УДК 517.957

З.Р. Рахмонов

Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан, г. Ташкент
E-mail: zraxmonov@inbox.ru

Об одной нелинейной задачи неньютоновской фильтрации в неоднородной среде с нелокальным граничным условием

В настоящей работе изучается глобальная разрешимость и неразрешимость одной нелинейной задачи неньютоновской политропической фильтрации с нелокальным граничным условием в случае медленной диффузии, обобщающие ранее известные результаты других авторов. Найдены условия глобального существования по времени решения и неразрешимости решения задачи нелинейной фильтрации в неоднородной среде на основе метода эталонных уравнений, автомодельного анализа, метода сравнения решений. Изучено влияние неоднородности среды на эволюцию процесса. Получена критическая экспонента типа Фуджита и критическая экспонента глобального существования по времени решения, играющий важный роль при исследованиях качественных свойств нелинейных моделей реакции - диффузии, теплопроводности, фильтрации и других физических, химических, биологических процессов. В случае глобальной разрешимости получен главный член асимптотика решений, включая критическое значение параметра. Для численного исследования рассматриваемой задачи предложен способ выбора подходящего начального приближения для итерационного процесса. Используя асимптотические формулы в качестве начального приближения для итерационного процесса, произведены численные расчеты и анализ результатов. Результаты численных экспериментов показывают, что полученные результаты хорошо согласуются с физикой рассматриваемого процесса нелинейной фильтрации

Ключевые слова: фильтрация, диффузия, асимптотика, критическая экспонента, неограниченные решения, численный анализ.

Z.R. Rakhmonov

On one nonlinear problem of non-Newtonian Filtration in an inhomogeneous medium with nonlocal boundary conditions

In this paper we study the global solvability and nosolvability of a nonlinear problem of non-Newtonian filtration with nonlocal boundary condition in the case of slow diffusion, which generalized early known results other authors. On the basis of the method of standard equations, self - similar analysis, the comparison method solutions the conditions of global existence and nonexistence solutions of the nonlinear filtering problem in an inhomogeneous medium found and shows the effect inhomogeneity's of the medium in these conditions. Establish the critical global existence exponent and critical Fujita exponent, which play an important role in the study of qualitative properties of nonlinear models of reaction - diffusion, thermal conductivity, filtering, and other physical, chemical, and biological processes. In the case of the global solvability the leading term of the asymptotics of solutions obtain. And at critical values of the parameters the asymptotic behavior of solutions proved. Provided a method of selecting a suitable initial approximation for the iterative process in numerical studies of the problem.Using the asymptotic formula as the initial approximation for the iterative process, a numerical calculation carried out and analyzed the results.Results of numerical experiments show that the obtained results are in good agreement with the physics of the process of nonlinear filtering.

Key words: filtration, diffusion, asymptotic behavior, critical exponent, blow-up, numerical analysis.

З.Р. Рахмонов

Төңіректік емес шекаралық шартпен берілген біртексіз ортадағы ньютондық емес фильтрацияның сызықтық емес бір есебі жайлы

Бұл жұмыста басқа авторлардың бұрыннан белгілі нәтижелерін жалпылайтын баяу диффузия жағдайында төңіректік емес шекаралық шартпен берілген сызықты емес фильтрация есебінің ғаламдық шешілетін немесе шешілмейтіндігі зерттелген. Шешімдерді салыстыру әдісі, автомоделдік талдау, эталондық теңдеулер әдісі негізінде біртексіз ортада сызықты емес фильтрация есебінің уақыт бойынша шешімінің ғаламдық бар болуының және шешімнің шешілмейтіндігінің шарттары табылған. Орта біртексіздігінің процесс эволюциясына әсері зерттелген.Сызықты емес реакция моделдері-диффузия, жылуөткізгіштік, фильтрация және басқа да физикалық, химиялық, биологиялық үрдістердің сапалық қасиеттерін зерттеуде маңызды рөл атқаратын Фуджит түріндегі кретикалық экспонента және уақыт бойынша шешімінің галамдық бар болуының кретикалық экспонентасы алынған. Ғаламдық шешілетіндік жағдайында параметрдің кретикалық мәнімен қоса шешім асимпотикасының басты мүшесі алынған.Қарастырылып отырған есепті зерттеу үшін итерациялық процеске лайықты бастапқы жуықтауды таңдау тәсілі ұсынылған. Итерациялық процеске лайықты бастапқы жуықтау ретінде асимптотикалық формулаларды пайдалана отырып сандық есептеулер жүргізілген, алынған нәтижелерге салыстырулар жасалған.Сандық тәжірибе нәтижесі қарастырылып жатқан сызықтық емес фильтрация процесінің физикасымен есептеу нәтижелерің жақсы үйлесетіндігін көрсетеді.

Түйін сөздер: фильтрация, диффузия, асимптотика, кретикалық экспонент, шексіз шешімдер, сандық талдау.

Введение

В данной работе исследуется качественные свойства решений следующего ква-зили нейного параболического уравнения

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}\right),\qquad (x,t)\in R_+\times(0,\ +\infty),\tag{1}$$

с нелинейным граничным

$$-\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}\ (0,t)=u^q(0,t),\quad t>0,\tag{2}$$

и начальным условием

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0,\quad x\in R_+,\tag{3}$$

где $\rho(x)=(1+x)^n$, $n>0$, $m>1$, $q\geq 0$, $p>1+1/m$ - заданные числовые параметры, $u=u(t,x)\geq 0$ - искомое решение. Уравнение (1) описывает многие физические процессы. Например, при $m>1$, $1<p\neq 2$ уравнение (1) рассматривается как неньютоновской политропической фильтрации, а при $m>1$, $p=2$ ньютоновской диффузии [3] и т.д при наличие переменной плотности $\rho(x)$. Уравнение (1) принято называть параболическим уравнением с неоднородной плот-ностью [17]. При различных значениях параметров задача (1)-(3) изучалась многими авторами [1, 4, 6-10] (подробно см. в библиографию [4, 6-8, 10]). В работе Галактинова и Левина [12] изучена задача (1)-(3) при $m=1$, $n=0$. Авторы показали, что критическими показателями для задачи (1)-(3) при $m=1$, $n=0$ являются $q_0=2(p-1)/p$ и $q_c=2(p-1)$. Недавно, Z. X. Jiang и S. N. Zheng в [8] исследовали следующую нелокальную задачу:

$$\begin{aligned} u_t &= \left(|u_x|^{\beta}(u^m)_x\right)_x, && x>0,\ 0<t<T,\\ -|u_x|^{\beta}(u^m)_x(0,t) &= u^p(0,t), && 0<t<T,\\ u(x,0) &= u_0(x), && x>0, \end{aligned}$$

где $m \geq 1$, $p > 0$, $\beta > 0$, и установили критическую экспоненту глобального существования решения

$$p_0 = \frac{2\beta+m+1}{\beta+2}$$

и критическую экспоненту типа Фужита

$$p_c = 2\beta + m + 1.$$

В работе Wanjuan Du и Zhongping Li [10] рассмотрены задачи (1)-(3) в многомерным случае при $m = 1$, $n = 0$. Ими получены критическая экспонента глобального существования решения

$$q_0 = 2(p-1)/p$$

и критическая экспонента типа Фужита

$$q_c = (1 + 1/N)(p-1)$$

с помощью построения нижних и верхних решений. В работе [18] получена оценка и асимптотика решений автомодельных уравнений для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^k}{\partial x}\right), (x,\ t) \in R_+ \times (0, +\infty),$$

$$-\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^k}{\partial x}(0,\ t) = \ u^q(0,\ t), \quad t \in (0,\ +\infty),$$

$$u(x,0) \ = \ u_0(x),\ x \in R_+,$$

Некоторые свойства решений задачи (1)-(3) были при постоянной плотности изучены в [6]. В случае медленной диффузии было доказано, что при $(m+1)(p-1)/p < q < (m+1)(p-1)$ решение взрывается за конечное время для произвольной начальной функции $u_0 \neq 0$. Кроме того доказаны, что при: $0 \leq q \leq (m+1)(p-1)/p$ всякое решение задачи (1)-(3) является глобальным; $q > (m+1)(p-1)$ всякое решение задачи (1)-(3) является глобальным, если u_0 достаточно мало; Аналогичные результаты в случае быстрой диффузии также были получены в работе [7]. В работе Z. Li, Ch. Mu и W. Du [11] рассмотрена следующая задача Коши

$$\rho_1(x)\frac{\partial u}{\partial t} = div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + \rho_2(x)u^q, \tag{5}$$

$$u\left|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \;\; x \in R^N \right., \tag{6}$$

где $\rho_1(x) = |x|^m$, $\rho_2(x) = |x|^n$, $n \geq m > 0$, $\nabla(\cdot) = grad_x(\cdot)$, $p > 1$, q - заданные вещественные положительные числа, в случае быстрой диффузии $\frac{2N+m}{N+m+1} < p < 2$ при $q > 1$ и $0 < m \leq n < qm + N(q-1)$. Ими получены критическая экспонента типа Фужита:

$$q_c = p - 1 + \frac{p+n}{N+m}$$

и доказаны, что при $1 < q < q_c$ всякое нетривиальное решение задачи (5), (6) является неограниченным, а если $q > q_c$, тогда задачи Коши (5), (6) имеет глобальное решение при достаточно малых начальных данных. Основной целью данной работы является нахождение условий существования и не существования в целом по времени решений задачи (1)-(3) на основе автомодельного анализа и метода эталонных уравнений [2], получение критической экспоненты глобаль-ного существования решения и критической экспоненты типа Фужита. В случае сущест-вования решения в целом по времени получен главный член асимптотики решений задачи (1)-(3). На основе асимптотики решений предложены подходящие начальные приближения для итерационного процесса для случая медленной диффузии ($p > 1 + 1/m$) в зависимости от значения числовых параметров. При отдельных пунктах доказа-тельства оценки решений нами была использована методика, примененная в [1, 2, 6, 7].

Оценка решений Сформулируем результаты о глобальной разрешимости или неразрешимости задачи (1)-(3). Введем обозначения

$$q_0 = \frac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n}, q_c = m(p-1) + \frac{p-1}{n+1}.$$

Теорема 1 *Если $0 \leq q \leq q_0$, то всякое решение задачи (1)-(3) является глобаль-ным.*
Доказательство. Пусть

$$u_+(t,x) = e^{L(T+t)} g(\xi), \xi = \frac{1+x}{e^{K(T+t)}} \tag{7}$$

где $L > 0$, $T > 0$, $K = L[m(p-1)-1]/(p+n)$ и $g(\xi)$ удовлетворяет следующей задаче

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{dg^m}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{dg^m}{d\xi}\right) + K\xi^{n+1}\frac{dg}{d\xi} - L\xi^n g = 0, \xi > 0, \tag{8}$$

$$-\left|(g^m)'\right|^{p-2}(g^m)'(1) = g^{q_0}(1). \tag{9}$$

Тогда применяя теореме о неподвижной точке, можно показать, что существует единственное неотрицательное и нетривиальное решение задачи (8), (9) и это решение имеет компактный носитель. Кроме того, выбирая достаточно большой $T > 0$ имеем $u_+(x,0) \geq u_0(x)$ и $u_+(0,t) \geq 1$. Поэтому $u_+(x,t)$ является верхним решением задачи (8), (9) при $0 \leq q \leq q_0$ и по принципу сравнения следует $u(x,t) \leq u_+(x,t)$, $(x,t) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty)$.
Теорема 2 *Если $q > q_c$ и начальная функция $u_0(x)$ достаточно мала, то всякое решение задачи (1) - (3) является глобальным.*

Доказательство. Доказательство теоремы 2 основано на сравнение решения. Уравнение (1) допускает в области $Q_\infty = \{(t,x): \ \ 0 < t < +\infty, \ \ x \in R_+\}$ автомодельное решение следующего вида

$$u_+(t,x) = (T+t)^{-\gamma} f(\xi), \quad \xi = (1+x)(T+t)^{-\sigma} \tag{10}$$

где

$$\gamma = \frac{p-1}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}, \sigma = \frac{q-m(p-1)}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}.$$

Построим верхнее решение задачи (1)-(3). Для того чтобы $u_+(t,x)$ было верхним решением задачи (1)-(3) функция $f(\xi)$ должна удовлетворят следующим неравенствам [6, 7]

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{df^m}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^m}{d\xi}\right) + \sigma\xi^{n+1}\frac{df}{d\xi} + \gamma\xi^n f \le 0, \tag{11}$$

$$-\left|(f^m)'\right|^{p-2}(f^m)'(1) \ge f^q(1). \tag{12}$$

Рассмотрим следующую функцию

$$\bar{f}(\xi+h) = \left(a - b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)_+^{\frac{p-1}{m(p-1)-1}}, \tag{13}$$

где $b = \frac{m(p-1)-1}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)} > 0$, $a > 0$, $i_+ = \max(0, \ i)$. Поэтому так как

$$\bar{f}'(\xi) = -\frac{\sigma^{1/(p-1)}}{m}(\xi+h)^{(n+1)/(p-1)}\left(a - b|\xi+h|^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{m(p-1)-1}-1},$$

$$\left(\bar{f}^m\right)'(\xi) = -\sigma^{1/(p-1)}(\xi+h)^{(n+1)/(p-1)}\left(a - b|\xi+h|^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{\frac{m(p-1)}{m(p-1)-1}-1},$$

$$\left(\left|\left(\bar{f}^m\right)'\right|^{p-2}\left(\bar{f}^m\right)'\right)'(\xi) = -(n+1)\sigma\xi^n\bar{f} + \sigma\xi^{\frac{p(n+1)}{p-1}}\left(a - b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{m(p-1)-1}-1},$$

то легко видеть, что согласно условию теоремы 2 для (11) имеем

$$-\left(\frac{(q-m(p-1))(n+1)}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)} - \frac{p-1}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}\right)\xi^n\bar{f} \le 0 \tag{14}$$

Теперь проверим выполнение условия (12). Подставляя функцию $\bar{f}(\xi)$ вместо $f(\xi)$ в (12) получим следующее выражение:

$$\sigma(a-b)^{\frac{p-1}{m(p-1)-1}}\Big|_{\xi=1} \ge (a-b)^{\frac{q(p-1)}{m(p-1)-1}}\Big|_{\xi=1}. \tag{15}$$

и она справедливо при

$$(a-b) \le \sigma^{\frac{m(p-1)-1}{(q-1)(p-1)}}.$$

В заключение отметим, что полученное автомодельное решение $u_+(t,x)$ является верхним решением задачи (1)-(3). Согласно принципу сравнений решений следует, что $u(t,x)$-$\le u_+(t,x)$ в $(x,t)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, если $u_0(x)$ достаточно мало.

Теорема 3 *Пусть $q>q_0$, тогда всякое решение задачи (1)-(3) является неограниченным при достаточно больших начальных данных.*

Доказательство. Ищем решение задачи (1)-(3) в автомодельном виде

$$u_-(x,t)=(T-t)^{-\gamma}\vartheta(\xi),\ \xi=(1+x)(T-t)^{-\sigma}, \tag{16}$$

где $\vartheta(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\vartheta^m}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\vartheta^m}{d\xi}\right)-\sigma\xi^{n+1}\frac{d\vartheta}{d\xi}-\gamma\xi^n\vartheta=0, \tag{17}$$

где γ и σ заданные выше числа. Рассмотрим следующие функции

$$\bar\vartheta(\xi)=A(a-\xi)_+^{\frac{p-1}{m(p-1)-1}},$$

где $a>1$, A - определяется ниже. Покажем, что функция $\bar\vartheta(\xi)$ является нижним решением уравнения (17). Для этого функция $\bar\vartheta(\xi)$ согласному принципу сравнений решений должна удовлетворят следующим неравенствам

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\vartheta^m}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\vartheta^m}{d\xi}\right)-\sigma\xi^{n+1}\frac{d\vartheta}{d\xi}-\gamma\xi^n\vartheta\ge0, \tag{18}$$

$$-\left|(\vartheta^m)'\right|^{p-2}(\vartheta^m)'(1)\le\vartheta^q(1). \tag{19}$$

Так, как

$$\vartheta'(\xi)=-\frac{p-1}{m(p-1)-1}A(a-\xi)^{(p-1)/[m(p-1)-1]-1},$$

$$(\vartheta^m)'(\xi)=-\frac{m(p-1)}{m(p-1)-1}A^m(a-\xi)^{m(p-1)/[m(p-1)-1]-1},$$

$$\left(\left|(\vartheta^m)'\right|^{p-2}(\vartheta^m)'\right)'(\xi)=\left(\frac{p-1}{m(p-1)-1}\right)^pA^{m(p-1)}m^{p-1}(a-\xi)^{(p-1)/[m(p-1)-1]-1}.$$

то, из (18), (19) произведем следующее неравенств

$$\left(\frac{p-1}{m(p-1)-1}\sigma+\gamma\right)\xi^{n+1}+m^{p-1}A^{m(p-1)-1}\left(\frac{p-1}{m(p-1)-1}\right)^p-\gamma a\xi^n\ge0, \tag{20}$$

$$A^{m(p-1)}\left(\frac{m(p-1)}{m(p-1)-1}\right)^{p-1}(a-1)^{\frac{p-1}{m(p-1)-1}}\le A^q(a-1)^{\frac{q(p-1)}{m(p-1)-1}}. \tag{21}$$

Отсюда, в силу теоремы 3 и выбирая

$$1<a\le1+\frac{q-m(p-1)}{m(p-1)-1}$$

$$A^{q-m(p-1)} \geq \left(\frac{m(p-1)}{m(p-1)-1}\right)(a-1)^{-\frac{(q-1)(p-1)}{m(p-1)-1}}$$

убедимся в справедливости неравенств (20), (21). Таким образом, (16) является слабым нижним решением задачи (1)-(3). Тогда согласному принципа сравнения решений $u\,(x,t)$ взрывается за конечное время $T < +\infty$. Отметим, результат теоремы 3 содержит результаты работ [6, 7] при $n = 0$.

Теорема 4 *Если $q_0 < q < q_c$, то всякое нетривиальное решение задачи (1)-(3) является неограниченным.*

Доказательство. Пусть

$$u_1\,(x,t) = (\tau+t)^{-\frac{n+1}{m(p-1)(n+1)+p-1}}\,H\,(\varsigma)\,,\ \varsigma = (1+x)\,(\tau+t)^{-\frac{1}{m(p-1)(n+1)+p-1}}\,,$$

где $\tau \geq 0$,

$$H\,(\varsigma) = \left(c_1 - b_1\,|\varsigma|^{\frac{p+n}{p-1}}\right)_+^{\frac{p-1}{m(p-1)-1}}\,,\ b_1 = \frac{m\,(p-1)-1}{(p+n)\,m}\left(\frac{1}{m\,(p-1)\,(n+1)+p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Легко проверит, что $H'\,(\varsigma) = 0$ и в $\varsigma \in \{\varsigma > 0\,|\ H\,(\varsigma) \geq 0\}$ функция $H\,(\varsigma)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\varsigma}\left(\left|\frac{dH^m}{d\varsigma}\right|^{p-2}\frac{dH^m}{d\varsigma}\right) + \frac{1}{B_{mpn}}\varsigma^{n+1}\frac{dH}{d\varsigma} + \frac{n+1}{B_{mpn}}\varsigma^n H = 0$$

где $B_{mpn} = m\,(p-1)\,(n+1)+p-1$. С помощью хорошо известного свойства слабых решений задачи (1)-(3) получаем, что существует такое $t_0 \geq 0$, для которой $u\,(0,t_0) > 0$. Таким образом, при достаточно большом $\tau > 0$ и малом $c > 0$ выполняется

$$u\,(x,t_0) \geq u_1\,(x,t_0)\,,\ x \in (0,\,+\infty)$$

для всех $x > 0$. Тогда из принципа сравнения решений вытекает

$$u\,(x,t) \geq u_1\,(x,t)\,,\ (x,t) \in (0,+\infty) \times (t_0,\,+\infty)\,.$$

Теперь покажем, что существует $t_* > t_0$ и достаточно большое T для которых

$$u_1\,(x,t_*) \geq u_-\,(x,0)\,,\ x \in (0,\,+\infty)\,,$$

где $u_-\,(x,t)$ определенные выше функция. Поэтому имеет места следующее неравен-ства

$$(\tau+t_*)^{-\frac{n+p}{m(p-1)(n+1)+p-1}} \gg T^{-\frac{p-1}{q(p+n)-m(p-1)(n+1)-p+1}},$$

$$(\tau+t_*)^{-\frac{1}{(m(p-2)+k)(n+1)+p-1}} \ll T^{-\frac{q-m(p-1)}{q(p+n)-m(p-1)(n+1)-p+1}}.$$

Отсюда вытекает

$$\frac{(p-1)\,/\,(n+1)}{q\,(p+n)-m\,(p-1)\,(n+1)-p+1} > \frac{q-m\,(p-2)-k}{q\,(p+n)-m\,(p-1)\,(n+1)-p+1}$$

если $q < q_c$. Следовательно, $u(x,t_*) \geq u_1(x,t_*) \geq u_-(x,0)$ и поэтому решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3) является неограниченным.

Асимптотика решений автомодельных задач

Следующий этап сследования состоит в изучении асимптотики автомодельных решений задачи (1)-(3), позволивший получить численные результаты. Далее под асимптотики решений задачи (18), (19) понимается в следующем смысле: Будем говорит, что $\Phi_2(\eta)$ является асимптотикой функции $\Phi_1(\eta)$, если $\lim\limits_{\eta\to\infty}\frac{\Phi_1(\eta)}{\Phi_2(\eta)} = 1$, при $\Phi_2(\eta) \neq 0$ и $\lim\limits_{\eta\to\infty}\Phi_1(\eta) = 0$, при $\Phi_2(\eta) = 0$. Покажем, что функция (13) полученная на основе метода эталонных уравнений [2] будет асимптотикой автомодельной задачи (18), (19).

Теорема 5. *Финитное решение задачи (18), (19) при* $\xi \to (a/b)^{(p-1)/(p+n)} - h$ *имеет асимптотику* $f(\xi) \sim \bar{f}(\xi + h)$.

Доказательство. Будем искать решение уравнения (18) в следующем виде

$$f = \bar{f}(\xi + h)\, w(\eta), \tag{22}$$

где $\eta = -\ln\left(a - b\,|\xi + h|^{\frac{p+n}{p-1}}\right)$, причем $\eta \to +\infty$ при $\xi \to (a/b)_-^{(p-1)/(p+n)} - h$, что позволяет исследовать асимптотическую устойчивость решения задачи (18), (19) при $\eta \to +\infty$. Введем обозначение $r = m(p-1) - 1$. Тогда с учетом, что

$$f'(\xi) = -b(p+n)\,|\xi + h|^{\frac{n+1}{p-1}}\left(a - b\,|\xi + h|^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{m(p-1)-1}-1}\left(\frac{w}{r} - \frac{w'}{p-1}\right),$$

$$\left(f^m\right)'(\xi) = -bm(p+n)\,|\xi + h|^{\frac{n+1}{p-1}}\left(a - b\,|\xi + h|^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{\frac{m(p-1)}{m(p-1)-1}-1} w^{m-1}\left(\frac{w}{r} - \frac{w'}{p-1}\right),$$

подставляя (22) в (18) для $w(\eta)$ получим следующее уравнение

$$\frac{d}{d\eta}Lw + \left(\frac{\phi_1(\eta)}{\phi_2(\eta)}\frac{(n+1)(p-1)}{E} - \frac{p-1}{r}\right)Lw + \frac{(p-1)\,\sigma}{E^{p-1}m^{p-1}}\left(\frac{w}{r} - \frac{w'}{p-1}\right) -$$

$$-\frac{\gamma(p-1)\,w}{E^p m^{p-1}}\frac{\phi_1(\eta)}{\phi_2(\eta)} = 0, \tag{23}$$

здесь $Lw = w^r\left|\frac{w}{r} - \frac{w'}{p-1}\right|^{p-2}\left(\frac{w}{r} - \frac{w'}{p-1}\right)$, $\phi_1(\eta) = e^{-\eta}$, $\phi_2(\eta) = (a - e^{-\eta})/b$, $E = b(p+n)$, где η определенная выше переменная. Отметим, что изучение решений последнего уравнения является равносильным изучению тех решений уравнения (1), каждое из которых в некотором промежутке $[\eta_0, +\infty)$ удовлетворяет неравенствам:

$$w(\eta) > 0, \frac{w(\eta)}{r} - \frac{w'(\eta)}{p-1} \neq 0.$$

Покажем, прежде всего, что решения $w(\eta)$ уравнения (23) имеют конечный предел w_0 при $\eta \to +\infty$. Введем обозначение

$$\nu(\eta) = w^r\left|\frac{w}{r} - \frac{w'}{p-1}\right|^{p-2}\left(\frac{w}{r} - \frac{w'}{p-1}\right).$$

Тогда уравнение (23) имеет вид

$$v' = -\left(\frac{\phi_1(\eta)}{\phi_2(\eta)}\frac{(n+1)(p-1)}{E} - \frac{p-1}{r}\right)v - \frac{p-1}{E^{p-1}m^{p-1}}\left(\frac{w}{r} - \frac{w'}{p-1}\right) + \frac{\gamma(p-1)w}{E^p m^{p-1}}\frac{\phi_1(\eta)}{\phi_2(\eta)}.$$

Для анализа решений последнего уравнения введем вспомготельную функцию

$$\vartheta(\tau,\eta) = -\left(\frac{\phi_1(\eta)}{\phi_2(\eta)}\frac{(n+1)(p-1)}{E} - \frac{p-1}{r}\right)\tau - \frac{p-1}{E^{p-1}m^{p-1}}\left(\frac{w}{r} - \frac{w'}{p-1}\right) +$$
$$+\frac{\gamma(p-1)w}{E^p m^{p-1}}\frac{\phi_1(\eta)}{\phi_2(\eta)},$$

где τ - вещественное число. Отсюда нетрудно видеть, что при каждом значении τ функция $\vartheta(\tau,\eta)$ сохраняет знак на некотором промежутке $[\eta_1,\ +\infty) \subset [\eta_0,\ +\infty)$ и при всех $\eta \in [\eta_1,\ +\infty)$ выполняется одно из неравенств

$$\nu'(\eta) > 0, \nu'(\eta) < 0.$$

И поэтому для функции $\nu(\eta)$ существует предел при $\eta \in [\eta_1,\ +\infty)$. Из выражения для $\nu(\eta)$ следует, что

$$\lim_{\eta\to+\infty} \nu'(\eta) = \lim_{\eta\to+\infty}\left\{-\left(\frac{\phi_1(\eta)}{\phi_2(\eta)}\frac{(n+1)(p-1)}{E} - \frac{p-1}{r}\right)v - \right.$$
$$\left. -\frac{p-1}{E^{p-1}m^{p-1}}\left(\frac{w}{r} - \frac{w'}{p-1}\right) + \frac{\gamma(p-1)w}{E^p m^{p-1}}\frac{\phi_1(\eta)}{\phi_2(\eta)}\right\} = 0. \tag{24}$$

Произведем теперь предельный переход. Прежде всего, отметим, что при $\xi \to (a/b)_-^{\frac{p-1}{p+n}} - h$

$$\lim_{\eta\to+\infty} \phi_1(\eta) \to 0, \lim_{\eta\to+\infty} \phi_2(\eta) \to -\frac{1}{b},\ w' = 0.$$

Тогда из (24) для w получим следующее алгебраическое уравнение

$$w^{m(p-1)-1}\left(\frac{1}{r}\right)^{p-1} - \frac{1}{E^{p-1}m^{p-1}} = 0,$$

решения, которого с учетом выражения для b является $w = 1$ и в силу (22)

$$f(\xi) \sim \bar{f}(\xi).$$

Теорема 5 доказана.

Критический случай $m(p-1) - 1 = 0$. Заметим, что в этом случае функция

$$z(\xi) = e^{-d|\xi+h|^{\frac{p+n}{p-1}}},$$

где $d = \frac{p-1}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)}$, удовлетворяет условиям задачи (18), (19). Кроме того с помощью теорем сравнений решений можно показать, что $u_+(t,x) = (T+t)^{-\gamma} z(\xi)$ будет верхним решением задачи (1)-(3) при $h \geq \left(\frac{\ln 1/\sigma}{d(q-1)}\right)^{(p-1)/(p+n)}$.

Теорема 6. *Пусть* $\sigma > 0$, $q > 1$, $h \geq \left(\frac{\ln 1/\sigma}{d(q-1)}\right)^{(p-1)/(p+n)}$. *Тогда решение задачи (18), (19) при* $\xi \to +\infty$ *имеет асимптотику* $f(\xi) \sim C_1 z(\xi)$, *где* C_1 *- произвольное положительное число.* Теорема 6 доказывается аналогично доказательству теоремы 5. В этом случае используется преобразование $f(\xi + h) = z(\xi)\,\theta(\varphi)$, $\varphi = |\xi + h|^{(p+n)/(p-1)}$.

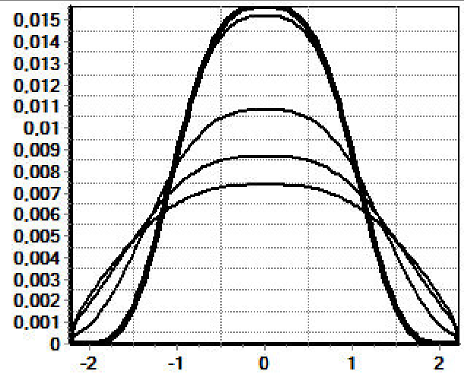
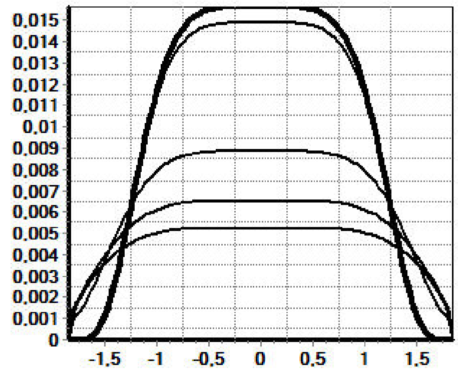
$m = 1.5$, $p = 1.75$, $q = 2.85$, $n = 0.5$, $a = 0.5$	$m = 1.7$, $p = 1.75$, $q = 2.85$, $n = 2$, $a = 0.5$
	

Рисунок 1 - Численное решение задачи (1)-(3) при а) $m = 1.5$, $p = 1.75$, $q = 2.85$, $n = 0.5$, $a = 0.5$ **б)** $m = 1.7$, $p = 1.75$, $q = 2.85$, $n = 2$, $a = 0.5$

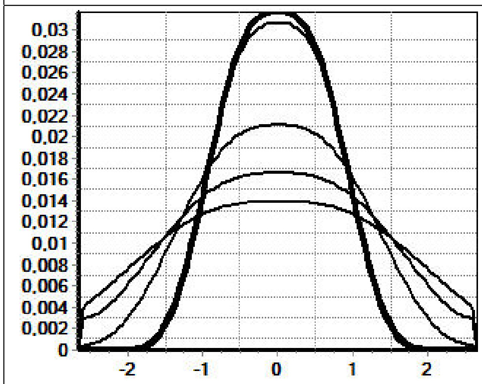
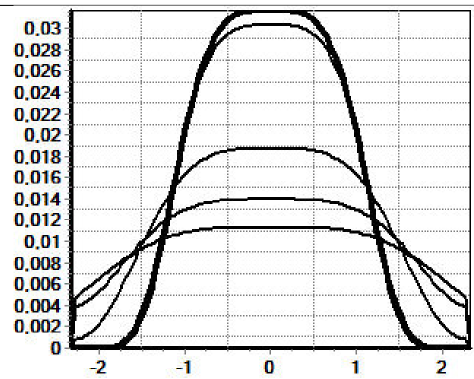
$m = 1.75$, $p = 1.6$, $q = 3$, $n = 0.1$, $a = 0.75$	$m = 1.75$, $p = 1.6$, $q = 3$, $n = 0.75$, $a = 0.75$
	

Рисунок 2 - Численное решение задачи (1)-(3) при а) $m = 1.75$, $p = 1.6$, $q = 3$, $n = 0.1$, $a = 0.75$ **б)** $m = 1.75$, $p = 1.6$, $q = 3$, $n = 0.75$, $a = 0.75$

Численный анализ решений

Отметим, что основная трудность при численном исследовании задачи (1)-(3) возникает из за не единственности решения. Поэтому возникает вопрос о выборы хорошего начального приближения, сохраняющий свойства нелинейности. В зависимости от зна-чения параметров уравнения эта трудность преодолевается путем удачного выбора начальных приближений, в качестве которых берутся выше установленные асимптотические формулы. На основе приведенных выше качественных исследований были произведены численые расчеты. Результаты численных экспериментов показывают быструю сходимость итерационного процесса за счет удачного выбора начального приближения. Ниже приводится некоторые результаты численных экспериментов для различных значений числовых параметров.

Во всех рисунках жирным линиям соответствует начальные приближения. Численные результаты показывают, что при $p > 1 + 1/m$ решение имеет свойство конечной скорости распространения возмущения. Глубина фронта распространения возмущения зависят от начальной функции, значение плотности среды и числовых параметров. Размер области распространения возмущения тем меньше, чем больше плотности среды, если $a/b > 1$.

Заключение

Предложенные в работе результаты исследования для задачи (1)-(3) показали, что решения задачи в случае быстрой диффузии может иметь как глобальное, так и неограниченное решение в зависимости от начальных данных и значение числовых параметров. Для доказательства теорем о глобальной разрешимости и неразрешимости оказался эффективным метод сравнения решений и метод эталонных уравнений. Дан способ построение нижних и верхних автомодельных решений на основе метода эталон-ных уравнений. Применение метода эталонных уравнений дал возможность найти глав-ный член асимптотики решений. В качестве начального приближения во всех вычисле-ниях брались полученные асимптотические формулы, которые являются верхними ре-шениями для решения задачи (1), (3). Вычислительные эксперименты показали быструю сходимость итерационного процесса к точному решению, за счет подходящего выбора начального приближения.

Литература

[1] *Самарский А.А., Курдюмов С.П., Галактионов В.А., Михайлов А.П.* Режимы с обострением для квазилинейных параболических уравнений. // Наука 1987, 477с.

[2] *Арипов М.М.* Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. // Ташкент, Фан, 1988, 137 с.

[3] *Калашников А.С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырожда-ющихся параболических уравнений второго порядка. // УМН, 1987, т.42, Вып. 2 (254), – С.135-176.

[4] *Victor A. Galaktionov and Juan L. Vazquez.* The problem of blow-up in nonlinear para-bolic equations // Discrete and continuous dynamical systems, 2002, vol. 8, No. 2, – P.399-433.

[5] *Wanjuan Du and Zhongping Li.* Critical exponents for heat conduction equation with a nonlinear Boundary condition. // Int. Jour. of Math. Anal. 2013, vol. 7, 11, – P.517-524.

[6] *Zejia W., Jingxue Y., Chunpeng W.* Critical exponents of the non-Newtonian polytropic filtration equation with nonlinear boundary condition. //Appl. Math. Lett. 2007, 20, – P.142-147.

[7] *Galaktionov V.A., Levine H.A.* On critical Fujita exponents for heat equations with nonlinear flux boundary condition on the boundary. // Israel J. Math. 1996, 94, – P.125-146.

[8] *Kamin S., Kersner R.* Disappearance of interfaces in finite time. // Mechanica, 1993, 28, – P.117-120.

[9] *Tedeev A.F.* The interface blow-up phenomenon and local estimates for doubly degen-erate parabolic equations // Applicable Analysis, 2007, 86, No. 6, – P.755-782.

[10] *Мартыненко А.В., Тедеев А.Ф.* Регулярность решений вырождающихся параболи-ческих уравнений с неоднородной плотностью // УМВ. 2008, т.5, - С.116-145.

[11] *Aripov M., Rakhmonov Z.* Numerical simulation of a nonlinear problem of a fast diffusive filtration with a variable density and nonlocal boundary conditions // Proceedings of the 2014 International Conference on Mathematical Methods, Mathematical Models and Simulation in Science and Engineering (MMSSE 2014), Series 23, Interlaken, Switzerland, February 22-24, 2014, – P.72-77.

References

[1] *Tikhonov A.N.* On independence of the solutions of differential equations froma small parameter, Matem.sb., Vol. 22 (64) No. 2 (1948) 193-204.

[2] *Tikhonov A.N.* O granichnykh skachkakh lineynykh differentsialnykh uravneny s malym parametrom pri starshikh proizvodnykh // Vestnik ZhGU im. I. Zhansugurova. 2012. № 4. p. 17-21.Systems of differential equations containing a small parameter within derivatives, Matem.sb., Vol.31 (73) No. 31 (1952) 575-586.

[3] *Vishik M.I., Lyusternik L.A.* Regular extinction and boundary layer for linear differential equations with a small parameter, UMN, Vol.212, No. 5. (1957) 3-122.

[4] *Vasilyeva A.B.* Asymptotics of the solutions of some boundary value problems for quasilinear equations within a small parameter and a senior derivative, RCS USSR, Vol. 123 No.4 (1958) 583-586.

[5] *Imanaliev M.I.* Asymptotic methods in the theory of singular perturbed integer-differential systems//Researches on the integer-differential equations.// -Frunze : Ilim, 1962. -T 2. -P. 21-39.

[6] *Vishik M.I., Lyusternik L.A.* On initial jump for non-linear differential equations containing a small parameter, RCS USSR, Vol. 132 No. 6. (1960) 1242-1245.

[7] *Kasymov K.A.* On asymptotic of the solutions of Cauchy problem with boundary conditions for non-linear ordinary differential equations containing a small parameter, UMN, Vol. 17 No. 5 (1962) 187-188.

[8] *Dauylbaev M.K.* Asymptotic estimates of solutions of the integro-differential equations with small parameter // Mathematical Journal. Vol.8. No4 (2008).

[9] *Kasymov K.A., Nurgabyl D.N.* Asymptotic estimates of the solution of a singularly perturbed boundary value problem with initial jump for linear differential equations, Differential equations, Vol. 40 No. 4 (2004). pp. 597-607.

[10] *Nurgabyl D.N.* Construction of solution of the singularly perturbed boundary problem with initial jump // Vestnik of Kirghiz State National University. - 2001. - Vol.3., №6. - C.173-177.

[11] *Nurgabyl D.N.* Semidegenerate for singularly perturbed boundary value problems // Abstracts of the International Conference "Differential Equations and Their Applications."Almaty, 2001.-C. 51-52.

[12] *Vasilyeva A.B., Butuzov V.F.* Asymptotic decomposition of Solutions it is Singularly Perturbed equations, Moscow, Nauka (1973) -p.272.