды қ., Қазақстан

Бөлшек жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуінің шешуіне әкелу

Аңдатпа. Жұмыста бірінші квадранттағы бөлшек-жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін біртекті емес шеттік есептің шешу мәселес
и зерттеледі. Қарастырылатын есептің ерекшелігі, біріншіден, жүктелген қосылғыш уақыт айнымалысы бойынша Капуто бөлшек туындысы түріне келтірілген, екіншіден, жүктелген қосылғыштағы туындының реті дифференциалды бөліктің ретінен кіші, үшіншіден, жүктеме нүктесі қозғалмалы болады (тұрақты немесе айнымалы жылдымдықтармен). Есеп ядросы параболалық цилиндрді қамтитын функция болатын екінші текті Вольтерр интегралдық теңдеуіне дифференциалдық бөлікті айналдыру арқылы келтіріледі. Алынған интегралдық теңдеудің ядросы бағаланды және теңдеу ядросының аз ерекшелігі бары көрсетілді (жүктемеге белгілі бір шектеулерде), осы жағдай негізінде теңдеудегі жүктелген қосылғыш оның дифференциалдық бөлігінің әлсіз ауытқуы болып табылады деп тұжырым жасауға болады. Сонымен қоса, бөлшек туындының ретінің шектік жағдайлары зерттелді. Бөлшек туындының реті бойынша оң жақты үздіксіздік орын алатыны дәлелденді. Солжақты үздіксіздік бұзылады. Мақала нәтижелерін жүктелген қосылғыш Капуто кеңістіктік айнымалы бойынша бөлшекті туындысы түрінде берілген жағдайда жылуөткізгіштіктің бөлшек-жүктелген теңдеулерін зерттеуде қолдануға болады.
Түйін сөздер: жүктеме, бөлшек туынды, Вольтерра теңдеуі.

[1] M.T.Kosmakova, [2]L.Zh.Kasymova
[1]PhD, docent, svetlanamir578@gmail.com
[2]PhD doctoral student, l.kasymova2017@mail.ru
E. A. Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan

To solving the heat equation with fractional load

Abstract. In the paper, the solvability problems of an nonhomogeneous boundary value problem in the first quadrant for a fractionally loaded heat equation are studied. Feature of this problem is that, firstly, the loaded term is presented in the form of the Caputo fractional derivative with respect to the time variable, secondly, the order of the derivative in the loaded term is less than the order of the differential part and, thirdly, the point of load is moving (with constant or variable velocity). By inverting the differential part, the problem is reduced to the Volterra integral equation of the second kind, the kernel of which contains the function of a parabolic cylinder. The kernel of the obtained integral equation is estimated and it is shown that the kernel of the equation has a weak singularity (under certain restrictions on the load), this is the basis for the statement that the loaded term in the equation is a weak perturbation of its differential part. In addition, the limiting cases of the order of the fractional derivative are considered. It is proved that there is continuity on the right in the order of the fractional derivative. Continuity on the left is broken. The results of the paper may turn out to be useful in the study of fractionally loaded heat equations in the case, when the loaded term is presented in the form of a Caputo fractional derivative with respect to the spatial variable.
Key words: load, fractional derivative, Volterra equation.

1 Введение

Неослабевающий интерес к изучению нагруженных дифференциальных уравнений объясняется как расширяющимся объемом их приложений, так и тем фактом, что нагруженные уравнения составляют особый класс уравнений со своими специфическими задачами. Наиболее общее определение нагруженного уравнения впервые было дано А.М. Нахушевым [1] - [3]. В монографии [1] им даются понятия и подробная классификация различных нагруженных уравнений: нагруженных дифференциальных, нагруженных интегральных, нагруженных интегро-дифференциальных, нагруженных функциональных уравнений, и их многочисленные приложения и к задачам биологии.

Исследование обобщенной разрешимости неоднородных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений в соболевских пространствах проводилось в работах [4] -[5]. Помимо этого, в работах [4, 6] приводится обзор по нагруженным уравнениям. В монографии [7] исследуются граничные задачи для нагруженного оператора теплопроводности в ограниченной и неограниченной областях, когда порядок производной в нагруженном слагаемом равен или выше порядка дифференциальной части уравнения.

2 Обзор литературы

На сегодняшний день наблюдается бурное развитие дробного исчисления как в теоретическом плане, так и в его применениях. Данный раздел математического анализа превратился в инструмент математического моделирования сложнейших динамических процессов в различных (обычных и фрактальных) средах. С помощью дробного исчисления сегодня возможно решать различные задачи анализа, синтеза, диагностики и создания новых систем управления.

В последние годы возрос интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция содержится под знаком производной дробного порядка. Это обусловлено как развитием самой теории дробного интегрирования и дифференцирования, так и приложениями аппарата дробного интегрирования и дифференцирования в различных областях науки [8] – [13].

Некоторыми авторами [14] – [15] исследованы нагруженные дифференциальные уравнения, которые содержат дробные производные от следов искомой функции по временной переменной, но порядок производной в нагруженном слагаемом строго меньше соответствующего порядка дифференциальной части уравнения и точка нагрузки фиксирована, то есть, неподвижна.

Для практических приложений является значительным определение производных нецелого порядка по Капуто. Оно отличается от определения Римана-Лиувилля тем, что функция сначала подвергается дифференцированию с наименьшим целым порядком, превышающим некоторый нецелый порядок, а затем результат интегрируется с порядка, являющимся их разностью.

Интерес представляют краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности, когда нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной Капуто [16] – [17]:

$$c\,D^{\beta}_{a,\,t}\,f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int_0^t\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}}d\tau;\ \ \beta,\,a\in\Re,\ \ n-1<\beta<n.$$

при $a=0$ и $n=1$, поэтому $0<\beta<1$, то есть

$$c\,D^{\beta}_{0,\,t}\,f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t\frac{f^{/}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}d\tau.$$

и точка нагрузки движется с переменной скоростью.

3 Материал и методы

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу в области: $Q=\{x>0,\ t>0\}$

$$u_t-u_{xx}+\lambda\left\{D^{\beta}_{0,\,t}\,u(x,\,t)\right\}\Big|_{x=\alpha(t)}=f(x,\,t), \tag{1}$$

$$u(x,\,0)=0;\ \ u(0,\,t)=0;\ \ 0<\beta<1, \tag{2}$$

Введем обозначение

$$\left\{D^{\beta}_{0,\,t}\,u(x,\,t)\right\}\Big|_{x=\alpha(t)}=\frac{1}{\Gamma\,(1-\beta)}\left\{\int_0^t\frac{u^{/}_{\tau}\,(x,\,\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}\;d\tau\right\}\Bigg|_{x=\alpha(t)}=\mu(\tau). \tag{3}$$

3.2 Сведение задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

Обратим дифференциальную часть задачи (1)-(2) [18, с.57]

$$u(x,\ t) = -\lambda \int_0^t \int_0^\infty G(x,\,\xi,\,t-\tau)\,\mu(\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x,\,\xi,\,t-\tau) f(\xi,\,\tau)\,d\xi d\tau,$$

где

$$G(x,\,\xi,\,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\,t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t} \right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t} \right) \right\}$$

.

С учетом соотношения

$$\int_0^\infty G(x,\,\xi,\,t-\tau)\ d\xi\ = erf\ \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right)$$

получим следующие представление решение задачи (1)-(2):

$$u(x,\,t) = -\lambda \int_0^t erf \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right)\ \mu(\tau)\ d\tau + f_1\ (x,\,t)\,, \tag{4}$$

где

$$f_1(x,\,t) = \int_0^t \int_0^\infty G\,(x,\,\xi,\,t-\tau)\ f(\xi,\,\tau) d\xi d\tau.$$

Для нахождение неизвестной функции $\mu(t)$ произведем следующую процедуру: возьмём по формуле (*) производную порядка β по переменной t в обеих частях соотношения (4) и положим затем $E = \alpha(t)$. Тогда с учётом (3) имеем,

$$\mu(t) = -\lambda \left\{ D^\beta_{0,\,t} \left[\int_0^t erf\ \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \mu(\tau)\ \mathrm{d}\tau \right] \right\} \Bigg|_{\mathrm{x}=\alpha(\mathrm{t})} + f_2(t), \tag{5}$$

где

$$f_2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{f^{/}_{1\tau}(x,\ \tau)}{(t-\tau)^\beta}\,d\tau \Bigg|_{x=\alpha(t)}. \tag{6}$$

Вычислим дробную производную

$$D^\beta_{0,\,t} \left[\int_0^t erf\ \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \mu(\tau)\,d\tau \right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\beta} \left[\frac{\partial}{\partial\tau} \int_0^\tau erf\ \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau-\eta}} \right)\ \mu(\eta) d\eta \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\beta} \left[\mu\,(\tau) + \int_0^\tau \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{E^2}{4(\tau-\eta)}} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(\tau-\eta)^{\frac{3}{2}}} \right)\ \mu(\eta) d\eta \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{x}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \mu(\eta) \left\{ \int_\eta^t \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-\eta)}\right)}{2\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^\beta \cdot (\tau-\eta)^{\frac{3}{2}}} d\tau \right\} d\eta.$$

$$\Rightarrow D_{0,t}^\beta \left[\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau)\, d\tau \right] = \\ = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{x}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \mu(\eta) I(t,\, \beta,\, \eta)\, d\tau, \tag{7}$$

где

$$I(t,\,\beta,\,\eta) = \int_\eta^t \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-\eta)}\right)}{2\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^\beta\,(\tau-\eta)^{\frac{3}{2}}} d\tau = \left\| \begin{array}{l} z = \dfrac{\tau-\eta}{t-\tau};\ zt - z\tau = \tau - \eta;\ \tau = \dfrac{zt+\eta}{1+z}; \\ t - \tau = t - \dfrac{zt+\eta}{1+z} = \dfrac{t + zt - zt - \eta}{1+z} = \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} = \dfrac{t-\eta}{1+z} \Rightarrow t - \tau = \dfrac{t-\eta}{1+z};\ \tau - \eta = \dfrac{zt+\eta}{1+z} - \eta = \dfrac{z(t-\eta)}{1+z} \Rightarrow \tau - \eta = \dfrac{z(t-\eta)}{1+z}; \\ d\tau = \dfrac{t(1+z) - zt - \eta}{(1+z)^2} dz = \dfrac{(t-\eta)}{(1+z)^2} dz,\ \ \tau \to \eta \Rightarrow z = 0,\ \tau \to t \Rightarrow z \to +\infty \end{array} \right\|.$$

$$I(t,\,\beta,\,\eta) = \int_0^{+\infty} \frac{(1+z)^\beta\,(1+z)^{\frac{3}{2}}\,(t-\eta)}{2\sqrt{\pi}\,(t-\eta)^\beta\, z^{\frac{3}{2}}\,(\tau-\eta)^{\frac{3}{2}} \cdot (1+z)^2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\,(t-\eta)} \cdot \frac{1+z}{z}\right) dz =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(t-\eta)^{\beta+\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\,(t-\eta)}\right) \cdot \int_0^{+\infty} z^{-\frac{3}{2}}\,(1+z)^{\beta-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\,(t-\eta)} \cdot \frac{1}{z}\right) dz.$$

Итак,

$$I(t,\,\beta,\,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,(t-\eta)^{\beta+\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\,(t-\eta)}\right) \cdot J(t,\,\beta,\,\eta), \tag{8}$$

где

$$J(t;\,\beta;\,\eta) = \int_0^{+\infty} z^{-\frac{3}{2}}\,(1+z)^{\beta-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)} \cdot \frac{1}{z}\right) dz = \left\| u = \frac{1}{z};\ du = -\frac{dz}{z^2} \right\| =$$

$$= \int_0^{+\infty} u^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{\beta-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)} \cdot u\right) \frac{du}{u^2} =$$

$$= \int_0^{+\infty} (u+1)^{\beta-\frac{1}{2}} \cdot u^{-\beta} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)} \cdot u\right) du$$

. Используем формулу 2.3.6 (12) из [19, стр.262]:

$$\left\| \begin{array}{l} \int_0^\infty x^{\alpha-1}\,(x+z)^{\pm\frac{1}{2}-\alpha}\, e^{-px} dx = 2^\alpha \cdot (2\pi)\, \gamma^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha)\, e^{\frac{pz}{2}} \cdot D_{1-2\alpha}\left(\sqrt{2pz}\right); \\ \alpha - 1 = -\beta\ \ \Rightarrow\ \ \alpha = 1 - \beta;\ z = 1;\ \pm\frac{1}{2} - \alpha = \beta - \frac{1}{2} \Rightarrow \pm\frac{1}{2} - 1 + \beta = \beta - \frac{1}{2}; \\ Re\,\alpha = Re\ (1-\beta) > 0,\ \ 0 < \beta < 1, \\ Re\,p = Re\,\frac{x^2}{4(t-\eta)} > 0;\ \ |\arg\,z| = 0 < \pi \end{array} \right\|$$

Тогда

$$J(t;\,\beta;\,\eta)=2^{1-\beta}\Gamma\left(1-\beta\right)\cdot\exp\left(\frac{x^2}{8\left(t-\eta\right)}\right)\cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2\left(t-\eta\right)}}\right)\cdot\left(2\cdot\frac{x^2}{4\left(t-\eta\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=2^{\frac{3}{2}-\beta}\cdot\frac{\Gamma\left(1-\beta\right)}{x}\cdot\sqrt{t-\eta}\exp\left(\frac{x^2}{8\left(t-\eta\right)}\right)\cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2\left(t-\eta\right)}}\right)\Rightarrow$$

$$J(t;\,\beta;\,\eta)=2^{\frac{3}{2}-\beta}\Gamma\left(1-\beta\right)\cdot\frac{\sqrt{t-\eta}}{x}\exp\left(\frac{x^2}{8(t-\eta)}\right)\cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2(t-\eta)}}\right).\tag{9}$$

Подставив выражение (9) в (8), получим

$$I(t;\,\beta;\,\eta)=\frac{2^{\frac{3}{2}-\beta}\cdot(t-\eta)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}\cdot(t-\eta)^{\beta+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\Gamma\left(1-\beta\right)}{x}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}+\frac{x^2}{8(t-\eta)}\right)\cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2(t-\eta)}}\right)=$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{2}-\beta}\,\Gamma\left(1-\beta\right)}{\sqrt{\pi}\cdot x\left(t-\eta\right)^{\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{8(t-\eta)}\right)\cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2(t-\eta)}}\right),\tag{10}$$

где $D_p(z)-$функция параболического цилиндра.

Далее (7) с учетом (10) примет вид:

$$D_{0,\,t}^{\beta}\left[\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\cdot\mu\left(\tau\right)d\tau\right]=\frac{1}{\Gamma\left(1-\beta\right)}\cdot\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{\left(t-\tau\right)^{\beta}}d\tau-$$

$$-\frac{x}{\Gamma\left(1-\beta\right)}\int_0^t\mu(\tau)\cdot\frac{2^{\frac{1}{2}-\beta}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(1-\beta\right)}{x\left(t-\eta\right)^{\beta}}\exp\left(-\frac{x^2}{8(t-\tau)}\right)D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(1-\beta\right)}\cdot\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{\left(t-\tau\right)^{\beta}}d\tau-\frac{2^{\frac{1}{2}-\beta}}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\left(t-\tau\right)^{\beta}}\exp\left(-\frac{x^2}{8(t-\tau)}\right)D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right)\mu\left(\tau\right)$$

. Окончательно получим

$$D_{0,\,t}^{\beta}\left[\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\cdot\mu\left(\tau\right)d\tau\right]=\frac{1}{\Gamma\left(1-\beta\right)}\cdot\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{\left(t-\tau\right)^{\beta}}d\tau-\int_0^t K(t,\,\tau)\mu(\tau)d\tau,\tag{11}$$

где

$$K(t,\,\tau)=\frac{2^{\frac{1}{2}-\beta}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\left(t-\tau\right)^{\beta}}\exp\left(-\frac{x^2}{8\left(t-\tau\right)}\right)\cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right)$$

. Тогда с учетом (11) уравнение (5) примет вид интегрального уравнения Вольтерра

$$\mu(t)+\frac{\lambda}{\Gamma\left(1-\beta\right)}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{\left(t-\tau\right)^{\beta}}d\tau-\lambda\int_0^t K_{\beta}\left(t,\,\tau\right)\,\mu\left(\tau\right)\,d\tau=f_2\left(t\right),\tag{12}$$

где ядро имеет вид

$$K_\beta\,(t,\,\tau)=\frac{1}{2^\beta}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^\beta}\cdot\exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{8\,(t-\tau)}\right)\cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right),\tag{13}$$

$$|0<\beta<1\Rightarrow -1<2\beta-1<1|$$

. Здесь [20]:

$$D_p\,(z)=2^{\frac{p}{2}}\,e^{-\frac{z^2}{4}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)}\,\Phi\left(-\frac{p}{2};\,\frac{1}{2};\,\frac{z^2}{2}\right)-\frac{\sqrt{2\pi}z}{\Gamma\left(-\frac{p}{2}\right)}\,\Phi\left(\frac{1-p}{2};\,\frac{3}{2};\,\frac{z^2}{2}\right)\right\}.$$

- функция параболического цилиндра,

$$\Phi\,(\alpha;\,\gamma;\,z)=1+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{z}{1\,!}+\frac{\alpha\,(\alpha+1)}{\gamma\,(\gamma+1)}\cdot\frac{z^2}{2\,!}+\frac{\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)}{\lambda\,(\gamma+1)\,(\lambda+2)}\cdot\frac{z^3}{3\,!}+...-$$

- вырожденная гипергеометрическая функция.

$$\left\|p=2\beta-1;\;z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}\;\Rightarrow-\frac{p}{2}=\frac{1-2\beta}{2}=\frac{1}{2}-\beta;\;\frac{1-p}{2}=\frac{1-2\beta+1}{2}=1-\beta\right\|$$

. Тогда

$$\Phi\left(-\frac{p}{2};\,\frac{1}{2};\,\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}}=1+\frac{\frac{1}{2}-\beta}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{z}{1!}+\frac{\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-\beta\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}\cdot\frac{z^2}{2!}+$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-\beta\right)\left(\frac{5}{2}-\beta\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}\cdot\frac{z^3}{3\,!}+....+\Bigg|_{z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}}=$$

$$=1+\frac{(1-2\beta)}{1!\,!}\,\frac{z}{1\,!}+\frac{(1-2\beta)\,(3-2\beta)}{3!\,!}\cdot\frac{z^2}{2\,!}++\frac{(1-2\beta)\,(3-2\beta)\,(5-2\beta)}{5!\,!}\cdot\frac{z^3}{3\,!}+...\Bigg|_{z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}};$$

$$\Phi\left(\frac{1-p}{2};\,\frac{3}{2};\,\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}}=$$

$$=1+\frac{1-\beta}{\frac{3}{2}}\cdot\frac{z}{1!}+\frac{(1-\beta)\cdot(2-\beta)}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}\cdot\frac{z^2}{2!}+\frac{(1-\beta)\cdot(2-\beta)\,(3-\beta)}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}\cdot\frac{z^3}{3\,!}+....\Bigg|_{z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}}=$$

$$=1+\frac{2\,(1-\beta)}{3!\,!}\,\frac{z}{1\,!}+\frac{2^2\,(1-\beta)\,(2-\beta)}{5!\,!}\cdot\frac{z^2}{2\,!}++\frac{2^3\,(1-\beta)\,(2-\beta)\,(3-\beta)}{7!\,!}\cdot\frac{z^3}{3\,!}+...\Bigg|_{z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}}$$

$$D_{2\beta-1}\,(z)=2^{\beta-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{z^2}{4}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\,(1-p)}\left[1+\frac{(1-2\beta)}{1\,!!}\cdot\frac{z}{1!}+\frac{(1-2\beta)\,(3-2\beta)}{3!\,!}\cdot\frac{z^2}{2\,!}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(1-2\beta)\cdot(3-2\beta)\,(5-2\beta)}{5\,!!}\cdot\frac{z^3}{3\,!}+...\right]-$$

$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}\left[z+\frac{2\,(1-\beta)}{3!\,!}\,\frac{z^2}{1\,!}+\frac{2^2\,(1-\beta)\,(2-\beta)}{5!\,!}\cdot\frac{z^3}{2\,!}+\frac{2^3\,(1-\beta)\,(2-\beta)\,(3-\beta)}{7!\,!}\cdot\frac{z^3}{3\,!}+....\right]\tag{14}$$

3.3 Предельные случаи β

Рассмотрим случаи β

I. $\beta = 1$. Тогда [9] $D^{\beta}_{0,t} f(t) = f'(t)$.

Задача (1) – (2) примет вид:

$$u_t - u_{xx} + \lambda u_t(x, t)|_{x=\alpha(t)} = f(x, t),$$

$$u(x, 0) = 0; \; u(0, t) = 0.$$

Следуя [7, с.206], обратим дифференциальную часть в полученной задаче:

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \int_0^\infty u_\tau(x, \tau)\big|_{x=\alpha(\tau)} G(x, \; \xi, \; t-\tau)\, d\xi\, d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f(\xi, \tau) \; G(x, \; \xi, \; t-\tau)\, d\xi\, d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\, t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t} \right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4t} \right] \right\}$$

или

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t u_\tau(\alpha(\tau), \tau)\; erf \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f(\xi, \tau) \; G(x, \; \xi, \; t-\tau)\, d\xi\, d\tau. \quad (15)$$

Введя обозначение $\mu(t) = u_t(\alpha(t), t)$, из (15) получим

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{1+\lambda} \int_0^t \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{4\,(t-\tau)} \right) \cdot \mu(\tau)\, d\tau = \frac{1}{1+\lambda} f_2(t),$$

или

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{1+\lambda} \int_0^t K(t, \; \tau) \cdot \mu(\tau)\, d\tau = \frac{1}{1+\lambda} f_2(t), \tag{16}$$

где

$$K(t, \; \tau) = \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}\; (t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{4(t-\tau)} \right)$$

.

Заметим, что

$$\int_0^t K(t, \; \tau) d\tau = \left\| \xi = \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t-\tau}}; \; d\xi = \frac{\alpha(t)}{4\; (t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \right\| = \int_{\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} d\xi = erfc\left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t}} \right),$$

.

Отсюда, например, при $\alpha(t) \approx t^\omega$, $\omega > \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{t\to 0} \int_0^t K(t, \; \tau) d\tau = 1, \quad \lim_{t\to\infty} \int_0^t K(t, \; \tau) d\tau = 0.$$

Тогда норма $\|K(t,\ \tau)\|$ в пространстве непрерывных функций равна 1. Поэтому решение уравнения (16) $\mu(t)$ не может быть найдено методом последовательных приближений.

Так как [20, формула 9.251]

$$D_1(z) = -e^{\frac{z^2}{4}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\,(-z) = z \cdot e^{-\frac{z^2}{4}}\Big|_{z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}}$$

то из (13) при $\beta = 1$

$$K_1(t,\,\tau) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{t-\tau} \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{8\,(t-\tau)}\right) \cdot \frac{\alpha(t)}{\sqrt{2\,(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2(t)}{8\,(t-\tau)}\right\} =$$

$$= \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{-\frac{\alpha^2(t)}{4\,(t-\tau)}\right\}.$$

Из (12) при $\beta = 1$

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{4\,(t-\tau)}\right) \cdot \mu\,(\tau)\,d\tau = f_2(t),$$

С уравнением (16) не совпадает. Поэтому непрерывности слева по порядку при $\beta = 1$ нет.

II. $\beta = 0$

Из (3) имеем:

$$D_{0,\,t}^{0}\,u(x,\,t)\Big|_{\,x=\alpha(t)} = \int_0^t u_\tau(x,\,\tau)d\tau\Big|_{x=\alpha(t)} = u(\alpha(t);\,t) = \mu(t)$$

Из (1)-(2) получим задачу:

$$u_t - u_{xx} + \lambda u(\alpha(t);\ t) = f(x,\,t)$$

$$u(x,\,0) = 0;\ \ u(0,\,t) = 0.$$

Её решение:

$$u(x,\,t) = -\lambda \int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \cdot u\left(\alpha(\tau);\,\tau\right)d\tau + \underbrace{\int_0^t \int_0^{+\infty} G(x,\,\xi,\,t-\tau)\,f\,(\xi,\,\tau)\,d\xi d\tau}_{f_1(x,t)}$$

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t erf\left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \cdot \mu(\tau)\,d\tau = f_2(t), \tag{17}$$

где $f_2(t) = f_1(\alpha(t);\,t)$.

Из (14) при $\beta = 0$ имеем: [20, формула 9.254(1)]

$$D_{-1}\,(z) = e^{\frac{z^2}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}erfc\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right).$$

Из (13) при $\beta = 0$

$$K_0(t,\ \tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{8(t-\tau)}\right).\exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{8(t-\tau)}\right).erfc\left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) = erfc\left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right)$$

. Из (12) при $\beta = 0$

$$\mu(t) + \lambda\int_0^t \mu(\tau)d\tau - \lambda\int_0^t erfc\left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)\,d\tau = f_2(t)$$

или

$$\mu(t) + \lambda\int_0^t erf\left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)\,d\tau = f_2(t),$$

где $f_2(t) = f_1(\alpha(t);\, t)$ (Ср с (17))

Значит, при $\beta = 0$ решения задаче (1)-(2) и решение, полученное из (12), совпадают.

3.4 Оценка ядра интегрального уравнения

Оценим ядро в (12).

Исследуем ядро интегрального уравнения (12) $K_\beta(t,\ \tau)$, которое имеет особенность при $\tau = t$.

Найдем $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^t K_\beta(t,\,\tau)\,d\tau$

Так как $\arg z = \arg\left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) = 0 < \frac{3\pi}{4}$, то при больших z имеем [20]

$$D_p(z) \approx e^{-\frac{z^2}{4}} z^p\left(1 - \frac{p(p-1)}{2z^2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2\cdot 4\cdot z^4} - ...\right)$$

При $p = 2\beta - 1$ и $z = \frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}$ имеем при малых $(t-\tau)$ и при $\alpha(t) \approx t^\omega$, $\omega < \dfrac{1}{2}$

$$D_{2\beta-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right) \approx \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{8(t-\tau)}\right)\cdot\left(\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right)^{2\beta-1}\times$$

$$\times\left(1 - \frac{(2\beta-1)(2\beta-2)}{2\cdot\frac{\alpha^2(t)}{2(t-\tau)}} + \frac{(2\beta-1)(2\beta-2)(2\beta-3)}{8\cdot\frac{\alpha^4(t)}{4(t-\tau)^2}} - ...\right).$$

Тогда в ядре (13) при малых $(t-\tau)$ и при $\alpha(t) \approx t^\omega$, $\omega < \dfrac{1}{2}$:

$$\left|\exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{8(t-\tau)}\right) D_{2\beta-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right)\right| = \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{4(t-\tau)}\right)\left(\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right)^{2\beta-1}\times$$

$$\times\left|1 - (2\beta-1)(2\beta-2)\frac{t-\tau}{\alpha^2(t)} + (2\beta-1)(2\beta-2)(2\beta-3)\frac{(t-\tau)^2}{2\alpha^4(t)} - ...\right| < M$$

где M-const при малых $(t-\tau)$ и при $\alpha(t) \approx t^\omega$, $\omega < \dfrac{1}{2}$.

Тогда ядро (13) $K_\beta(t,\,\tau)$ при $0 < \beta < 1$ имеет слабую особенность. Уравнение (12) будет иметь единственное решение при любой правой части $f_2(t)$ и $\forall\tau$, которое можно найти методом последовательных приближений.

4 Результаты и обсуждение

Доказана теорема:

Теорема. *Интегральное уравнение* (12) *с ядром вида* (13) *при* $0 < \beta < 1$ *и при* $\alpha(t) \approx t^{\omega}$, $\omega < \dfrac{1}{2}$ *однозначно разрешимо в классе непрерывных функций при любой правой части из класса непрерывных функций.*

Результаты работы согласуются с результатами исследования, приведенными в монографии [7]: в случае, если порядок производной в нагруженном слагаемом равен или выше порядка дифференциальной части уравнения (такие уравнения в [7] названы "существенно"нагруженными), нагруженное слагаемое в уравнении не является слабым возмущением его дифференциальной части. Выше было получен похожий результат для уравнения (12).

5 Заключение

Исследованы проблемы разрешимости неоднородной краевой задачи в первом квадранте для нагруженного уравнения теплопроводности, в котором нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной Капуто по временной переменной, причем порядок производной в нагруженном слагаемом меньше порядка дифференциальной части, и точка нагрузки движется (с постоянной или переменной скоростями).

Предполагается дальнейшее исследование поставленной задачи в случае представления нагруженного слагаемого в форме дробной производной Капуто по пространственной переменной.

Список литературы

[1] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. - М.: Высшая школа, 1995. - 205 с.

[2] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. - 1983. - Т.19, №1. - С.86-94.

[3] Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро - дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. - 1976. - Т.12, №1. - С.103-108.

[4] Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. - Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995. - 270с.

[5] Дженалиев М.Т. О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями // Дифференц. уравнения. - 2001. - Т.37, №1. - С.48-54.

[6] Дженалиев М.Т. Об одной краевой задаче для линейного нагруженного параболического уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравнения. - 1991. - Т.27, №10. - С.1825-1827.

[7] Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения - как возмущения дифференциальных уравнений. - Алматы: ГЫЛЫМ, 2010. – 334с.

[8] Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus. - New York-London: Academic Press, 1974.

[9] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск: Наука и техника, 1987. – 688с.

[10] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. - New York: Gordon and Breach, 1993. – 1006p.

[11] Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их приложения. - Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2000. - 298с.

[12] Le Mehaute A., Tenreiro Machado J.A., Trigeassou J.C., Sabatier J. (eds.) Fractional Differentiation and its Applications. - Bordeaux: Bordeaux Univ, 2005.

[13] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. - М.: Наука, 2005. - 199с.

[14] Геккиева С.Х. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени: автореф. ... канд. физ.-мат. наук:.01.01.02. - Нальчик: НИИ ПМА Каб.-Балк. научн. Центра РАН, 2003. - 14с.

[15] Керефов А.А., Шхануков-Лафишев М.Х., Кулиев Р.С. Краевые задачи для нагруженного уравнения теплопроводности с нелокальными условиями типа Стеклова //Неклассические уравнения математической физики: труды семинара, посвященного 60-летию профессора В.Н. Врагова. - Новосибирск: Изд-во ИМ, 2005. - С.152-159.

[16] Caputo M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequancy independent - II // Geophys. J. Astronom. Soc. - 1967. - Vol. 13. - P.529-539.

[17] Caputo M. Elasticita e Dissipazione. - Bologna: Zanichelli, 1969.

[18] Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 576 с.

[19] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т.1. Элементарные функции. — 2-е изд., исправ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 632 с.

[20] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products / Seventh Edition, AP, New York, 2007. - 171 p.

References

[1] Nakhushev A.M. "Uravnenija matematicheskoi biologii [Equations of Mathematical Biology]", *M.: Vysshaja shkola*, (1995): 205.

[2] Nakhushev A.M. "Nagruzhennye uravnenija i ih prilozhenija [Loaded equations and their applications]", *Diff. equations* vol. 19, no 1 (1983): 86-94.

[3] Nakhushev A.M. "O zadache Darbu dlja odnogo vyrozhdajushhegosja nagruzhennogo integro - differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka [The Darboux problem for a certain degenerate second order loaded integrodifferential equation]", *Diff. equations* vol. 12, no 1 (1976): 103-108.

[4] Dzhenaliev M.T. "K teorii linejnyh kraevyh zadach dlja nagruzhennyh differencial'nyh uravnenij [On the theory of linear boundary value problems for loaded differential equations]", *Almaty: ITPM Computer Center* (1995): 270.

[5] Dzhenaliev M.T. "O nagruzhennyh uravnenijah s periodicheskimi granichnymi uslovijami [On loaded equations with periodic boundary conditions]", *Diff. equations* vol. 37, no 1 (2001): 48-54.

[6] Dzhenaliev M.T. "Ob odnoj kraevoj zadache dlja linejnogo nagruzhennogo parabolicheskogo uravnenija s nelokal'nymi granichnymi uslovijami [About Boundary Value Problem for Linear Loaded Parabolic Equation with Non-local Boundary Conditions]", *Diff. equations* vol. 27, no 10 (1991): 1825-1827.

[7] Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. "Nagruzhennye uravnenija - kak vozmushhenija differencial'nyh uravnenij [Loaded equations as perturbations of differential equations]", *Almaty: Gylym* (2010): 334.

[8] Oldham K.B., Spanier J. "The Fractional Calculus", *New York-London: Academic Press* (1974).

[9] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. "Integraly i proizvodnye drobnogo porjadka i nekotorye ih prilozhenija [Integrals and derivatives of fractional order, and some applications]", *Minsk: Nauka i tehnika* (1987): 688.

[10] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. "Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications", *New York: Gordon and Breach* (1993): 1006.

[11] Nakhushev A.M. "Jelementy drobnogo ischislenija i ih prilozhenija [Elements of fractional calculus and their applications]", *Nal'chik: NII PMA KBNC RAN*, (2000): 298.

[12] Le Mehaute A., Tenreiro Machado J.A., Trigeassou J.C., Sabatier J. "(eds.) Fractional Differentiation and its Applications", *Bordeaux: Bordeaux Univ*, (2005).

[13] Pskhu A.V. "Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo porjadka [Partial differential equations of fractional order]", *M.: Nauka*, (2005): 199.

[14] Gekkieva S.Kh. "Kraevye zadachi dlja nagruzhennyh parabolicheskih uravnenij s drobnoj proizvodnoj po vremeni: avtoref. ... kand. fiz.-mat. nauk:.01.01.02 [Boundary value problems for loaded parabolic equations with a fractional time derivative: author. ... cand. Phys.-Math. Sciences: .01.01.02]" , *Nal'chik: NII PMA KBNC RAN*, (2003): 14.

[15] Kerefov A.A., Shkhanukov-Lafishev M.Kh., Kuliev R.S. "Kraevye zadachi dlja nagruzhennogo uravnenija teploprovodnosti s nelokal'nymi uslovijami tipa Steklova //Neklassicheskie uravnenija matematicheskoj fiziki: trudy seminara, posvjashhennogo 60-letiju professora V.N. Vragova [Boundary value problems for the loaded heat equation with non-local conditions of Steklov type // Non-classical equations of mathematical physics: proceedings of a seminar dedicated to the 60th anniversary of Professor V.N. Vragov]" , *Novosibirsk: Izd-vo IM*, (2005): 152-159.

[16] Caputo M. "Lineal model of dissipation whose Q is almost frequancy independent - II" , *Geophys. J. Astronom. Soc.*, vol. 13 (1967): 529-539.

[17] Caputo M. "Elasticita e Dissipazione" , *Bologna: Zanichelli*, 1969.

[18] Polyanin A.D. "Spravochnik po linejnym uravnenijam matematicheskoj fiziki [Handbook of linear equations of mathematical physics]" , *M.: FIZMATLIT*, (2001): 576.

[19] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. "Integraly i rjady. T.1. Jelementarnye funkcii. — 2-e izd [Integrals and series. V.1. Elementary functions. - 2nd ed.]" , *M.: FIZMATLIT*, (2002): 632.

[20] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. "Table of Integrals, Series, and Products / Seventh Edition" , *New York: AP*, (2007): 171.