МРНТИ 27.21.19 https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m7

[1]Ж. Нурпейис, [2]Ж.Т. Таласбаева, [3]А.Д. Мажитова

[1]к.ф.-м.н., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан,
E-mail: aladinnur@mail.ru

[2]к.ф.-м.н., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан,
E-mail: talasbaeva1979@gmail.com

[3]PhD, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан,
E-mail: akmaral010179@gmail.com

К ГЕОМЕТРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В E_n

Аннотация. Предлагаемая работа посвящена выделению и изучению многомерных сетей, конструктивно связанных распределением. В первоначальном подходе к выделению сетей существенно используется вектор средней кривизны распределения. Поэтому такое выделение осуществимо лишь в метрических пространствах (в работе этот вопрос исследуется в евклидовом n-пространстве). В статье исследуются условия существования канонических распределений плоскостей, принадлежащих касательной плоскости поверхности евклидова пространства. В данной статье введено понятие параллельного переноса площадки вдоль интегральных кривых однораспределения. Доказано утверждение о том, что векторные поля коллинеарны тогда и только тогда, когда геометрический объект тензор кривизны является нулевым.

Выведены дифференциальные уравнения однораспределения и найдено необходимое и достаточное условие, для того чтобы геодезическая линия однораспределения была плоской, а также найдены условия, при которых интегральные кривые однораспределения являются линиями кривизны относительно однораспределения. Доказано утверждение о том, что линия будет геодезической, тогда и только тогда, когда ее главные нормали совпадают с нормалями поверхности, на который эта линия расположена. Получены дифференциальные уравнения гедезической плоской линии.

Ключевые слова: Структурные уравнения, параллельный перенос площадки (гиперраспределение) $\Delta_{n-1}(x)$ вдоль интегральных кривых однораспределения $\Delta(y)$, Λ^n_{ij} – тензор, R^i_{jpq} – скалярная кривизна гиперраспределения, геодезические однораспределения линии $\Delta(y)$.

[1]Ж. Нұрпейіс, [2]Ж.Т. Таласбаева, [3]А.Д. Мажитова

[1]ф.-м.ғ.к., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан,
E-mail: aladinnur@mail.ru

[2]ф.-м.ғ.к., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,Алматы қ. Қазақстан,
E-mail: talasbaeva1979@gmail.com

[3]PhD, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан,
E-mail: akmaral010179@gmail.com

E_n кеңістігінде интегралданатын таралымдардың геометриясына

Аңдатпа. Қарастырып отырылған торды зерттеуде таралымның орта иілімнің векторы алынып зерттелді. Мұндай қарастыру тек метрикалық кеңістіктерде ғана жүзеге асырылады (Бұл сұрақ n-өлшемді векторлық кеңістікте зерттелді). Ұсынылып отырылған жұмыста жазықтық таралымдарының табылу шарты зерттелді және таралымдар евклидтік кеңістіктегі беттің жанама жазықтығында жатуына байланысты айтылды. Таралымдардың торларының ажыратылатын торлардың беттегі теориясы зерттелді. Беттің барлық нүктелерінде геодезиялық иілім нөлге тең болса онда мұндай қисық геодезиялық сызық болады.Мақалада гипертаралымның біртаралымның интегралдық қисығының параллель жылжу ұғымы енгізілді. Векторлық өрістердің коллинеар болуы үшін беттің тензор иілімдерінің нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті.

Біртаралымының геодезиялық қисығының жазық қисық болуының дифференциалдық теңдеулері қорытылып шығарылды. Сонымен қатар біртаралымның интегралдық қисығы біртаралымның иілім сызығы болуының қажетті және жеткілікті шарты табылды. Структуралық теңдеуі $(n-1)$-өлшемді гипертаралымының біртаралымның интеграл қисығының бойымен параллель жылжудағы структуралық теңдеуі алынды. Бұл жағдайда иілім тензоры мен бұралым тензорының нөлге айналуы жеткілікті.
Түйін сөздер: Структуралық теңдеулер, бірөлшемді $\Delta(y)$ таралымның интеграл қисығының бойымен $\Delta_{n-1}(x)$ – гипертаралымның параллель көшірілімі, Λ^n_{ij} – тензоры, R^i_{jpq} – гипертаралымның скаляр иілімі, $\Delta(y)$ біртаралымның интеграл қисығының геодезиялық сызық болуы.

[1]Z. Nurpeyis, [2]Z.T. Talasbayeva, [3]A.D. Mazhitova
[1]Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, E-mail: aladinnur@mail.ru
[2]Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, E-mail: talasbaeva1979@gmail.com
[3]PhD, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
E-mail: akmaral010179@gmail.com

To geometry of integrable distributions in E_n

Abstract. The proposed work is devoted to the identification and study of multidimensional networks constructively connected by distribution. In the initial approach to the selection of networks, the vector of average distribution curvature is essentially used. Therefore, such a separation is feasible only in metric spaces (in the work this question is studied in Euclidean n-space). The article investigates the conditions for the existence of canonical distributions of planes belonging to the tangent plane of the surface of Euclidean space. This article introduces the concept of parallel site transfer along integral unidistribution curves. The statement is proved that vector fields are collinear if and only if the geometric object has a zero curvature tensor.
Differential equations of unidistribution are derived and a necessary and sufficient condition is found for the geodesic line of unidistribution to be flat, and conditions are found under which the integral curves of unidistribution are curvature lines with respect to unidistribution. The statement is proved that the line will be geodesic if and only if its main normals coincide with the normals of the surface on which this line is located. Differential equations of a geodesic flat line are obtained.
Key words: Structural equations, parallel transfer of the hyperdistribution $\Delta_{n-1}(x)$ along integral unidistribution curves $\Delta(y)$, Λ^n_{ij} is the tensor, R^i_{jpq} is the scalar curvature of the hyperdistribution, geodesic unidistributions of the line $\Delta(y)$.

1 Введение

Если на гладком p-мерном многообразии x_p заданы p линейно независимых дифференцируемых одномерных распределений, то p семейств интегральных кривых этих распределений образуют сеть Σ_p линий на многообразии x_n.

В настоящее время теория многомерных сетей занимает определенное место в дифференциальной геометрии пространств различной структуры. Ее развитие происходит, в основном, в двух направлениях:

1. Строятся различные обобщения богатой результатами теории двумерных сетей;

2. Даются новые способы определения сетей, учитывающие специфику многомерной геометрии.

2 Обзор литературы

Обзор работ по многомерным сетям опубликован в 1965 году В.Т. Базылевым [1-4]. В докладе [5], прочитанном Н.М. Остиану, где освещены некоторые вопросы дальнейшего развития этого раздела геометрии. Систематический же обзор рассматриваемого направления за последние годы не проводился. Укажем кратко лишь те работы, которые в известной мере определили круг вопросов нашего исследования. Некоторые начальные исследования сделаны в работах [6-14]. Например, в работах [1-4], [9], [12] проводится обобщение понятий и результатов дифференциальной геометрии сетей на дифференцируемых многообразиях. Введено понятие сетевого модуля, позволяющего проводить классификацию сетей на гладких многообразиях.

3 Постановка задачи

В настоящей работе рассмотрены некоторые геометрические свойства $(n-1)$ – распределения в евклидовом пространстве E_n.

Пусть n-мерное евклидово пространство E_n отнесено к подвижному реперу $R^x = (x, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$, инфинитезимальное перемещение которого определяется дифференциальными уравнениями:

$$\begin{gathered} d\overrightarrow{x} = \omega^J \overrightarrow{e}_J, \quad d\overrightarrow{e}_J = \omega_J^K \overrightarrow{e}_K, \\ (J, K, L, \ldots = 1, 2, \ldots, n; \quad i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1). \end{gathered} \tag{1}$$

Формы ω^J и ω_J^K удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J, \quad D\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K. \tag{2}$$

Пусть в некоторой области $G \subset E_n$ задана вещественная функция $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Условие $f = const$ расслаивает область G на ∞^1 поверхностей V_{n-1} (поверхностей уровня этого инварианта), касательные пространства к этим поверхностям задают в области G $(n-1)$ – распределение Δ_{n-1}.

Векторы $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_{n-1}$ репера расположим в площадке $V_{n-1}(x)$. Тогда дифференциальные уравнения распределения будут:

$$\omega_i^n = \Lambda_{ix}^n \omega^x, \quad (\Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ji}^n). \tag{3}$$

Вектор $\overrightarrow{e}_n$ репера R^* направим по направлению X ортогональному площадке $\Delta_{n-1}(x)$. Получим $\overrightarrow{e}_i \cdot \overrightarrow{e}_n = 0$, следовательно,

$$\omega_i^n = +\gamma_{ij}\omega_n^j = 0, \tag{4}$$

где $\gamma_{ij} = \overrightarrow{e}_i \overrightarrow{e}_j$.

Продолжив систему уравнений (3), перенеся все слагаемые, содержащие главные форму, в первую часть, находим:

$$d\Lambda_{ij}^n - \Lambda_{it}^n \omega_j^t - \Lambda_{tj}^n \omega_i^t = \Lambda_{ijk}^n \omega^k,$$

$$d\Lambda^n_{in} - \Lambda^n_{kn}\omega^k_i = \Lambda^n_{ink}\omega^k.$$

Система величин Λ^n_{ij} образует тензор; мы будем предполагать $\det\|\Lambda^n_{ij}\| \neq 0$; Λ^n_{in} образуют геометрический объект типа ковектора.

В силу равенства (4) скалярная кривизна гиперповерхности V_{n-1} представится в виде:

$$R^i_{jpq} = \gamma_{ik}(\Lambda^n_{kp}\Lambda^n_{jq} - \Lambda^n_{kq}\Lambda^n_{jp}),$$

отсюда

$$R_{sjpq} = \Lambda^n_{sp}\Lambda^n_{jq} - \Lambda^n_{sq}\Lambda^n_{jp}. \tag{5}$$

Пусть площадки $\Delta_{n-1}(x) = \Delta(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_{n-1})$ параллельно переносятся вдоль интегральных кривых 1-распределения $\Lambda(y)$, $y \notin \Delta_{n-1}(x)$. Если $\overrightarrow{H} \in \Delta_{n-1}(x)$ и точка x смещается вдоль интегральной кривой распределения $\Delta(y)$, то

$$(d\overrightarrow{H})/y \in \Delta_{n-1}(x). \tag{6}$$

Пусть $\overrightarrow{H} = h^i\overrightarrow{e}_i$, $\overrightarrow{y} = \eta^K\overrightarrow{e}_K$. Учитывая соотношения (3) и (6), получим

$$\eta^K h^i \Lambda^n_{ik} = 0. \tag{7}$$

В частности, условию (7) удовлетворяют базисные векторы $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_{n-1}$, тогда $h^i = \delta^{ij}$ и

$$\eta^K \Lambda^n_{ik} = 0. \tag{8}$$

Теорема 1 *Для того, чтобы выполнялось соотношение $\overrightarrow{y} = t\overrightarrow{X}$, необходимо и достаточно, чтобы геометрический объект Λ^n_{in} был нулевым.*

Доказательство. Пусть $y = tX$, тогда $\eta^i = 0$, $\eta^n \neq 0$. Из соотношения (8) следует $\Lambda^n_{in} = 0$. Обратно, система $\eta^i\Lambda^n_{ij} = 0$ имеет единственное нулевое решение, $\eta^i = 0$, значит, $y = tX$.

Имеем направление X, ортогональное распределению Δ_{n-1}, тогда в E_n возникает двумерное распределение $\Delta_2 = \Delta(X, Y)$, где вдоль интегральной кривой 1-распределения $\Delta(Y)$ имеем параллельное перенесение площадок $\Delta_{n-1}(x) = \Delta(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_{n-1})$.

Это распределение и $(n-1)$ – распределение $\Delta_{n-1} = \Delta(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_{n-1})$ пересекаются по однородному распределению Δ_1 :

$$\Delta_1 = \Delta_2 \cap \Delta_{n-1}.$$

Пусть векторное поле $\overrightarrow{u}$ порождает это 1-распределение $\Delta_1 : \Delta_1 = \Delta(\overrightarrow{u})$. Тогда $\overrightarrow{u} \in \Delta_2$ и имеем

$$\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{e}_n + \mu\overline{Y} = \mu\eta^i\overrightarrow{e}_i + (\lambda + \mu\eta^n)\overrightarrow{e}_n,$$

$$\overrightarrow{u} = u^i\overrightarrow{e}_i.$$

Отсюда находим:

$$u^i = \mu\eta^i, \quad \lambda + \mu\eta^i, \quad \lambda + \mu\eta^n = 0,$$

то есть

$$u^i = (-1)^{i-1}\mu \det \|\Lambda^n_{kJ_i}\|$$
$$(J_i \neq i; \quad J_i = 1, 2, \ldots, n).$$

Когда точка x смещается вдоль интегральных кривых 1-распределения $\Delta(\overrightarrow{u})$ на поверхности V_{n-1} ($\omega^n = 0$) имеем: $\omega^i = \Theta_1 u^i$, где Θ_1 параметрическая форма, $D\Theta_1 = \Theta_2 \wedge \Theta_1$. Для точки $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{x} + \lambda \overrightarrow{e}_n$ ортогонального направления $\Delta(X)$ находим

$$d\overrightarrow{F} = (\omega^i + \lambda\omega^i_n)\overrightarrow{e}_i + d\lambda \overrightarrow{e}_n.$$

Чтобы имело место соотношение: $d\overrightarrow{F} \in \Delta(X)$, смещение точки x вдоль интегральной кривой $\Delta(\overrightarrow{u})$ должно удовлетворять условию [1]:

$$\omega^i + \lambda\omega^i_n = \Theta_1 u^i + \lambda\omega^i_n = 0$$

или в силу (3) и (4):

$$(\Lambda^n_{ki} - \rho\gamma_{ki})u^i = 0,$$

где $\rho = \dfrac{1}{\lambda}$. Допустим, что корни ρ_i уравнения

$$\det \|\Lambda^n_{ki} - \rho\gamma_{ki}\| = 0$$

простые, тогда уравнения

$$(\Lambda^n_{tk} - \rho_i\gamma_{tk})u^k = 0$$

определяют в точке x попарно ортогональных $(n-1)$ направлений (главные направления тензора Λ^n_{tk} [2]). Отсюда следует:

Теорема 2 *Интегральные кривые распределения $\Delta(\overrightarrow{u})$ являются линиями кривизны относительно $\Delta(X)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_k (-1)^{k-1}(\Lambda^n_{jk} - \rho\gamma_{jk}) \det \|\Lambda^n_{iL_k}\| = 0 \quad (L_k \neq k),$$

где ρ – корень уравнения $\det \|\Lambda^n_{ik} - \rho\gamma_{ik}\| = 0$.

Выясним, когда интегральные кривые распределения $\Delta(\overrightarrow{u})$ являются геодезическими. При смещении точки x вдоль интегральной кривой этого распределения имеем:

$$d\overrightarrow{x} = \omega^i \overrightarrow{e}_i = \Theta_1 u^i \overrightarrow{e}_i = \Theta_1 \overrightarrow{u}. \tag{9}$$

Находим

$$d^2\overrightarrow{x} = d\Theta_1 \overrightarrow{u} + \Theta_1(du^i + u^j\omega^i_j)\overrightarrow{e}_i + \Theta_1 u^i \omega^n_i \overrightarrow{e}_n.$$

Соприкасающаяся плоскость в точке x этой кривой

$$\Pi_2(\overrightarrow{u}) = [x, d\overrightarrow{x}, d^2\overrightarrow{x}].$$

Чтобы линия была геодезической ($\Pi_2(\overrightarrow{u}) \supset \Delta(X)$), должно быть:

$$du^i + u^j\omega_j^i = 0. \tag{10}$$

Положим $\overrightarrow{e}_1 \in \Delta(\overrightarrow{u})$, тогда из соотношения (10) следует:

$$\omega_1^i = 0. \tag{11}$$

Продолжив уравнение (11), находим:

$$D\omega_1^i = 2\gamma^{ij}(\Lambda_{jp}^n\Lambda_{1q}^n - \Lambda_{jq}^n\Lambda_{1p}^n)\omega^p \underset{p<q}{\wedge} \omega^q = 0,$$

то есть

$$\gamma^{ij}(\Lambda_{jp}^n\Lambda_{1q}^n - \Lambda_{jq}^n\Lambda_{1p}^n) = 0;$$

умножив на γ_{ti} и суммируя по i, получим

$$\Lambda_{tp}^n\Lambda_{1q}^n - \Lambda_{tq}^n\Lambda_{1p}^n = 0.$$

Поэтому верна.

Теорема 3 *Если интегральные кривые распределения $\Delta(\overrightarrow{u})$, $\overrightarrow{e}_1 \in \Delta(\overrightarrow{u})$ являются геодезическими, то* $\det \|\Lambda_{iL_k}^n\| = 0$ *и тензор кривизны гиперповерхности V_{n-1} удовлетворяет условию: $R_{stpq} = 0$, если хотя бы один из индексов равен единице* $(L_k \neq k;\ k \neq 1)$.

Аналогично убеждаемся, что справедлива

Теорема 4 *Чтобы геодезическая линия $\Delta(\overrightarrow{u})$, $\overrightarrow{e}_1 \in \Delta(\overrightarrow{u})$ была плоской, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\gamma^{ik}\Lambda_{k1}^n = 0 \quad (i \neq 1).$$

4 Заключение

Аналогия между геометрией распределения, определяемой полями его фундаментальных подобъектов, и геометрией поверхности позволяет перенести известные свойства линий на поверхностях на линии, принадлежащие распределению.

Рассмотрению дифференциально-геометрических свойств интегрируемых распределений и сетей, определяемых гиперраспределениями в n-мерном евклидовом пространстве E_n, посвящена настоящая статья авторов.

Найдено необходимое и достаточное условия коллинеарности векторных полей $\overrightarrow{Y}$ и $\overrightarrow{X}$.

Список литературы

[1] Базылев В.Т. Сети на многообразиях // Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ. – 1974. – № 6. – С. 189-205.

[2] Базылев В.Т. О V-сопряженных сетях в пространстве аффинной связности // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. – 1974. – № 5. – С. 25-30.

[3] Базылев В.Т. О многомерных сетях и их преобразованиях // Тр. Геометр, семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ. – 1965. – № 3. – С. 138-164.

[4] Базылев В.Т. Об одном замечательном классе сетей // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники). – 1975. – № 7. – С. 105-116.

[5] Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в проективной связности // Труды геометрического семинара. Всесоюзный институт научной и технической информации Аккадемии Наук СССР. – 1971. – № 3. – С. 40-47.

[6] *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. Изд. 2-е, исправл. – М.: Наука, 1976. – 432 с.

[7] Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – Гостехиздат, 1948. – 482 с.

[8] Тихонов В.А. Об одном преобразовании плоских сетей, присоединенных к гиперраспределениям в аффинном пространстве // Тезисы докл. 6-й Всес. геометр, конф. по совр. пробл. геометрии. Вильнюс. – 1975. – С. 238-239.

[9] Кузьмин М.К. О канонических сетях распределений на поверхностях евклидова пространства // В сб. «Пробл. геометрии (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». – 1975. – Т. 7. – С. 231-248.

[10] Гудзь Л.П. Об одном классе ортогональных сетей на гиперповерхности четырехмерного евклидова пространства // Сборник "Геометрия погруженных многообразий", М. – 1972. – С. 39-45.

[11] Остиану Н.М. Дифференциально-геометрические структуры на дифференцируемых многообразиях // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники). – 1976. – Т. 8. – С. 89-111.

[12] Тихонов В.А. Сети, определяемые гиперраспределениями в аффинном пространстве и их обобщения // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники). – 1976. – Т. 8. – С. 199-225.

[13] Эли Картан. Риманова геометрия в ортогональном репере. – Издательство Московского университета, 1970.

[14] Васильев А.М., Соловьев Ю.П. Дифференциальная геометрия. – Издательство Московского университета, 1981.

References

[1] Bazyilev V.T. "Seti na mnogoobraziyah [Networks on manifolds]", *Tr. Geometr. seminara. Vses. in-t nauch. i tehn. inform.* No 6 (1974): 189-205.

[2] Bazyilev V.T. "O V-sopryazhennyih setyah v prostranstve affinnoy svyaznosti [About V -adjoint networks in a space of affine connection]", *Izv. vyissh. uchebn. zavedeniy. Matematika.* No 5 (1974): 25-30.

[3] Bazyilev V.T. "O mnogomernyih setyah i ih preobrazovaniyah [About multidimensional networks and their transformations]", *Tr. Geometr, seminara. Vses. in-t nauch. i tehn. inform.* No 3 (1965): 138-164.

[4] Bazyilev V.T. "Ob odnom zamechatelnom klasse setey [On one great class of networks]", *Problemyi geometrii (Itogi nauki i tehniki)* No 7 (1975): 105-116.

[5] Ostianu N.M. "Raspredeleniya m-mernyih lineynyih elementov v proektivnoy svyaznosti [Distributions of m-dimensional linear elements in projective connection]", *Trudyi geometricheskogo seminara. Vsesoyuznyiy institut nauchnoy i tehnicheskoy informatsii Akkademii Nauk SSSR* No 3 (1971): 40-47.

[6] Norden A.P. *Prostranstva affinnoy svyaznosti* [Spaces of affine connection] Izd. 2-e, ispravl. (M.: Nauka, 1976): 432.

[7] Finikov S.P. *Metod vneshnih form Kartana v differentsialnoy geometrii* [The method of external Cartan forms in differential geometry] (Gostehizdat, 1948): 482.

[8] Tihonov V.A. "Ob odnom preobrazovanii ploskih setey, prisoedinennyih k giperraspredeleniyam v affinnom prostranstve [About a transformation of planar networks connected to hyperdistributions in an affine space]", *Tezisyi dokl. 6-y Vses. geometr, konf. po sovr. probl. geometrii. Vilnyus* (1975): 238-239.

[9] Kuzmin M.K. "O kanonicheskih setyah raspredeleniy na poverhnostyah evklidova prostranstva [About canonical distribution networks on the surfaces of Euclidean space]", *V sb. «Probl. geometrii (Itogi nauki i tehn. VINITI AN SSSR)»* Vol. 7 (1975): 231-248.

[10] Gudz L.P. "Ob odnom klasse ortogonalnyih setey na giperpoverhnosti chetyirehmernogo evklidova prostranstva [On a class of orthogonal networks on hypersurfaces of a four-dimensional Euclidean space]", *Sbornik "Geometriya pogruzhennyih mnogoobraziy", M.* (1972): 39-45.

[11] Ostianu N.M. "Differentsialno-geometricheskie strukturyi na differentsiruemyih mnogoobraziyah [Differential-geometric structures on differentiable manifolds]", *Problemyi geometrii (Itogi nauki i tehniki)* Vol. 8 (1976): 89-111.

[12] Tihonov V.A. "Seti, opredelyaemyie giperraspredeleniyami v affinnom prostranstve i ih obobscheniya [Networks defined by hyperdistributions in affine space and their generalizations]", *Problemyi geometrii (Itogi nauki i tehniki)* Vol. 8 (1976): 199-225.

[13] Eli Kartan. *Rimanova geometriya v ortogonalnom repere* [Riemannian geometry in the orthogonal frame] (Izdatelstvo Moskovskogo universiteta, 1970).

[14] Vasilev A.M., Solovev Yu.P. *Differentsialnaya geometriya* [Differential geometry] (Izdatelstvo Moskovskogo universiteta, 1981).