МРНТИ 30.19.33 https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m8

[1]М.И. Рамазанов, [2]А.Ж. Сейтмуратов, [3]Л.У. Таймуратова, [4]Н.К. Медеубаев, [5]Г.И. Мукеева

[1]д.ф.-м.н., профессор, Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова, г. Караганда, Казахстан, E-mail: ramamur@mail.ru
[2]д.ф.-м.н., профессор, Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата, г. Кызылорда, Казахстан, E-mail: angisin_@mail.ru
[3]к.ф.-м.н., ассоциированный профессор, Каспийский государственный университет технологий и инжиниринга имени Ш.Есенова, г. Актау, Казахстан, E-mail: taimuratova@mail.ru
[4]докторант, Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова, г. Караганда, Казахстан, E-mail: medeubaev65@mail.ru
[5]докторант, Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата, г. Кызылорда, Казахстан, E-mail: banu73_@mail.ru

ПРИБЛИЖЁННЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Аннотация. К настоящему времени выполнено огромное число исследований по приведению трехмерной задачи к двухмерной инженерными и математическими методами. Но эти исследования не исчерпывают проблему полностью. Решение этой проблемы для тел с различной геометрией продолжается и в наши дни, о чем свидетельствуют публикации отечественных, российских и зарубежных ученых. К ним примыкает и проблема изучения динамического поведения круговых стрежней, взаимодействующих с деформируемой среды на основе уравнений колебаний, выведенных с помощью строгого математического аппарата. Приближённые уравнения колебаний стержневых систем выше второго порядка по производным от искомой функции и теории колебаний круглой цилиндрической оболочки, в частности крутильных колебаний, с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига посвящено сравнительно небольшое число научных публикаций. Приведённые в данной работе приближённые уравнения стержневых систем переменной толщины позволяют строить приближённые теории колебания в зависимости от условий на торцах стержня, от порядка производных, искомых в приближённых уравнениях и начальных условиях. Полученные результаты позволяют формулировать краевые задачи при решении частных задач колебания цилиндрической оболочки при различных условиях на торце оболочки.
Ключевые слова: колебания, стержень, деформация, вращения, напряжение.

[1]М.И.Рамазанов, [2]А.Ж. Сейтмуратов, [3]Л.У. Таймуратова, [4]Н.Қ. Медеубаев, [5]Г.И. Мукеева
[1]ф.-м.ғ.д., профессор, Академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қарағанды қ., Қазахстан, E-mail: ramamur@mail.ru
[2]ф.-м.ғ.д., профессор, Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қызылорда қ., Қазахстан, E-mail: angisin_@mail.ru
[3]ф,-м.ғ.к., қауымдастырылған профессор, Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технология және инжиниринг университеті, Ақтау қ., Қазақстан, E-mail: taimuratova@mail.ru
[4]докторант, Академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қарағанды қ., Қазахстан, E-mail: medeubaev65@mail.ru
[5]докторант, Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті Қызылорда қ., Қазахстан, E-mail: banu73_@mail.ru

Қалындығы өзгермелі цилиндрлік қабықшаның жуық тербеліс теңдеулері

Аңдатпа. Қазіргі таңда үшөлшемді есепті екі өлшемді инженерлік және математикалық әдістер дейіне түсіріп есептеп шешу бағытында көптеген зерттеу ұмыстары жүргізіліп келеді. Бірақ бұл зерттеулер мәселені толығымен шеше алмайды. Әр түрлі геометрия жағдайындағы денелер үшін бұл мәселені шешу бүгінгі күнге дейін жалғасуда, оны отандық, ресейлік және шетелдік ғалымдардың жарияланымдары дәлелдейді. Осыған қоса - қатаң математикалық аппаратты қолдану арқылы берілген тербеліс теңдеулері негізінде деформацияланатын ортамен әрекеттесетін дөңгелек қабықшалардың динамикалық мінез-құлқын зерттеу жұмысы да жатады. Берілген функция туынсы екінші реттіден жоғары және дөңгелек цилиндрлік қабықтың тербеліс теориясына қатысты жүйелерінің тербеліс теңдеуін жуық түрі, атап айтқанда айналу инерциясы мен көлденең ығысу, бұралуының тербеліс жағдайларының мәселелері ғылыми басылымдарда жариалануы өте аз. Осы мақалада келтірілген қалындығы өзгермелі цилиндрлік қабықшаның жуық тербеліс теңдеулері бізге тербелістердің жуық теориясын, сонымен қатар жуық теңдеу мен бастапқы шарттарды қанағаттандыратын жағдайын құруға мүмкіндік береді. Алынған нәтижелер цилиндрлік қабықтың тербелістерінің белгілі бір есептерін шешуде және шеттік есептерге тұжырым жасауға мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: тербелістер, өзектер, айналу, кернеу, деформация.

[1]M.I. Ramazanov, [2]A.Zh. Seitmuratov, [3]L.U. Taimuratova, [4]N.K. Medeubaev, [5]G.I. Mukeeva

[1]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan, E-mail: ramamur@mail.ru

[2]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kyzylorda, Kazakhstan, E-mail: angisin_@mail.ru

[3]Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Sh. Esenov Caspian state University of technology and engineering, Aktau, Kazakhstan, E-mail: taimuratova@mail.ru

[4]doctoral student, Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan, E-mail: medeubaev65@mail.ru

[5]doctoral student, Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kyzylorda, Kazakhstan, E-mail: banu73_@mail.ru

The approximate equations oscillations of cylindrical shells of variable thickness

Abstract. To date, a huge number of studies have been carried out to bring a three-dimensional problem to a two-dimensional one by engineering and mathematical methods. But these studies do not exhaust the problem completely. The solution of this problem for bodies with different geometries continues today, as evidenced by the publications of domestic, Russian and foreign scientists. Adjacent to them is the problem of studying the dynamic behavior of circular rods interacting with the deformable medium on the basis of oscillation equations derived using a rigorous mathematical apparatus. Approximate equations of oscillation of rod systems above the second order with respect to the derivatives of the desired function and the theory of oscillations of a circular cylindrical shell, in particular torsional oscillations, taking into account the inertion of rotation and the strain of the transverse shear, are devoted to a relatively small number of scientific publications. The approximate equations of rod systems of variable thickness presented in this paper allow us to construct approximate theories of oscillation depending on the conditions at the ends of the rod, on the order of the derivatives sought in the approximate equations and initial conditions. The results obtained make it possible to formulate boundary value problems in solving particular problems of oscillations of a cylindrical shell under various conditions at the end of the shell.

Key words: oscillations, rod, rotation, strain, deformation.

1 Введение

Цилиндрические оболочки являются элементами многих конструкций и сооружений, в том числе, подземных, а также находят широкое применение в различных областях современной техники. Поэтому усовершенствование методов расчета цилиндрических оболочек является актуальной проблемой, причем наиболее точные данные могут быть получены при исследований оболочек на основе механики деформируемого твердого тела.

В известных научных источниках проводимые исследования в области колебаний оболочек не были сформулированы краевые задачи колебания, наряду с приближёнными уравнениями колебания отсутствуют строго обоснованные граничные условия на торцах стержней и оболочек, вытекающие из развиваемого математического подхода, а применялись граничные условия из задач статики. Кроме того, не обосновывалось необходимое число начальных условий в зависимости от порядка производных по времени от искомых функций и не исследовались области применимости приближённых уравнений колебаний.

В настоящей работе рассматриваются вопросы для задач цилиндрических оболочек переменной толщины в более общей постановке, которые позволяют сформулировать краевые задачи при решении частных задач колебания цилиндрической оболочки при различных условиях на торце оболочки.

2 Обзор литературы

В исследуемой области получены основополагающие результаты отечественных и зарубежных ученых. Поэтому здесь мы лишь упомянем некоторые основные работы, в основу которых положены наиболее распространенные модели механики механики, применением хорошо апробированных аналитических и численных методов математики.

По этой причине предлагаемой краткий обзор не претендует по полноту охвата всех имеющихся результатов, которые имеют непосредственное отношение к настоящей работе. Будем обращаться к работам лишь близким к вопросам и проблемам, затрагиваемым в настоящей работе, и имеющим фундаментальное значение в механике и математике.

Фундаментальные идеи и подходы в развитии математических моделей, теоретические и экспериментальные исследования в стержневых систем связан с именами таких ученых, как Ж.Д.Ахенбах, Д.Бленд, Э.И.Григолюк, А.А.Ильюшин, Н.Н.Лентьев, Г.И.Петрашень, Х.А.Рахматуллин, С.П.Тимошенко, И.Г.Филиппов, В.Г.Чебан, и многие другие [1] [2] [3].

Вопросы распространение волн в упругих и вязкоупругих средах и теории колебаний круглой цилиндрической оболочки изучались в работах ученых Г.Кольского, Э.И.Григолюка. Ю.Н.Работнова. Х.А.Рахматуллина, Ж.Д.Ахенбаха, С.П.Тимошенко, И.Г.Филиппова, А.Я.Александрова, Л.М.Куршина, С.И.Филиппова, М.И.Рамазанова, А.Ж.Сейтмуратова и многих других [4] [7] [8].

Множество актуальных научных и технических проблем связано с исследованием колебательных процессов и распространением волн в сплошных средах. Использование результатов этих исследований приносят огромную пользу при рассмотрении нестационарных колебательных и волновых процессов. Однако возникает ряд вопросов, связанных с реакцией среды на внешние воздействия, способами возбуждения движений, кинематическими характеристиками волн, геометрией тел, решение которых имеет прикладное значение и достигается при помощи своих, типичных для данной области методов.

Резюмируя приведенный краткий обзор работ, безусловно, не являющийся полным, можно отметить, что решение динамических задач плоских элементов строительных конструкций в виде пластин далек от завершения.

3 Материал и методы

Постановка задачи

В цилиндрической системе координат $(r,\ \theta,\ z)$ рассматриваются цилиндрические оболочки переменной толщины, внутренний и внешний радиусы которой равны $r_1 = F_1(z)$ и $r_2 = F_2(z)$ соответственно.

Материал оболочки, в общем случае, изотропный или трансверсально-изотропный с осью изотропии z, однородный и вязкоупругий, если не оговаривается особо.

При постановке общей краевой задачи для оболочки они рассматриваются как трёхмерные сплошные деформируемые тела, поведение материалов которых описываются в рамках линейной теории вязкоупругости.

Зависимости напряжений от деформаций в точках цилиндрических оболочек как трёхмерных деформируемых тел имеют вид

$$\sigma_{rr} = A_{11}\left(\varepsilon_{rr}\right) + A_{12}\left(\varepsilon_{\theta\theta}\right) + A_{13}\left(\varepsilon_{zz}\right) \tag{1}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A_{12}\left(\varepsilon_{rr}\right) + A_{11}\left(\varepsilon_{\theta\theta}\right) + A_{13}\left(\varepsilon_{zz}\right)$$

$$\sigma_{zz} = A_{13}\left(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}\right) + A_{33}\left(\varepsilon_{zz}\right)$$

$$\sigma_{\theta z} = A_{44}\left(\varepsilon_{\theta z}\right) \qquad \sigma_{zr} = A_{44}\left(\varepsilon_{zr}\right) \qquad \sigma_{r\theta} = A_{66}\left(\varepsilon_{r\theta}\right)$$

где A_{ij} - вязкоупругие операторы

$$A_{ij}\left(\zeta\right) = a_{ij}\left[\zeta(t) - \int_0^t f_{ij}\left(t-\xi\right)\zeta\left(\xi\right)d\xi\right]$$

a_{ij} - упругие постоянные.

Зависимости деформаций ε_{ij} от перемещений u_r, u_θ, u_z в цилиндрической системе координат определяются по известным формулам механики деформируемого твердого тела

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \qquad \varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \qquad \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r};$$

Уравнения движения в напряжениях имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\partial^2 u_\theta}{r} = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

В случае изотропного материала введением потенциалов Φ и ψ^ρ продольных и поперечных волн

$$U^\rho = grad\Phi + rot\psi^\rho; \psi^\rho = e_z^\rho \psi_1 + rot\left(e_z^\rho \psi_2\right) \tag{4}$$

уравнения движения приводятся к интегро-дифференциальным уравнениям

$$N\left(\Delta\Phi\right) = \rho\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, M\left(\Delta\psi^\rho\right) = \rho\frac{\partial^2 \psi^\rho}{\partial t^2}, N = L + 2M \tag{5}$$

а перемещения и деформация через потенциалы выражаются по формулам

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r}\left[\Phi + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \tag{6}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\Phi + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right] - \frac{\partial \psi_1}{\partial r}$$

$$u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\psi^2$$

и

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\Phi + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right] - \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}; \tag{7}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\Phi + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_1\right];$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\psi_2;$$

$$\varepsilon_{rz} = 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right]\psi_2;$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\Phi + \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]\psi_1 + \frac{2}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\psi_2;$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\psi_2;$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \Delta\Phi$$

Начальные условия нулевые, т.е.

$$u_j = \frac{\partial u_j}{\partial t} = 0 \qquad (t = 0;\ \ j = r, \theta, z) \tag{8}$$

и аналогично для потенциалов

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \qquad \psi_j = \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = 0 \qquad (t = 0;\ j = 1, 2)$$

В зависимости от рассматриваемых задач граничные условия на поверхностях трехмерных тел могут встречаться различных типов как основных трех граничных условий, так и более общих, поэтому сформулируем некоторые из них, которые будут использоваться ниже.

Краевая задача крутильных колебаний цилиндрических оболочек переменной толщины

В цилиндрической системе координат $(r,\ \theta,\ z)$ пространственная задача крутильных колебаний цилиндрической оболочки сводится к решению уравнения

$$\rho M^{-1}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)-\Delta\psi_1=0 \tag{9}$$

при граничных условиях на внутренней и внешней поверхности цилиндрической оболочки

$$\sigma_{r\theta}+\frac{(-1)^{i+1}}{\Delta_{oi}}F_i'(z)\sigma_{r\theta}=f_{ns_1}^{(i)} \qquad i=(1,2) \tag{10}$$

при $r=F_i(z)$, где $r=F_1(z)$ и $r=F_2(z)$ - внутренний и внешний радиусы оболочки, соответственно, $\Delta_0=\sqrt{1+\left[F_i'\right]^2}$.

Представляя потенциал ψ_1 в виде

$$\psi_1=\int\limits_0^\infty\{\sin(kz)-\cos(kz)\}\;\}\,dk\int_l\psi_{10}\exp(pt)dp$$

и подставляя его в уравнения (9), получаем для ψ_{10} уравнение

$$\frac{d^2\psi_{10}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\psi_{10}}{dr}-\beta^2\psi_{10}=0;\quad \beta^2=k^2+\rho p^2M_0^{-1}(p) \tag{11}$$

Общее решение уравнения (11) выражается через функции Бесселя мнимого аргумента, и общее решение которого равно

$$\psi_{10}=AI_0\left(\beta r\right)+BK_0\left(\beta r\right) \tag{12}$$

При этом постоянная интегрирования B в отличие от задачи для стержня отлична от нуля.

Если сдвиговое перемещение u_θ искать в виде смещения u_θ

$$u_\theta=\int\limits_0^\infty\sin(kz)-\cos(kz)dk\int_{(l)}u_{\theta,0}\exp(pt)dp \tag{13}$$

то, разлагая функции Бесселя I_0 и K_0 в ряды, для $u_{\theta,0}^{(0)}$ получаем выражение

$$u_{\theta,0}^{(0)}=\frac{1}{r}A-\sum_{n=0}^\infty\beta_0^{2(n+1)}\left\{A-B\left[\ln\frac{\beta_0\xi}{2}-\frac{1}{2}\psi\left(n+1\right)-\;-\frac{1}{2}\psi(n+2)\right]\right\}\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}; \tag{14}$$

где $\psi(n)$ - пси-функция.

Вводя новые величины

$$\begin{array}{l} \underset{\theta,0}{\hat{U}} = -\frac{1}{2}\beta_0^2\left\{A - B\left[\ln\frac{\beta_0\xi}{2} - \psi\left(1\right) - \frac{1}{2}\right]\right\} \\ \underset{\theta,1}{\hat{U}} = -\frac{A}{\xi} \end{array} \tag{15}$$

и подставляя их выражение (14) вместо постоянных A, B получим выражение

$$U_{\theta,0}^{(0)} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}\beta_0^{2n}\underset{\theta,0}{\hat{U}} + \xi\left\{\left[\frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty}\eta_{1,n}(r)\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}\beta_0^{2(n+1)}\right]\underset{\theta,1}{\hat{U}}\right\} \tag{16}$$

обращая которое по k и p, для сдвигового перемещения получим окончательное представление

$$U_\theta(r,z,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}\lambda_0^{(n)}\underset{\theta,0}{U} + \xi\left\{\frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty}\eta_{1,n}(r)\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}\lambda_0^{(n+1)}\right\}\underset{\theta,1}{U}; \tag{17}$$

где $U_{\theta,0};\ U_{\theta,1}$ имеют очевидный механический смысл, функции $\eta_{1,n}$ равны

$$\eta_{1,n}(r) = \ln\frac{r}{\xi} + \frac{n}{2(n+1)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \tag{18}$$

Аналогично, для напряжений $\sigma_{r,\theta};\ \sigma_{z,\theta}$ получаем выражения

$$M^{-1}\sigma_{r,\theta} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+2)!}\lambda_2^{(n+1)}U_{\theta,1} + +\frac{\xi}{2}\left\{\frac{1}{2}\lambda_2^{(1)} - \frac{4}{r^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{2,n}(r)\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2(n+1)}}{n!(n+2)!}\lambda_2^{(n+2)}\right\}U_{\theta,1} \tag{19}$$

$$M^{-1}\sigma_{z,\theta} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+2)!}\lambda_2^{(n)}\frac{\partial U_{\theta,1}}{\partial z} + \xi\left\{\frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty}\eta_{1,n}(r)\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+2)!}\lambda_2^{(n)}\right\}\frac{\partial U_{\theta,1}}{\partial z}$$

где ξ - промежуточная поверхность, определяемая по формуле

$$\xi = \frac{\max\left[F_1(z)\right]}{2}\left\{\chi - \frac{\max\left[F_1(z)\right]}{\min\left[F_2(z)\right]}\right\} \tag{20}$$

при этом

$$\max\left[F_1(z)\right] < \min\left[F_2(z)\right]$$

а коэффициент χ удовлетворяет неравенству

$$2+\frac{\max\left[F_1(z)\right]}{\min\left[F_2(z)\right]}\leq\chi\leq 2\frac{\min\left[F_2(z)\right]}{\max\left[F_1(z)\right]}+\frac{\max\left[F_1(z)\right]}{\min\left[F_2(z)\right]}$$

Подставляя (19) в граничные условия (10), для определения $U_{\theta,0}$ и $U_{\theta,1}$ получим систему интегро-дифференциальных уравнений, которые также являются и общими уравнениями крутильных колебаний круглой цилиндрической оболочки.

Приведём лишь систему приближённых уравнений крутильного колебания

$$\begin{gathered}F_i(z)\left[\tfrac{F_i(z)}{8}\lambda_2^{(1)}-F_i'(z)\tfrac{\partial}{\partial z}\right]U_{\theta,0}+\xi\left\{\tfrac{1}{2}\lambda_2^{(1)}-\tfrac{2}{F_i'}-\tfrac{F_i'(z)}{F_i(z)}\tfrac{\partial}{\partial z}+\right.\\ \left.+\tfrac{F_i(z)}{8}\lambda_2^{(1)}\left[\eta_{2,0}\left(F_i\right)\tfrac{F_i}{2}\lambda_2^{(1)}-\eta_{1,0}\left(F_i\right)\tfrac{F_i'(z)}{2}\right]\right\}\tfrac{\partial U_{\theta,1}}{\partial z}=\Delta_{0i}M^{-1}f_{ns_1}^{(i)}\quad(i=1,2)\end{gathered}\tag{21}$$

где

$$\eta_{1,0}=\ln\frac{r}{\xi};\qquad\eta_{2,0}(r)=\ln\frac{r}{\xi}-\frac{1}{2}$$

Для оболочки постоянной толщины с радиусами r_1 и r_2 соответственно, из (21) получим систему

$$\frac{r_i^2}{8}\lambda_2^{(1)}U_{\theta,0}+\xi\left\{\frac{1}{2}\lambda_2^{(1)}-\frac{2}{r_i^2}+\frac{r_i}{2}\lambda_2^{(1)}\left[\frac{\eta_{2,0}(r_i)r_i}{2}\right]\lambda_2^{(1)}\right\}\tag{22}$$

$$\tfrac{\partial U_{\theta,1}}{\partial z}=M^{-1}\left[f_\theta^{(i)}\right]$$

Граничные условия

Граничные условия для торца оболочки при крутильном колебании выводятся как и для стержня. Приведём лишь граничные условия на торце оболочки, когда при $z=const$ происходит нормальный удар интенсивности $\sigma_{z\theta}=F(r,t)$. Граничное условие будет иметь вид

$$u_{\theta,0}=M^{-1}\left[F\left(0,t\right)\right];\qquad\frac{\partial u_{\theta,1}}{\partial z}=0$$

Уравнения продольного колебания цилиндрических оболочек

Общие уравнения продольно-радиальных колебаний цилиндрической оболочки выводятся как и для стержня переменного радиуса.

Для формулировки различных краевых задач вначале приведём приближённые уравнения продольно-радиальных колебаний

$$\left\{C+\frac{r_i^2}{2}\left[\lambda_2^{(1)}+C\left(\lambda_1^{(1)}+2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\right\}U_{r,0}-\frac{\partial}{\partial z}\left\{(1-C)+\frac{r_i^2}{8}\left[2\lambda_2^{(1)}-C\left(\lambda_1^{(1)}+2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\right\}U_{z,0}-$$

$$-\xi\left\{-\frac{2}{r_i^2}+\left(\frac{1}{2}+D\ln\frac{r_i}{\xi}\right)\lambda_2^{(1)}+\left(\ln\frac{r_i}{\xi}-\frac{1}{4}\right)(1-D)\lambda_2^{(1)}+\right.$$

$$+D\left(\lambda_1^{(1)}+2\tfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\ln\tfrac{r_i}{\xi}-D\left(\tfrac{3}{4}\lambda_1^{(1)}+\tfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\tfrac{r_i^2}{16}\Big\}\lambda_2^{(1)}U_{r,1}+$$
$$+\xi\left\{\tfrac{1}{2}+(1-D)\ln\tfrac{r_i}{\xi}+\tfrac{r_i^2}{8}\left[-D\left(\ln\tfrac{r_i}{\xi}-\tfrac{3}{4}\right)\lambda_1^{(1)}+D\left(\ln\tfrac{r_i}{\xi}-\tfrac{1}{4}\right)\lambda_2^{(1)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(2\ln\tfrac{r_i}{\xi}-1\right)\left(\lambda_2^{(1)}-D\tfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\right\}\tfrac{\partial U_{z,1}}{\partial z}=M^{-1}\left(f_r^{(i)}\right)\qquad(i=1,2)$$

$$\left\{(1-C)+\tfrac{r_i^2}{8}\left[(1-C)\lambda_2^{(1)}-2C\lambda_1^{(1)}\right]\right\}\tfrac{\partial U_{r,0}}{\partial z}+$$
$$+\left\{(1+C)\lambda_1^{(1)}+\tfrac{r_i^2}{8}\lambda_1^{(1)}\left[(1+C)\lambda_2^{(1)}-2C\tfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\right\}U_{z,0}- \tag{23}$$

$$-\xi\left\{\tfrac{2}{r_i^2}+(1-D)\ln\tfrac{r_i}{\xi}\lambda_2^{(1)}+\tfrac{r_i^2}{8}\left(\ln\tfrac{r_i}{\xi}-\tfrac{3}{4}\right)\left[(1-D)\lambda_2^{(1)}-2D\lambda_1^{(1)}\right]\lambda_2^{(1)}\right\}\times$$
$$\times\tfrac{\partial U_{r,1}}{\partial z}-\xi\left\{\tfrac{2}{r_i^2}+\left(\lambda_2^{(1)}-2D\tfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\ln\tfrac{r_i}{\xi}+\tfrac{r_i^2}{\xi}\left(\ln\tfrac{r_i}{\xi}-\tfrac{1}{2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\left(\lambda_2^{(1)}-D\tfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2^{(1)}-2D\lambda_1^{(1)}\tfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\right\}U_{z,1}=\tfrac{2}{r_i^2}M^{-1}\left(f_{rz}^{(i)}\right);\qquad(i=1,2)$$

где $f_r^{(i)}, f_{rz}^{(i)}$ - нагрузки на внешней и внутренней поверхностях оболочек, при этом перемещения u_r, u_z приближённо равны

$$u_z=U_{z,0}-\xi\left(\ln\frac{r}{\xi}+\frac{1}{2}\right)U_{z,1} \tag{24}$$

$$u_r=\tfrac{r}{2}U_{r,0}-\tfrac{r\xi}{2}\left[\tfrac{2}{r^2}+(1-D)\lambda_2^{(1)}\ln\tfrac{r}{\xi}\right]U_{r,1}+\tfrac{r\xi}{2}D\ln\tfrac{r}{\xi}\tfrac{\partial U_{z,1}}{\partial z}$$

а напряжения

$$M^{-1}\sigma_{zz}=(1+C)\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}-(1-C)U_{r,0}-\xi\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{r}{\xi}\right)\left[(1+2D)\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}-(1-2D)\lambda_2^{(1)}U_{r,1}\right] \tag{25}$$

$$M^{-1}\sigma_{r,z}=\tfrac{r}{2}\left\{(1-C)\tfrac{\partial U_{r,0}}{\partial z}+(1+C)\lambda_1^{(1)}U_{z,0}-\xi\left[\tfrac{2}{r^2}+(1-2D)\lambda_2^{(1)}\ln\tfrac{r}{\xi}\right]\tfrac{\partial U_{r,1}}{\partial z}-\right.$$

$$\left.-\xi\left[\tfrac{2}{r^2}+\left(\lambda_2^{(1)}-2D\tfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\ln\tfrac{r}{\xi}\right]U_{z,1}\right\};$$

$$M^{-1}\sigma_{r,r}=\left\{CU_{r,0}-(1-C)\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}+\xi\left[\left(D\ln\frac{r}{\xi}-\frac{1}{2}\right)\lambda_2^{(1)}+\frac{2}{r^2}\right]U_{r,1}+\xi\left[(1-D)\ln\frac{r}{\xi}+\frac{1}{2}\right]\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}\right\};$$

$$M^{-1}\sigma_{\theta\theta}=\left\{CU_{r,0}-(1-C)\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}+\frac{\xi}{2}\left[(1-D)\,\lambda_2^{(1)}+\frac{2}{r^2}\right]U_{r,1}+\xi\left[1-D+2\ln\frac{r}{\xi}\right]\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}\right\}$$

$$C=1-NM^{-1};\qquad D=1-MN^{-1}$$

Здесь $U_{z,0}$ и $U_{r,1}$ - перемещения точек промежуточной поверхности, а $U_{z,1}$ и $U_{r,0}$ - деформации этих точек по радиальной координате.

В начале сформулируем трёхмерные граничные условия для торца оболочки $z = const$.

Свободный или нагруженный нормальным напряжением торец

$$\sigma_{zz}=-F(t);\qquad \sigma_{rz}=0 \tag{26}$$

Жёстко закреплённый торец

$$u_r=u_z=0 \tag{27}$$

Идеально закреплённый торец

$$u_z=0;\qquad \sigma_{rz}=0 \tag{28}$$

Исходя из приближённых выражений (25) для напряжений, условия (26) для неизвестных $U_{rj},\ U_{zj}$ приводят к граничным условиям

$$(1+C)\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}-(1-C)U_{r,0}-\frac{\xi}{2}(1+2C)\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}+\frac{\xi}{2}(1-2C)$$
$$\lambda_2^{(1)}U_{r,1}=-M^{-1}(F)(1-C)\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}+(1+C)\lambda_1^{(1)}U_{z,0}=0$$

$$\frac{\partial U_{r,1}}{\partial z}+U_{z,1}=0 \tag{29}$$

Аналогично, условия (27) и (28) приводят к граничным условиям

$$U_{r,0}=U_{r,1}=0;\qquad U_{r,0}=\frac{\xi}{2}U_{z,1} \tag{30}$$

и

$$U_{z,0}=\frac{\xi}{2}U_{z,1};\qquad \frac{\partial U_{r,1}}{\partial z}+U_{z,1}=0 \tag{31}$$

$$(1-C)\,\frac{\partial U_{r,0}}{\partial z}+(1-C)\lambda_1^{(1)}U_{z,0}=0$$

4 Заключение

Граничные условия (29)-(31) отличаются от имеющихся в научной литературе, полученных на основе тех или иных гипотез и предложений механического и геометрического характера, наличием операторов $\lambda_j^{(1)}$, отражающих принцип Даламбера в механике.

Полученные результаты позволяют формулировать краевые задачи при решении частных задач колебания цилиндрической оболочки при различных условиях на торце оболочки.

Список литературы

[1] Александров А.Я., Куршин Л.М. Многослойные пластинки и оболочки // VII Всесоюзная конференция по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1970, с.714-722.

[2] Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. – М: Мир, 1965. – 428с.

[3] Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971, 807с.

[4] Филиппов И.Г., Чебан В.Г. Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. – Кишинев: Штиинца, 1988,-190с.

[5] Seitmuratov A., Taimuratova L., Zhussipbek B., Seitkhanova A., Kainbaeva L. Conditions of extreme stress state // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences. - 2019. Volume 5, -P.202 – 206

[6] Seitmuratov A., Tileubay S., Toxanova S., Ibragimova N., Doszhanov B., Aitimov M.Zh. The problem of the oscillation of the elastic layer bounded by rigid bouhdaries // News of NAS RK. Series of physico-mathematical. - 2018. № 5(321). - P.42 – 48

[7] Филиппов И.Г., Филиппов С.И. Динамическая теория устойчивости стержней.// Труды Российско-Польского семинара «Теоретические основы строительства», Варшава, - 1995, - с.63-69.

[8] Филиппов И.Г. Динамическая теория относительного движения многокомпонентных сред. // Прикл. механ. – Киев, 1974. – т.7. - № 10. – с.92-99.

[9] Филиппов И.Г. Егорычев О.А. Волновые процессы в линейных вязкоупругих средах. // – М: Машиностроение, 1983. – 272с.

[10] Филиппов И.Г. Точные уравнений поперечных колебаний вязкоупругих плит. // Труды Всесоюз. конф. По динамике оснований, фундаментов и подземных сооружений. – Л., Нарва, 1995, с.63-69.

[11] Филиппов И.Г., Джанмулдаев Б.Д., Егорычев О.О., Схропкин С.А., Филиппов С.И. Теория динамического поведения плоских элементов строительных конструкций. // Тезисы и докл.// Российско-Польского семинара «Теоретические основы строительства» - Москва, май, 1993 г.

[12] Филиппов И.Г. Приближенный метод решения динамических задач для вязкоупругих сред. // – ПММ,т.43, № 1, 1979, с.133-137.

[13] Филиппов И.Г. К нелинейной теории вязкоупругих изотропных сред. // Киев: Прикл. механика, 1983, т.19, № 3, с.3-8.

[14] Филиппов И.Г., Ишрипкулов Т.Ш., Мирзанабилов С.М. Нестационарные колебания линейных упругих и вязкоупругих сред. // Ташкент: «ФАН» Уз. ССР – 1909.

[15] Филиппов И.Г., Филиппов С.И. Уравнения колебания кусочно-однородной пластинки переменной толщины. // – МТТ, 1989, № 5, с.149-157.

[16] Филиппов И.Г., Филиппов С.И., Костин В.И. Динамика двумерных композитов. // – Труды Междун. конференции по механики и материалам, США, Лос-Анжелес, 1995, с.75-79.

[17] Филиппов И.Г., Филиппов С.И., Егорычев О.А. Влияние слоистости деформированного основания на колебания плоских элементов.// Сб. трудов Респуб. конфер. «Актуальны проблемы механики контактного взаимодействия», Узбекистан, 1997, с.70-71.

[18] Филиппов А.И. Распространение волн в упругом стержне, окруженном средой типа Винклера. //Вестник// МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1983, с. 74-78.

[19] Almagambetova A., Tileubay S., Taimuratova L., Seitmuratov A., Kanibaikyzy K. Problem on the distribution of the harmonic type Relay wave// News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences. - 2019. №1(433), -P. 242 – 247.

[20] Seitmuratov A., Zharmenova B., Dauitbayeva A., Bekmuratova A. K., Tulegenova E., Ussenova G. Numerical analysis of the solution of some oscillation problems by the decomposition method //News of NAS RK. Series of physico-mathematical. - 2019, №1(323), -P. 28 – 37.

[21] Seitmuratov A., Zhussipbek B., Sydykova G., Seithanova A., Aitimova U. Dynamic stability of wave processes of a round rod // News of NAS RK. Series of physico-mathematical. -2019, №2(324), -P. 90 – 98.

[22] Seitmuratov A., Ramazanov M., Medeubaev N., Kaliev B. Mathematical theory of vibration of elastic or viscoelastic plates, under non-stationary external influences// News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technology sciences. ISSN 2224-5278.Volume 6, Number 426 (2017), 255 – 263.

[23] Ashirbayev N., Ashirbayeva Zh., Abzhapbarov A., and Shomanbayeva M. The features of a non-stationary state of stress in the elastic multisupport construction // AIP Conference Proceedings. – 2016.–V. 1759, 020039, http://dx.doi.org/10.1063/1.4959653.

[24] Ashirbayev N., Ashirbayeva Zh., Sultanbek T., and Bekmoldayeva R. Modeling and solving the two-dimensional non-stationary problem in an elastic body with a rectangular hole// AIP Conference Proceedings. – 2016.–V. 1759, 020078, http://dx.doi.org/10.1063/1.4959692.

[25] Ashirbayev N.K., Banas I., Bekmoldayeva R.A. Unified Approach to Some Classes of Nonlinear Integral Equations // Journal of Function Spaces. – Volume 2014, Article ID 306231, 9 pages.

References

[1] Aleksandrov A.Ja.and Kurshin L.M, "Mnogoslojnye plastinki i obolochki [Multilayer plates and shells]" , *VII Vsesojuznaja konferencija po teorii obolochek i plastinok*, (1970): 714-722.

[2] Blend D, "Teorija linejnoj vjazkouprugosti [The theory of linear viscoelasticity]" , (1965): 428.

[3] Timoshenko S.P, "Ustojchivost' sterzhnej, plastin i obolochek [Stability of rods, plates and shells]" , (1971): 807.

[4] Filippov I.G.and Cheban V.G, "Matematicheskaja teorija kolebanij uprugih i vjazkouprugih plastin i sterzhnej [The mathematical theory of vibrations of elastic and viscoelastic plates and rods]" , (1988): 190.

[5] Seitmuratov A.and Taimuratova L.and Zhussipbek B.and Seitkhanova A.and Kainbaeva L, "Conditions of extreme stress state" , *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*, no 5(2019): 202-206.

[6] Seitmuratov A.and Tileubay S.and Toxanova S.and Ibragimova N.and Doszhanov B.and Aitimov M.Z, "The problem of the oscillation of the elastic layer bounded by rigid bouhdaries" , *News of NAS RK. Series of physico-mathematical*, no 5(2018): 42 – 48.

[7] Filippov I.G.and Filippov S.I, "Dinamicheskaja teorija ustojchivosti sterzhnej [Dynamic Theory of Stability rods]" , *Trudy Rossijsko-Pol'skogo seminara «Teoreticheskie osnovy stroitel'stva»*, (1995): 63-69.

[8] Filippov I.G. "Dinamicheskaya teoriya otnositel'nogo dvizheniya mnogokomponentnyh sred. [Dynamic theory of relative motion of multicomponent media.]" , *Prikl. mekhan.*, no 10(1974): 92-94.

[9] Filippov I.G., Egorychev O.A. "Volnovye processy v linejnyh vyazkouprugih sredah. [Wave processes in linear viscoelastic media.]" , *M: Mashinostroenie*, (1983): 272.

[10] Filippov I.G. "Tochnye uravnenij poperechnyh kolebanij vyazkouprugih plit. [Exact equations of transverse oscillations of viscoelastic plates.]" , *Trudy Vsesoyuz. konf. Po dinamike osnovanij, fundamentov i podzemnyh sooruzhenij.*, (1995): 63-69.

[11] Filippov I.G., Dzhanmuldaev B.D., Egorychev O.O., Skhropkin S.A., Filippov S.I. "Teoriya dinamicheskogo povedeniya ploskih elementov stroitel'nyh konstrukcij. [Theory of dynamic behavior of flat elements of building structures.]" , *Tezisy i dokl.// Rossijsko-Pol'skogo seminara "Teoreticheskie osnovy stroitel'stva"*, (1993).

[12] Filippov I.G. "Priblizhennyj metod resheniya dinamicheskih zadach dlya vyazkouprugih sred. [Approximate method for solving dynamic problems for viscoelastic media.]" , *PMM*, (1979): 133-137.

[13] Filippov I.G. "K nelinejnoj teorii vyazkouprugih izotropnyh sred. [On the nonlinear theory of viscoelastic isotropic media.]" , *Prikl. mekhanika*, no 3(1983): 3-8.

[14] Filippov I.G., Ishripkulov T.Sh., Mirzanabilov S.M. "Nestacionarnye kolebaniya linejnyh uprugih i vyazkouprugih sred. [Unsteady oscillations of linear elastic and viscoelastic media.]" , *«FAN» Uz. SSR*, (1909).

[15] Filippov I.G., Filippov S.I. "Uravneniya kolebaniya kusochno-odnorodnoj plastinki peremennoj tolshchiny. [Equations of oscillation of a piecewise homogeneous plate of variable thickness.]" , *MTT*, no 5(1989): 149-157.

[16] Filippov I.G., Filippov S.I., Kostin V.I. "Dinamika dvumernyh kompozitov. [Dynamics of two-dimensional composites.]" , *Trudy Mezhdun. konferencii po mekhaniki i materialam*, (1995): 75-79.

[17] Filippov I.G., Filippov S.I., Egorychev O.A. "Vliyanie sloistosti deformirovannogo osnovaniya na kolebaniya ploskih elementov. [Influence of stratification of deformed base on vibrations of plane elements.]" , *Sb. trudov Respub. konfer. «Aktual'ny problemy mekhaniki kontaktnogo vzaimodejstviya»*, (1997): 70-71.

[18] Filippov A.I. "Rasprostranenie voln v uprugom sterzhne, okruzhennom sredoj tipa Vinklera. [Propagation of waves in an elastic rod surrounded by a Winkler-type medium.]" , *MGU. Ser. 1. Matematika, mekhanika*, (1983): 74-78.

[19] Almagambetova A.and Tileubay S.and Taimuratova L.and Seitmuratov A.and Kanibaikyzy K, "Problem on the distribution of the harmonic type Relay wave" , *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*, no 1(2019): 242-247.

[20] Seitmuratov A.and Zharmenova B.and Dauitbayeva A.and Bekmuratova A. K.and Tulegenova E.and Ussenova G, "Numerical analysis of the solution of some oscillation problems by the decomposition method" , *News of NAS RK. Series of physico-mathematical*, no 1(2019): 28 – 37.

[21] Seitmuratov A.and Zhussipbek B.and Sydykova G.and Seithanova A.and Aitimova U, "Dynamic stability of wave processes of a round rod" , *News of NAS RK. Series of physico-mathematical*, no 2(2019): 90 – 98.

[22] Seitmuratov A., Ramazanov M., Medeubaev N., Kaliev B. "Mathematical theory of vibration of elastic or viscoelastic plates, under non-stationary external influences" , *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technology sciences.*, no 426 (2017), 255-263.

[23] Ashirbayev N., Ashirbayeva Zh., Abzhapbarov A., and Shomanbayeva M. "The features of a non-stationary state of stress in the elastic multisupport construction" , *AIP Conference Proceedings*, (2016).

[24] Ashirbayev N., Ashirbayeva Zh., Sultanbek T., and Bekmoldayeva R. "Modeling and solving the two-dimensional nonstationary problem in an elastic body with a rectangular hole" , *AIP Conference Proceedings*, (2016).

[25] Ashirbayev N.K., Banas I., Bekmoldayeva R. "A Unified Approach to Some Classes of Nonlinear Integral Equations" , *Journal of Function Spaces*, (2014), 9.