МРНТИ 27.35.45 https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.08

[1]**Х. Хомпыш**, [2]**А. Шакир**
[1]к.ф.-м.н., доцент, E-mail: konat_k@mail.ru
[2]магистрант, E-mail: ajdossakir@gmail.com
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В данной статье исследована обратная задача определения решения и неизвестной правой части, зависящей только от пространственным переменным для линейного псевдопараболического уравнения третьего порядка. В обратных задачах вместе с начальными и граничными условиями задается также дополнительная информация, необходимость которой обусловлена наличием неизвестных коэффициентов или правой части уравнения. В работе в качестве дополнительной информации рассматривается интегральное условие переопределения. Обратные задачи определения правой части дифференциального уравнения возникают при математическом моделировании некоторых физических процессов в том случае, когда помимо решения уравнения требуется восстановить действие внешних источников. На сегодняшний день исследования прямых и обратных задач для псевдопараболических уравнений бурно развиваются в связи с потребностями моделирования и управления процессами в теплофизике, гидродинамике и механике сплошной среды. Подобные псевдопараболические уравнения рассматриваемые в данной работе возникают при описании процессов тепломассопереноса, процессов движение неньютоновских жидкостей, волновых процессов и во многих других областях. С помощью разложения в ряды доказаны теоремы существования и единственности классических решений данной задачи. Результатом данной работы является решение, представленное в виде ряда, что позволяет производить необходимые численные расчеты с заданной точностью.

Ключевые слова: Обратная задача, псевдопараболические уравнения, теорема существования и единственности решения, классическое решение.

[1]Х. Хомпыш, [2]А. Шәкір
[1]ф.-м.ғ.к., доцент, E-mail: konat_k@mail.ru
[2]магистрант, E-mail: ajdossakir@gmail.com
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

Псевдо-параболалық теңдеу үшін оң жағын анықтау кері есебі

Бұл мақалада үшінші ретті сызықты псевдопараболалық теңдеу үшін шешімін және кеңістіктік айнымалыдан тәуелді оң жағын анықтау кері есебі қарастырылады. Кері есептерде бастапқы және шекаралық шарттармен қоса, белгісіз коэффициенттер немесе оң жағына байланысты қосымша ақпараттар беріледі. Аталмыш жұмыста қосымша ақпарат ретінде интегралдық қосымша шарт қарастырылады. Дифференциалдық теңдеудің оң жағын анықтау кері есептері кейбір физикалық құбылыстардың, нақтырақ айтқанда теңдеу шешімінің сыртқы жылу көздерін қалпына келтірудің математикалық моделін жасағанда туындайды. Қазіргі таңда жылу физикасы, гидродинамика, тұтас орта механикасы құбылыстарын басқару және моделдеуге байланысты псевдопараболалық теңдеулер үшін кері және тура есептерді зерттеу қарқынды даму үстінде. Бұл жұмыста қарастырылатын псевдопараболалық теңдеулерге ұқсас теңдеулер жылу және жылу алмасу, ньютондық емес сұйықтардың қозғалысын, толқын және басқа да құбылыстарды сипаттауда қолданылады. Қатарға жіктеу әдісі көмегімен, берілген есептің классикалық шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы теоремалар дәлелденді. Қарастырылып отырған жұмыстың қатар түріндегі шешімі кейбір сандық есептеулердің нақты мәндерін алуға мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: Кері есеп, псевдопараболалық теңдеу, шешімнің бар болуы және жалғыздығы туралы теорема, классикалық шешім.

[1]Kh. Khompysh, [2]A. Shakir
[1]Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent, E-mail: konat_k@mail.ru
[2]Master Student, E-mail: ajdossakir@gmail.com
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

The inverse problem for determining the right part of the pseudo-parabolic equation

In this paper the inverse problem of determining a solution and an unknown right-hand side that depends only on spatial variable for the linear pseudo-parabolic equation of the third order is investigated. In inverse problems, together with the initial and boundary conditions also consider an additional information, the need for which is due to the presence of unknown coefficients or the right side of the equation. In this paper, as additional information the integral overdetermination condition is considered. Inverse problems of determining the right-hand side of a differential equation arise in the mathematical modeling of some physical processes in the case when, in addition to solving the equation, it is necessary to restore the action of external sources. Today, studies of direct and inverse problems for pseudo-parabolic equations are rapidly developing due to the needs of modeling and process control in thermophysics, hydrodynamics and continuum mechanics. Similar pseudo-parabolic equations to considered in this paper arise in the description of heat and mass transfer processes, processes of motion of non-Newtonian fluids, wave processes, and in many other areas. Using series expansion, the existence and uniqueness theorems of classical solutions to this problem are proved. The result of this work is a solution presented in the series form, which allows the necessary numerical calculations to be performed with a given accuracy.
Key words: Inverse problem, pseudoparabolic equations, theorems of the existence and uniqueness of the solution, classical solution.

1 Введение

Под обратной задачей для уравнений с частными производными в настоящей работе подразумевается такая задача, в которой вместе с решением требуется определить правую часть или (и) тот или иной коэффициент (коэффициенты) самого уравнения. В обратных задачах вместе с начальными и граничными условиями, характерными для той или иной прямой задачи, задается дополнительная информация, необходимость которой обусловлена наличием неизвестных коэффициентов или правой части уравнения. Дополнительная информация, которая называется условием переопределения, может быть представлена в различных формах. Например, если известно значение искомого решения в определенной момент времени, то это дополнительное условие называет финальным переопределением. Однако часто как интеграл от искомого решения. Именно такое условие переопределения рассматривается в статье.

Исследования прямых и обратных задач для псевдопараболических уравнений в различных постановках развиваются бурно в связи с потребностями моделирования процессов механики сплошной среды. Подобные псевдопараболические уравнения рассматриваемые в данной работе возникают при описании процессов движения неньютоновских жидкостей, волновых процессов и во многих других областях. Тем самым исследование таких задач является актуальным.

2 Обзор литературы

К настоящему времени появилось значительное количество работ, посвященных исследованию обратных задач с интегральным условием переопределения. В большинстве работ, посвященных исследованиям в этой области, изучались обратные задачи для уравнений параболического типа (См. например [1]-[9] и библиографии в них). В отличие от указанных работ нами исследуется обратная задача для псевдопараболического уравнения (уравнения типа Соболева). Обратные задачи для псевдопараболических уравнений исследовались крайне мало, однако библиографии по этому вопросу можно найти в [10]-[14]. Физические применения подобных псевдопараболических уравнений можно найти в работах [17]-[19].

В данной работе изучены вопросы существования единственности классического решения обратной задачи определения правой части для линейного псевдопараболического уравнения третьего порядка с интегральным условием переопределения.

2.1 Постановка задачи

В прямоугольнике $Q_T = \{(x,t) :\ x \in (0,1)\,,\ t \in (0,T)\}\,,\ T < \infty$, рассмотрим следующую обратную задачу определения правой части $f(x)$ псевдопараболического уравнения

$$u_t - u_{xx} - u_{xxt} = f(x),\ \ (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

и его решения $u(x,t)$, удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

нелокальным периодическим условиям

$$u(1,t) = 0,\ u_x(0,t) = u_x(1,t),\ t \in [0,T], \tag{3}$$

и интегральному условию переопределения

$$\int_0^T u(x,t)dt = \psi(x), \quad x \in [0,1], \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$–заданные функции, а $u(x,t)$ и $f(x)$ искомые.

Определение 1 *Классическим решением обратной краевой задачи* (1)-(4) *назовем пару* $\{u(x,t),\, f(x)\}$ *функции* $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}\left(Q_T\right)\bigcap C^{1,0}_{x,t}\left(\bar{Q}_T\right)$ *и* $f(x) \in C\left[0,1\right]$, *удовлетворяющих уравнению* (1) *в* Q_T, *условиям* (2), (4) *в* $[0,1]$ *и условиям* (3) *в* $[0,T]$ *в обычном смысле.*

Пусть для функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ выполняются условия согласования

$$\varphi(1) = 0,\ \varphi'(1) = \varphi'(0),\ \psi(1) = 0,\ \psi'(0) = \psi'(1) \tag{5}$$

Справедлива следующая теорема о существования решения.

Теорема 1 *Пусть выполняются условия в* (5) *и* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^3[0,1]$, $\varphi''(1) = \varphi''(1)$, $\psi''(0) = \psi''(1)$. *Тогда обратная задача* (1)-(4) *имеет классическое решение* $(u(x,t), f(x)) \in C^{2,1}_{x,t}\left(Q_T\right) \times C\left[0,1\right]$.

Доказательство. Решение задачи будем искать в виде разложения по специально выбранному базису из системы функций

$$2(1-x), \quad \{4(1-x)\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{4\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}. \tag{6}$$

Эта система рассмотрена в работах [15]-[16], где было показано, что она замкнута, минимальна и образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Система (6) не является ортогональной, и для нее в [16], была выписана биортогональная система функций

$$1, \quad \{\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{x\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}. \tag{7}$$

Система (7) используется нами далее для доказательства единственности решения задачи и определения коэффициентов в ряд по функциям (6). Так как система (6) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, то решение $u(x,t)$, $f(x)$ задачи (1)-(4) будем искать в виде рядов

$$u(x,t) = 2u_0(t)(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} 4u_{1n}(t)(1-x)\cos 2\pi nx + \sum_{n=1}^{\infty} 4u_{2n}(t)\sin 2\pi nx, \tag{8}$$

$$f(x) = 2f_0(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} 4f_{1n}(1-x)\cos 2\pi nx + \sum_{n=1}^{\infty} 4f_{2n}\sin 2\pi nx. \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в (1)-(4), получим следующие задачи для нахождения функций $u_0(t)$, $u_{1n}(t)$, $u_{2n}(t)$ и постоянных f_0, f_{1n}, f_{2n}:

$$\begin{gathered} u_0'(t) = f_0, \;\; u_{1n}'(t) + \frac{4\pi^2n^2}{1+4\pi^2n^2}u_{1n}(t) = \frac{f_{1n}}{1+4\pi^2n^2}, \\ u_{2n}'(t) + \frac{4\pi^2n^2}{1+4\pi^2n^2}u_{2n}(t) = \frac{f_{2n}}{1+4\pi^2n^2} + \frac{4\pi n}{1+4\pi^2n^2}u_{1n}(t) + \frac{4\pi n}{1+4\pi^2n^2}u_{1n}'(t). \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} u_0(0) = \varphi_0, \;\; u_{1n}(0) = \varphi_{1n}, \;\; u_{2n}(0) = \varphi_{2n}, \\ \int_0^T u_0(t)dt = \psi_0, \;\; \int_0^T u_{1n}(t)dt = \psi_{1n}, \;\; \int_0^T u_{2n}(t)dt = \psi_{2n}. \end{gathered} \tag{11}$$

Общее решения обыкновенные дифференциальные уравнения в (10) соответственно

$$u_0(t) = f_0t + C_0, \quad u_{1n}(t) = \frac{f_{1n}}{4\pi^2n^2} + C_{1n}e^{-\frac{4\pi^2n^2}{1+4\pi^2n^2}t}$$

$$u_{2n}(t) = \frac{f_{2n}}{4\pi^2n^2} + \frac{f_{1n}}{4\pi^3n^3} + C_{2n}e^{-\frac{4\pi^2n^2}{1+4\pi^2n^2}t} + \frac{4\pi n}{(1+4\pi^2n^2)^2}C_{1n}te^{-\dfrac{4\pi^2n^2}{1+4\pi^2n^2}t},$$

где C_0, C_{1n}, C_{2n}, f_0, f_{1n}, f_{2n} - произвольные постоянные. Они определяются из условия (11)

$$C_0 = \varphi_0, \;\; C_{1n} = \frac{\psi_{1n} - \varphi_{1n}T}{\left[1 - e^{-\frac{4\pi^2n^2}{1+4\pi^2n^2}T}\right]\dfrac{1+4\pi^2n^2}{4\pi^2n^2} + T},$$

$$C_{2n} = \frac{\psi_{2n} - \varphi_{2n}T - \dfrac{4\pi n C_{1n}}{1+4\pi^2n^2}\left[\left(\dfrac{1+4\pi^2n^2}{4\pi^2n^2}\right)^2\left[1-e^{-\frac{4\pi^2n^2}{1+4\pi^2n^2}T}\right] - \dfrac{1+4\pi^2n^2}{4\pi^2n^2}Te^{-\frac{4\pi^2n^2}{1+4\pi^2n^2}T}\right]}{\dfrac{1+4\pi^2n^2}{4\pi^2n^2}\left[1-e^{-\frac{4\pi^2n^2}{1+4\pi^2n^2}T}\right]+T} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} f_0 = \frac{2(\psi_0-\varphi_0)}{T^2}, \quad f_{1n} = 4\pi^2n^2\varphi_{1n} - 4\pi^2n^2C_{1n}, \\ f_{2n} = 4\pi^2n^2\varphi_{2n} - 4\pi^2n^2C_{2n} - 4\pi n\varphi_{1n} + 4\pi nC_{1n}, \end{gathered} \tag{13}$$

где φ_0, φ_{1n}, φ_{2n} и ψ_0, ψ_{1n}, ψ_{2n}– соответственно коэффициенты разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд по системам (7):

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x)dx, \quad \varphi_{1n} = \int_0^1 \varphi(x)\cos 2\pi nx dx, \quad \varphi_{2n} = \int_0^1 \varphi(x)x\sin 2\pi nx dx,$$

$$\psi_0 = \int_0^1 \psi(x)dx, \quad \psi_{1n} = \int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi nx dx, \quad \psi_{2n} = \int_0^1 \psi(x)x\sin 2\pi nx dx.$$

Подставляя найденные коэффициенты $u_0(t)$, $u_{1n}(t)$, $u_{2n}(t)$ и f_0, f_{1n}, f_{2n} в (8)-(9), получим решения обратной задачи (1)-(4)

$$\begin{gathered} u(x,t) = \varphi(x) + 2\frac{2(\psi_0-\varphi_0T)}{T^2}t(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} 4C_{1n}\left[e^{-\sigma_n t}-1\right](1-x)\cos 2\pi nx + \\ \sum_{n=1}^{\infty} 4C_{2n}\left[e^{-\sigma_n t}-1\right]\sin 2\pi nx + \sum_{n=1}^{\infty} 4\cdot\frac{4\pi n}{(1+4\pi^2n^2)^2}C_{1n}te^{-\sigma_n t}\sin 2\pi nx, \end{gathered} \tag{14}$$

$$f(x) = -\varphi''(x) + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n}\cos 2\pi nx + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}\sin 2\pi nx. \tag{15}$$

где $\sigma_n = \dfrac{4\pi^2n^2}{1+4\pi^2n^2} \le 1, \quad \forall n \in N.$

Теперь исследуем полученные решения (14)-(15) и их производные входящих в уравнение (1) на сходимости. Интегрируя по частям три раза выражение для коэффициентов C_{1n} в (12) с учетом условий $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^3[0,1]$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$ и $\psi'(0) = \psi'(1)$ получим

$$\begin{gathered} C_{1n} = \frac{\psi_{1n} - \varphi_{1n}T}{\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]\delta_n + T} = \frac{1}{\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]\delta_n + T}\int_0^1 \left[\psi(x) - T\varphi(x)\right]\cos 2\pi nx dx = \\ \frac{1}{\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]\delta_n + T}\cdot\frac{1}{8\pi^3n^3}\left(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)}T\right). \end{gathered} \tag{16}$$

где $\varphi_{1n}^{(3)}$, $\psi_{1n}^{(3)}$–коэффициенты разложения функций $\varphi'''(x)$, $\psi'''(x)$ в ряд Фурье по системе (7) при косинусах и синусах, а $\delta_n = \dfrac{1}{\sigma_n} = \dfrac{1+4\pi^2n^2}{4\pi^2n^2} < 2, \ \forall n \in N$.

Аналогично, интегрируя по частям три раза выражение для C_{2n} в (12) на основании условий $\varphi(x), \ \psi(x) \in C^3[0,1], \ \ \varphi(1)=0, \ \psi(1)=0, \ \ \varphi''(0)=\varphi''(1)$ и $\psi''(0)=\psi''(1)$ имеем

$$\begin{gathered} C_{2n} = \frac{\psi_{2n} - \varphi_{2n}T - \dfrac{4\pi n}{1+4\pi^2n^2}C_{1n}\left[\delta_n^2\left[1-e^{-\sigma_nT}\right] - \delta_nT\cdot e^{-\sigma_nT}\right]}{\delta_n\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]+T} = \\ \frac{\left(\psi_{2n}^{(3)} - \varphi_{2n}^{(3)}T\right) + 3\left(\psi_{1n}^{(2)} - \varphi_{1n}^{(2)}T\right)}{\delta_n\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]+T}\cdot\frac{1}{8\pi^3n^3} + \\ \frac{1}{2\pi^2n^2\left(1+4\pi^2n^2\right)}\cdot\frac{\left[\delta_n^2\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]-\delta_nT\cdot e^{-\sigma_nT}\right]}{\delta_n\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]+T}\left(\psi_{1n}^{(3)} - \varphi_{1n}^{(3)}T\right). \end{gathered} \tag{17}$$

где $\varphi_{2n}^{(3)}$, $\psi_{2n}^{(3)}$– коэффициенты разложения функций $\varphi'''(x)$, $\psi'''(x)$ в ряд Фурье по системе (6) при синусах и косинусах.

По условию теоремы, функции $\varphi'''(x)$ и $\psi'''(x)$ непрерывны на сегменте [0,1], то в силу неравенства Бесселя для тригонометрического ряда, сходятся и следующие ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_{in}^{(3)}\right|^2 \le G\left\|\varphi'''(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\psi_{in}^{(3)}\right|^2 \le G\left\|\psi'''(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}, \quad i=1,2. \tag{18}$$

Подставляя (16) и (17) в (14), (15), получим соответственно

$$\begin{gathered} u(x,t) = \varphi(x) + 2\frac{2\left(\psi_0-\varphi_0\right)}{T^2}t(1-x) + \\ \sum_{n=1}^{\infty}4\frac{1}{\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]\delta_n+T}\cdot\frac{1}{8\pi^3n^3}\left(\psi_{1n}^{(3)}-\varphi_{1n}^{(3)}T\right)\left[e^{-\sigma_nt}-1\right](1-x)\cos 2\pi nx + \\ \sum_{n=1}^{\infty}4\frac{\left(\psi_{2n}^{(3)}-\varphi_{2n}^{(3)}T\right)+3\left(\psi_{1n}^{(2)}-\varphi_{1n}^{(2)}T\right)}{\delta_n\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]+T}\cdot\frac{1}{8\pi^3n^3}\left[e^{-\sigma_nt}-1\right]\sin 2\pi nx + \\ \sum_{n=1}^{\infty}4\frac{\left(\psi_{1n}^{(3)}-\varphi_{1n}^{(3)}T\right)}{2\pi^2n^2\left(1+4\pi^2n^2\right)}\cdot\frac{\left[\delta_n^2\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]-\delta_nT\cdot e^{-\sigma_nT}\right]}{\delta_n\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]+T}\left[e^{-\sigma_nt}-1\right]\sin 2\pi nx + \\ \sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\frac{4\pi n}{\left(1+4\pi^2n^2\right)^2}\frac{1}{\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]\delta_n+T}\cdot\frac{\left(\psi_{1n}^{(3)}-\varphi_{1n}^{(3)}T\right)}{8\pi^3n^3}te^{-\sigma_nt}\sin 2\pi nx, \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} f(x) = -\varphi''(x) + \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_{1n}-\varphi_{1n}T}{\delta_n\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]+T}\cos 2\pi nx + \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_{2n}-\varphi_{2n}T - \dfrac{4\pi n}{1+4\pi^2n^2}C_{1n}\left[\delta_n^2\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]-\delta_nTe^{-\sigma_nT}\right]}{\delta_n\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]+T}. \end{gathered} \tag{20}$$

Ряды (19) и (20) при любом $(x,t)\in\bar{Q}$ мажорируются сходящим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_{1n}^{(3)}\right| + \left|\varphi_{2n}^{(3)}\right|}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_{1n}^{(3)}\right|}{n^6} \tag{21}$$

Следовательно ряды (14), (15) в силу теоремы Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно в замкнутой области $\bar{Q}$ и функции $u(x,t)$, $f(x)$ непрерывны на $\bar{Q}$. Теперь исследуем на сходимости рядов для их производные.

Теперь по членном дифференцируя ряда (19) один раз по переменной t и два раза по переменной x, покажем, что полученные при по членном дифференцировании ряды сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{Q}$.

$$u_t(x,t) = 2\frac{2\left(\psi_0-\varphi_0\right)}{T^2}(1-x)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\left(\psi_{2n}^{(3)}-\varphi_{2n}^{(3)}T\right)+3\left(\psi_{1n}^{(2)}-\varphi_{1n}^{(2)}T\right)}{\delta_n\left[1-e^{-\sigma_n T}\right]+T}\cdot\frac{-\sigma_n}{8\pi^3n^3}e^{-\sigma_n t}\sin 2\pi nx+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\left(\psi_{1n}^{(3)}-\varphi_{1n}^{(3)}T\right)}{2\pi^2n^2\left(1+4\pi^2n^2\right)}\cdot\frac{\left[\delta_n^2\left[1-e^{-\sigma_n T}\right]-\delta_n T\cdot e^{-\sigma_n T}\right]}{\delta_n\left[1-e^{-\sigma_n T}\right]+T}\left(-\sigma_n\right)e^{-\sigma_n t}\sin 2\pi nx+ \tag{22}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\cdot\frac{4\pi n}{\left(1+4\pi^2n^2\right)^2}\frac{1}{\left[1-e^{-\sigma_n T}\right]\delta_n+T}\cdot\frac{\left(\psi_{1n}^{(3)}-\varphi_{1n}^{(3)}T\right)}{8\pi^3n^3}\left[e^{-\sigma_n t}-\sigma_n te^{-\sigma_n t}\right]\sin 2\pi nx,$$

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{1}{\left[1-e^{-\sigma_n T}\right]\delta_n+T}\cdot\frac{\left(\psi_{1n}^{(3)}-\varphi_{1n}^{(3)}T\right)}{8\pi^3n^3}\left[e^{-\sigma_n t}-1\right]4\pi n\sin 2\pi nx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{1}{\left[1-e^{-\sigma_n T}\right]\delta_n+T}\cdot\frac{\left(\psi_{1n}^{(3)}-\varphi_{1n}^{(3)}T\right)}{8\pi^3n^3}\left[e^{-\sigma_n t}-1\right]4\pi^2n^2(1-x)\cos 2\pi nx-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\left(\psi_{2n}^{(3)}-\varphi_{2n}^{(3)}T\right)+3\left(\psi_{1n}^{(2)}-\varphi_{1n}^{(2)}T\right)}{\delta_n\left[1-e^{-\sigma_n T}\right]+T}\cdot\frac{1}{2\pi n}\left[e^{-\sigma_n t}-1\right]\sin 2\pi nx- \tag{23}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{2\left(\psi_{1n}^{(3)}-\varphi_{1n}^{(3)}T\right)}{\left(1+4\pi^2n^2\right)}\cdot\frac{\left[\delta_n^2\left[1-e^{-\sigma_n T}\right]-\delta_n T\cdot e^{-\sigma_n T}\right]}{\delta_n\left[1-e^{-\sigma_n T}\right]+T}\left[e^{-\sigma_n t}-1\right]\sin 2\pi nx-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\cdot\frac{4\pi n}{\left(1+4\pi^2n^2\right)^2}\frac{1}{\left[1-e^{-\sigma_n T}\right]\delta_n+T}\cdot\frac{\left(\psi_{1n}^{(3)}-\varphi_{1n}^{(3)}T\right)}{2\pi n}te^{-\sigma_n t}\sin 2\pi nx,$$

$$u_{xxt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{1}{\left[1-e^{-\sigma_n T}\right]\delta_n+T}\cdot\frac{\left(\psi_{1n}^{(3)}-\varphi_{1n}^{(3)}T\right)}{8\pi^3n^3}\left[e^{-\sigma_n t}-1\right]\left(-\sigma_n\right)4\pi n\sin 2\pi nx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{1}{\left[1-e^{-\sigma_n T}\right]\delta_n+T}\cdot\frac{\left(\psi_{1n}^{(3)}-\varphi_{1n}^{(3)}T\right)}{8\pi^3n^3}\left[e^{-\sigma_n t}-1\right]\left(-\sigma_n\right)4\pi^2n^2(1-x)\cos 2\pi nx-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{2\left(\psi_{1n}^{(3)}-\varphi_{1n}^{(3)}T\right)}{(1+4\pi^2n^2)}\cdot\frac{\left[\delta_n^2\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]-\delta_nT\cdot e^{-\sigma_nT}\right]}{\delta_n\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]+T}\left(-\sigma_n\right)e^{-\sigma_nt}\sin 2\pi nx- \tag{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\cdot\frac{4\pi n}{(1+4\pi^2n^2)^2}\frac{1}{\left[1-e^{-\sigma_nT}\right]\delta_n+T}\cdot\frac{\left(\psi_{1n}^{(3)}-\varphi_{1n}^{(3)}T\right)}{2\pi n}\left[e^{-\sigma_nt}-\sigma_nte^{-\sigma_nt}\right]\sin 2\pi nx,$$

которые при любом $(x,t)\in\overline{Q}$ мажорируются рядами

$$|u_t|\leq C\left(T\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{1n}^{(3)}\right|+\left|\psi_{2n}^{(3)}\right|+\left|\psi_{1n}^{(2)}\right|}{n^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{1n}^{(3)}\right|}{n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{1n}^{(3)}\right|}{n^5}\right)$$

$$|u_{xx}|\,,|u_{xxt}|\leq C\left(T\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{1n}^{(3)}\right|+\left|\psi_{2n}^{(3)}\right|+\left|\psi_{1n}^{(2)}\right|}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{1n}^{(3)}\right|}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{1n}^{(3)}\right|}{n^4}\right)$$

Сходимость последних рядов следуют из сходимости рядов (18) и оценки

$$\frac{1}{n}\left(\left|\varphi_{in}^{(k)}\right|+\left|\psi_{in}^{(k)}\right|\right)\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+2\left(\left|\varphi_{in}^{(k)}\right|^2+\left|\psi_{in}^{(k)}\right|^2\right)\right),\ i=1,2,\ k=2,3.$$

Тогда на основании признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{Q}$. Следовательно, законно дифференцирование ряда (14), и функции u_{xx}, u_{xxt} и u_t непрерывны в замкнутой области $\overline{Q}$.

Теорема 2 *Пусть выполняются условия в* (5) *и дополнительно* $\varphi(x)$, $\psi(x)\in C^3[0,1]$, $\varphi''(1)=\varphi''(1)$, $\psi''(0)=\psi''(1)$. *Тогда классическое решение обратной задачи* (1)-(4) *единственно.*

Доказательство единственности. Предположим, что существует две разные решения $\{u_1(x,t),\ f_1(x)\}$ и $\{u_2(x,t),f_2(x)\}$ задачи (1)-(4). Обозначим разностей $\bar{u}(x,t)=u_2(x,t)-u_1(x,t)$ и $\bar{f}(x)=f_2(x)-f_1(x)$. Тогда функции $\overline{u}(x,t)$, $\overline{f}(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\bar{u}_t-\bar{u}_{xx}-\bar{u}_{xxt}=\bar{f}(x),\ (x,t)\in Q, \tag{25}$$

граничным условиям

$$\bar{u}\left(1,t\right)=0,\ \ \bar{u}_x\left(0,t\right)=\bar{u}_x\left(1,t\right),\ \ t\in\left[0,T\right], \tag{26}$$

и нулевые начальные и интегральные условия

$$\bar{u}\left(x,0\right)=0,\ \int_0^T\bar{u}\left(x,t\right)dt=0,\quad x\in\left[0,1\right]. \tag{27}$$

Используя биортогональный к (6) базис (7), вычислим

$$\bar{u}_0(t) = \int_0^1 \bar{u}(x,t)dx, \tag{28}$$

$$\bar{u}_{1n}(t) = \int_0^1 \bar{u}(x,t)\cos 2\pi nx dx, n = 1,2,..., \tag{29}$$

$$\bar{u}_{2n}(t) = \int_0^1 \bar{u}(x,t)x\sin 2\pi nx dx, n = 1,2,..., \tag{30}$$

$$\bar{f}_0 = \int_0^1 \bar{f}(x)dx, \quad \bar{f}_{1n} = \int_0^1 \bar{f}(x)\cos 2\pi nx dx, \bar{f}_{2n} = \int_0^1 \bar{f}(x)x\sin 2\pi nx dx, \ n = 1,2,....$$

Дифференцируя формулу (25) один раз по t и учитывая уравнение (1), имеем

$$\bar{u}_0'(t) = \int_0^1 \bar{u}_t(x,t)dx = \int_0^1 \bar{u}_{xx}(x,t)dx + \int_0^1 \bar{u}_{xxt}(x,t)dx + \bar{f}_0.$$

Вычисляя последней интеграл и учитывая граничные условия (26),(27), получим, что $\bar{u}_0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{u}_0'(t) = \bar{f}_0 \tag{31}$$

и краевым условиям

$$\bar{u}_0(0) = 0, \quad \int_0^T \bar{u}_0(t)\,dt = 0. \tag{32}$$

Общее решение уравнение (31) имеет вид

$$\bar{u}_0(t) = \bar{f}_0 t + K_0,$$

где C_0 произвольная постоянная. Учитывая, что это решение удовлетворяет условиям (32), находим $K_0 = 0$, $\bar{f}_0 = 0$ и следовательно $\bar{u}_0(t) \equiv 0$.

Дифференцируя (29) под знаком интеграла один раз и учитывая условия (26), (27), заключаем, что $\bar{u}_{1n}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{u}_{1n}'(t) + \frac{4\pi^2 n^2}{1+4\pi^2 n^2}\bar{u}_{1n}(t) = \frac{\bar{f}_{1n}}{1+4\pi^2 n^2} \tag{33}$$

и краевым условиям

$$\bar{u}_{1n}(0) = 0, \quad \int_0^T \bar{u}_{1n}(x,t)\,dt = 0. \tag{34}$$

Общее решение уравнения (29) имеет вид

$$\bar{u}_{1n}(t) = \frac{\bar{f}_{1n}}{4\pi^2 n^2} + C_{1n} e^{-\frac{4\pi^2 n^2}{1+4\pi^2 n^2}t},$$

где $C_{1n}-$ произвольная постоянная. Используя условия (34), получаем, что $K_{1n} = 0$, $\bar{f}_{1n} = 0$ и $\bar{u}_{1n}(t) \equiv 0$ для $n = 1, 2, \ldots$.

Аналогично получаем следующую задачу для $\bar{u}_{2n}(t)$

$$\bar{u}'_{2n}(t) + \frac{4\pi^2 n^2}{1+4\pi^2 n^2}\bar{u}_{2n}(t) = \frac{\vec{f}_{2n}}{1+4\pi^2 n^2} + \frac{4\pi n}{1+4\pi^2 n^2}\bar{u}_{1n}(t) + \frac{4\pi n}{1+4\pi^2 n^2}\bar{u}'_{1n}(t) \tag{35}$$

$$\bar{u}_{2n}\left(0\right) = 0, \quad \int_0^T \bar{u}_{2n}\left(x,t\right) dt = 0. \tag{36}$$

которая также имеет тривиальное решение $\bar{u}_{2n}(t) \equiv 0$ для $n = 1, 2, ...$

В результате получили, что для любого фиксированного $t \in [0, T]$ функции $\bar{u}(x,t), \bar{f}(x)$ ортогональны системе функций $\{1, \, \{\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}, \{x \sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}\}$, которая является замкнутой и полной в $L_2\left(0,1\right)$. Тогда $\overline{u}(x,t) \equiv 0$, $\bar{f}(x) \equiv 0$. Единственность решения задачи доказана.

3 Методы исследования

В работе исследованы современные методы решения прямых и обратных задач для уравнений в частных производных. В частности с помощью методами Фурье и априорных оценок доказаны существования и единственность классического решения исследуемой задачи.

4 Заключение

В работе исследована однозначная разрешимость одной обратной задачи определения коэффициент правой части, зависящей от пространственным переменным для линейного псевдо-параболического уравнения третьего порядка. В качестве дополнительной информации рассматривается интегральное условие переопределения. Подобные уравнения рассматриваемые в данной работе возникают при описании процессов тепломассопереноса, процессов движение неньютоновских жидкостей, волновых процессов и во многих других областях. С помощью Фурье доказана теорема существования классического решений данной задачи. Используя специально выбранном базису и методом априорных оценок также доказаны единственность решения. Результаты данной работы могут быть применены для решения различных обратных задач для линейных и нелинейных уравнений математической физики.

5 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерством науки и образования Республики Казахстан (грант **№ AP05132041** "Теория и методы решения прямых и обратных задач для уравнений Навье-Стокса и уравнений в частных производных" 2018-2020 годы)

Список литературы

[1] *Кожанов А.И.* О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности// Сибирский мат. журнал. - 2005. - Т. 46. - Вып. 5. - С. 1053-1071.

[2] *Cannon, J.R.* Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral.Math. Soc. Ser. B - 1991. - Vol. 33. - P. 149-163.

[3] *Камынин, В.Л.* Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения //Матем. заметки - 2005. - Т. 77. - Вып. 4. - С. 522-534.

[4] *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи //Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.

[5] *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for parabolic equations // Utrecht: VSP, 2002.

[6] *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics // New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.

[7] *Isakov V.* Inverse priblems for equations of parabolic type // Berlin: Springer-Verl., 2006.

[8] *Kaliev I.A, Sabitova M.M.* Problems of determining the temperature and density of heat sources from the initial and final temperatures // Russian Mathematics. - 2012. - T. 56. - №2. - C. 60-64.

[9] *Иванчов Н.И* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении //Сибирский мат. журнал. - 1998. - Т. 39. - №3. - С. 539-550.

[10] *Асанов А., Атаманов Э. Р.* Обратная задача для операторного псевдопараболического интегродифференциального уравнения //Сиб. мат. журн. 1995. Т. 38, № 4. С. 752-762.

[11] *Аблабеков Б.С.* Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. - 181 с.

[12] *Abylkairov U. U., Kh. Khompysh* An inverse problem of identifring the coefficient in Kelvin-Voight equations //Applied Mathematical Sciences - 2015. - T. 9. - №102. - P. 5079 - 5088.

[13] *Fedorov V. E., Urazaeva A. V.* An inverse problem for linear Sobolev type equation //J. of Inverse and Ill-posed Problems - 2004. - Vol. 33. - P. 387-395.

[14] *Lyubanova A. Sh., Tani A.* An inverse problem for pseudoparabolic equation of fitration: the existence, uniqueness and regularity //Appl. Anal - 2011. - Vol. 90. - P. 1557-1568.

[15] *Ионкин Н. И., Моисеев Е. И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями //Дифференц. уравнения. - 1999. - Т. 35, № 8. - С. 1094-1100.

[16] *Моисеев Е. И.* О решении спектральном методом одной нелокальной краевой задачи //Дифференц. уравнения. - 1999. - Т. 35, № 8. - С. 1094-1100.

References

[1] *Kozhanov A.I.* "O razreshimosti obratnoi zadachi nahozhdenia koeffitsienta teploprobodnosti". Sibirski mat. zhurnal., vol. 46, no 5 (2005):1053-1071.

[2] *Cannon, J.R.* "Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation". J. Austral.Math. Soc. Ser., vol. 33 (1991): 149-163.

[3] *Kaminyn, B.L.* "Ob obratnoi zadache opredelenia praboi chasti v parabolicheskim urabnenii s uslobiem integralnogo pereopredelenia". Matem. zametki., vol.77, no 4 (2005): 522-534.

[4] *Kabanihin C. И.* "Obratnye i nekorretnye zadachi". Sib. nauch. izd-vo., (2009).

[5] *Belov Yu. Ya.* "Inverse problems for parabolic equations". Utrecht. VSP., (2002).

[6] *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* "Methods for solving inverse problems in mathematical physics". New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.

[7] *Isakov V.* "Inverse priblems for equations of parabolic type"// Berlin: Springer-Verl., 2006.

[8] *Kaliev I.A, Sabitova M.M.* "Problems of determining the temperature and density of heat sources from the initial and final temperatures". Russian Mathematics., vol. 56, no 2. (2012): 60-64.

[9] *Ibanchov N.I.* "Ob oporedelenii zabiciachego ot bremeni starshego koeffitsienta b para bolicheskim urabnenii". Sibirski mat. zhurnal., vol. 39, no 3. (1998): 539-550.

[10] *Asanov A., Atamanov E. R.* "Obratnaia zadacha dlia operatornogo pseudoparabolicheskogo integrodifferentsialnogo urabnenia". Sib. mat. zhurn., vol. 38, no 4. (1995): 752-762.

[11] *Ablabekov B.S.* "Obrathye zadazhi dlia pseudoparabolicheskih urabnenii". - (Bishkek: Ilim, 2001), 181.

[12] *Abylkairov U. U., Kh. Khompysh* "An inverse problem of identifring the coefficient in Kelvin-Voight equations". Applied Mathematical Sciences., vol. 9. no 102. (2015): 5079 - 5088.

[13] *Fedorov V. E., Urazaeva A. V.* "An inverse problem for linear Sobolev type equation". J. of Inverse and Ill-posed Problems., vol. 33. (2004): 387-395.

[14] *Lyubanova A. Sh., Tani A.* "An inverse problem for pseudoparabolic equation of fitration: the existence, uniqueness and regularity". Appl. Anal., vol. 90. (2011): 1557-1568.

[15] *Ionkin N. I., Moiseev E. I.* "O zadache dlia urabnenia teploprobeodnosti s dbutochechnymi kraebymi usloviami". Differents. urabnenia., vol. 35, no 8. (1999): 1094-1100.

[16] *Moiseev E. I.* "O reshenii spektralnom metodom odnoi nelokalnoi kraeboi zadachi ". Differents. urabnenia., vol. 35, no 8. (1999): 1094-1100.

[17] *V. G Zvyagin and M. V. Turbin.* "Investigation of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids". *Translated from the Russian in J. Math. Sci.*, vol. 168, no 2. (2010): 157-308.

[18] *R. E. Showalter, T. W. Ting.* "Pseudoparabolic partial differential equations". SIAM J. Math. Anal., vol. 1. (1970): 1-26.

[19] *A. G. Sbeshnikov, A. B. Alshin, M. O. Korpusov, Iu. D. Pletner* "Lineinye i nelineinye urabnenia sobolevckogo tipa"// Moskba: Fizmatlit., 2007.