МРНТИ 27.39.15 https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.05

[1] **А.Ж. Адиева,** [2]**А.О.Байарыстанов**

[1]докторант, E-mail: a.aina70@mail.ru

[2]к.ф.-м.н., E-mail: oskar_62@mail.ru

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан

ОБ ОДНОМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОМ ВЕСОВОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ХАРДИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Классическое одномерное интегральное неравенство Харди, несмотря на одномерность, имеет многочисленные приложения во многих разделах математики. Начиная с 1930-х годов стали интенсивно исследоваться весовые варианты неравенства Харди, однако первые успехи, были получены в 1969-1970 годы. В настоящее время одномерное интегральное весовое неравенство Харди, почти при всех значениях параметров достаточно хорошо исследовано. Наряду с интегральным неравенством не менее важное место занимает дифференциальное весовое неравенство Харди. Дифференциальное весовое неравенство Харди изучается при различных граничных условиях на границе заданного интервала. Однако, задаваемые граничные условия зависят от поведения весовых функции на концах интервала. Кроме того, исследование зависит от того, является ли интервал конечным или бесконечным, поскольку интегральное поведение весовых функций зависит от случая. Существуют различные проблемы, особенно в переопределенном случае, т.е. когда число граничных условий выше, чем порядок дифференцирования. В данной статье задача исследуется на конечном отрезке и считается, что особенности весовых функции сосредоточены на одном конце интервала и граничные условия являются переопределенными.

Ключевые слова: весовое дифференциальное неравенство Харди, весовые функции, граничное значение функции, переопределенные граничные задачи, локально абсолютно непрерывная функция.

[1]А.Ж. Адиева, [2]А.О.Байарыстанов

[1]докторант, E-mail: a.aina70@mail.ru

[2]ф.-м.ғ.к., E-mail: oskar_62@mail.ru

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

Екінші ретті көп шартты Харди типтес салмақты дифференциалдық теңсіздік туралы

Классикалық бір өлшемді Харди интегралдық теңсіздігі бір өлшемділігіне қарамастан, математиканың көптеген бөлімдерінде әртүрлі қолданыстары бар. 1930 жылдан бастап Харди теңсіздігінің салмақты нұсқалары қарқынды зерттеле бастады, бірақ алғашқы жетістіктері, яғни орындалу критерийлері 1969-1970 жылдары алынды. Қазіргі уақытта бір өлшемді Харди салмақты теңсіздігі параметрлердің барлық мәндерінде дерлік жеткілікті түрде жақсы зерттелген. Харди интегралдық теңсіздігімен қатар Харди дифференциалдық салмақты теңсіздігі де маңызды орын алады.Хардидің салмақты дифференциалдық теңсіздігі берілген интервалдың шекарасында әртүрлі шекаралық шарттарда зерттеледі. Алайда, берілген шекаралық шарттар салмақты функциялардың интервалдың шеткі нүктелеріндегі тәртіптеріне байланысты. Сонымен қатар, есеп интервалдың шеткі нүктелерінің ақырлы немесе ақырсыздығына байланысты, өйткені салмақты функциялардың интегралдық тәртіптері әртүрлі болады. Бұл жағдайда әртүрлі мәселелер туындайды, әсіресе көп шартты жағдайда, яғни берілген шекаралық шарттар саны дифференциалдау ретінен көп болған кезде. Бұл мақалада есеп ақырлы интервалда зерттеліп, салмақты функциялардың ерекшеліктері интервалдың бір жақ шекарасында шоғырланады және шекаралық шарттар көпшартты болып табылады.

Түйін сөздер: Харди салмақты дифференциалдық теңсіздігі, салмақты теңсіздіктер, функцияның шекаралық мәні, көп шартты шекаралық есептер, локалді абсолютті үзіліссіз функция.

[1]A.Zh. Adiyeva, [2]A.O. Baiarystanov
[1]PhD student, E-mail: a.aina70@mail.ru
[2]Candidate of Physical and Mathematical Sciences, E-mail: oskar_62@mail.ru
L. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

On an overdetermined weighted differential inequality of Hardy-type of second order

It is well known that the classical one-dimensional Hardy integral inequality has various applications. Since the 1930s, weighted versions of Hardy's inequality are intensively studied, but the first results of the criterion-type were obtained in 1969-1970. The one-dimensional weighted Hardy inequality is rather well studied for various parameter values. Hardy's weighted differential inequality has the same level of importance as the integral one. Hardy's weighted differential inequality is studied under various boundary conditions at the ends of a given interval. Meanwhile, the boundary conditions depend on the behaviour of the weight functions at the ends of the interval. Moreover, the study depends on whether the interval is finite or infinite, since the integral behaviour of weight functions depends on the case. There are various problems, especially in the overdetermined case, i.e. when the number of boundary conditions is higher than the order of differentiation. Our study relates to the case of a finite interval, when the singularities of the weight functions are concentrated at the same end of the interval and the boundary conditions are overdetermined.

Key words: weighted differential Hardy inequality, weighted functions, the boundary value of a function, overdetermined boundary value problems, a locally absolutely continuous function.

1 Введение

Пусть $I = (0,1)$, u - непрерывная и неотрицательная функция, а положительные функции v и r, соответственно непрерывная и непрерывно дифференцируемая на интервале I, $v^{1-p'} \in L_1(I)$ и для любого $a : 1 > a > 0$ функция $r^{-1} = \frac{1}{r}$ интегрируема на интервале $(a, 1)$, где $1 < p' < \infty$.

Положим $D_r^2 f(t) = \frac{d}{dt} r(t) \frac{df(t)}{dt}$ и $D_r^1 f(t) = r(t) \frac{df(t)}{dt}$.

Пусть $1 \geq T > 0$, $1 < p < \infty, I_T = (0,T)$ и $L^2_{p,v}(r) \equiv L^2_{p,v}(r; I_T)$ множество функции $f : I_T \to R$ локально абсолютно непрерывных на I_T вместе с функцией $D_r^1 f$ и для которых $\|D_r^2 f\|_{p,v} < \infty$, где $\|g\|_{p,v} = \left(\int\limits_T^\infty v(t)|g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ - норма весового пространства $L_{p,v}(I) \equiv L_{p,v}$. В силу наложенных условий на функций $v^{1-p'}, r^{-1}$ для любого $f \in L^2_{p,v}(r)$ существуют конечные следы $\lim\limits_{t\to 0} D_r^1 f(t) \equiv D_r^1 f(T)$, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) \equiv f(T)$.

Положим

$$L'RL^2_{p,v}(r) = \left\{f \in L^2_{p,v}(r) : f(T) = 0, D_r^1 f(T) = D_r^1 f(0) = 0\right\}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\int\limits_0^T u(t)|f(t)|^p dt \leq C_T \int\limits_0^T v(t)|D_r^2 f(t)|^p dt, \quad f \in L'RL^2_{p,v}(r). \tag{1}$$

Неравенство при $r \equiv 1$ имеет вид

$$\int\limits_0^T u(t)|f(t)|^p dt \leq C_T \int\limits_0^T v(t)|f''(t)|^p dt, \quad f \in L'RL^2_{p,v}(1). \tag{2}$$

Неравенство вида (2) рассматривалось во многих работах (см. нижеприведенный литературный обзор). Неравенство (1) отличается от неравенства (2) наличием функции $r^{-1} = \frac{1}{r}$. Если функция r^{-1} не интегрируема в окрестности нуля, то из результата по неравенству (1) не следует как следствие результат по неравенству (2). В работе [1] неравенство (1) рассматривалось в бесконечном промежутке с применением результатов к вопросу осцилляции дифференциального уравнения четвертого порядка, когда функция r^{-1} может иметь неинтегрируемые особенности. В данной статье рассматривается случай, когда функция r^{-1} может иметь особенности в окрестности нуля. Основной целью работы явлется получение необходимого и достаточного условия выполнения неравенства (1).

2 Обзор литературы

Исследование весовых дифференциальных неравенств Харди высокого порядка вида (2) при различных граничных условиях начались в начале 80-х годов прошлого века. Граничные условия называются переопределенными, если количество независимых граничных условий больше порядка дифференцирования в неравенстве. Сначала рассматривалось весовое дифференциальное неравенство первого порядка. В этом случае, задача с определенными граничными условиями была эквивалентна известному весовому неравенству Харди, а переопределенный случай оказался открытой проблемой. Эту задачу впервые решил чешский математик P.Gurka и полученный им результат, и другие его обобщения опубликованы в книге [2]. И в связи с важностью этой задачи в теории дифференциальных операторов, в работах [3], [4] получены различные эквивалентные критерии выполнения весового дифференциального неравенства Харди в переопределенном случае. В работах [5], [6], [7], [8],[9], [10], [11] получены критерии выполнения неравенства вида (2) высокого порядка на конечном отрезке с определенными граничными значениями. Более общая ситуация рассмотрена в работах [12], [13]. Неравенство вида (1) для второго и более высокого порядков на конечном отрезке в переопределенном случае исследованы в серии работ [14],[15],[16], [17]. Хотя в этих работах получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства, однако там не даны оценки для наилучшей константы неравенства вида (2). Глава 4 книги [18], [19] посвящена исследованию неравенства вида (2) для производных высокого порядка в определенном и в переопределенном случае и в конце дан краткий анализ полученных результатов. Переопределенный случай на отрезке $I = (0, \infty)$ исследован в работах [20], [21]. В работе [20] неравенство (2) исследовано при различных соотношениях граничных значений функции f: $f(0), f'(0)$, $f(\infty), f'(\infty)$, а в работе [21] исследовались неравенства высокого порядка при некоторых переопределенных граничных значениях. В работах [20],[21] найдены критерии выполнения неравенства (2), но при оценке наилучшей постоянной в (2) не указаны значения констант эквивалентности. Мы, используя методы работы [20], вычисляем все константы эквивалентности. История вопроса по неравенствам Харди и полученные результаты можно найти в книгах [2], [18], [19], [22]. Как видно из $L'RL^2_{p,v}(r)$ мы будем исследовать неравенство (1) только при следующих граничных значениях $f(T) = D^1_r f(T) = 0$, $D^1_r f(0) = 0$ функции $f \in L^2_{p,v}(r)$. В работе [1] неравенство (1) рассматривалось на бесконечном промежутке.

3 Материал и методы

Методы исследования следующие: используя заданные граничные значения, функцию f из $L'RL^2_{p,v}(r)$ представляем в виде некоторых интегральных соотношений, а затем используя известные результаты по весовым неравенствам Харди и по весовой оценке интегральных операторов получаем необходимые оценки. Приведем известные утверждения, необходимые нам при доказательстве выполнения неравенства (1).

Пусть $0 \leq a < b \leq \infty$. Из результатов работы [23], [стр.42-45] следует

Теорема А. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда*

(i) неравенство

$$\left(\int_a^b u(x)\left(\int_a^x f(t)dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_a^b v(t)f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \geq 0 \tag{3}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$A^+ = \sup_{a<r<b}\left(\int_r^b u(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^r v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

при этом $A^+ \leq C \leq p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}A^+$, *где* C *-наилучшая постоянная в (3).*

(ii) неравенство

$$\left(\int_a^b u(x)\left(\int_x^b f(t)dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_a^b v(t)f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \geq 0 \tag{4}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$A^- = \sup_{a<r<b}\left(\int_a^r u(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_r^b v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

при этом $A^- \leq C \leq p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}A^-$, *где* C *-наилучшая постоянная в (4).*

Пусть

$$A_1 = \sup_{a<y<b}\left(\int_a^y u(z)dz\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_y^b v^{1-p'}(t)\left(\int_y^t r^{-1}(x)dx\right)^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_2 = \sup_{a<y<b}\left(\int_a^y u(z)\left(\int_z^y r^{-1}(x)dx\right)^p dz\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_y^b v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Следующее утверждение следует из результатов работы [24] .

Теорема B. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда неравенство*

$$\left(\int_a^b u(z)\left(\int_z^b f(t)\int_z^t r^{-1}(x)dxdt\right)^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left(\int_a^b v(t)f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}},\ f \ge 0 \tag{5}$$

выполнено тогда и только тогда, когда $max\{A_1, A_2\} < \infty$, *при этом*

$$max\{A_1, A_2\} \le C \le 8p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}max\{A_1, A_2\}, \tag{6}$$

где C *-наилучшая постоянная в (5).*

4 Основные результаты

По условию $v^{1-p'} \in L_1(I)$. Поэтому существует единственная точка $\sigma_T \in (0, T)$ такая, что и

$$\int_{\sigma_T}^T v^{1-p'}(t)dt = \int_0^{\sigma_T} v^{1-p'}(t)dt.$$

Пусть функция $\rho_T(\cdot)$ такова, что

$$\int_s^T v^{1-p'}(t)dt = \int_0^{\rho_T(s)} v^{1-p'}(t)dt, \quad 0 < s < T. \tag{7}$$

Очевидно, что функция ρ_T локально абсолютно непрерывная, невозрастающая и $\lim\limits_{t\to T^-}\rho_T(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0}\rho_T(t) = T$. Очевидно, что $\sigma_T = \rho_T(\sigma_T)$.

Дифференцируя обе части (7) имеем

$$-v^{1-p'}(s) = v^{1-p'}(\rho(s))\rho_T'(s),\ v^{1-p'}(s) = v^{1-p'}(\rho(s))|\rho_T'(s)| \tag{8}$$

почти для всех $s \in (0, T)$.

Введем обозначения

$$A_{1,1}(p, T, \sigma) = \sup_{T>y>\sigma_T}\int_{\sigma_T}^y u(z)dz\left(\int_y^T v^{1-p'}(t)\left(\int_y^t r^{-1}(x)dx\right)^{p'}dt\right)^{p-1},$$

$$A_{1,2}(p, T, \sigma) = \sup_{T>y>\sigma_T}\int_{\sigma_T}^y u(z)\left(\int_z^y r^{-1}(x)dx\right)^p dz\left(\int_y^T v^{1-p'}(t)dt\right)^{p-1},$$

$$A_{2,1}(p, T, \sigma) = \left(\int_{\sigma_T}^T v^{1-p'}(t)\left(\int_{\sigma_T}^t r^{-1}(x)dx\right)^{p'}dt\right)^{p-1}\int_0^{\sigma_T} u(z)dz,$$

$$A_{2,2}(p,T,\sigma)=\sup_{0<y<\sigma_T}\int_0^y u(z)dz\left(\int_y^{\sigma_T} v^{1-p'}(t)\left(\int_t^{\sigma_T} r^{-1}(x)dx\right)^{p'}dt\right)^{p-1},$$

$$A_{2,3}(p,T,\sigma)=\sup_{0<y<\sigma_T}\int_y^{\sigma_T} u(z)\left(\int_z^{\sigma_T} r^{-1}(x)dx\right)^{p}dz\left(\int_0^{z} v^{1-p'}(t)dt\right)^{p-1},$$

$$A(p,T,\sigma)=\max\left\{A_{1,1}(p,T,\sigma),A_{1,2}(p,T,\sigma),A_{2,1}(p,T,\sigma),A_{2,2}(p,T,\sigma),A_{2,3}(p,T,\sigma)\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $1\ge T>0, 1<p<\infty$. Тогда неравенство (1) выполнено тогда и только тогда, когда $A(p,T,\sigma)<\infty$ и при этом имеет место оценка

$$\frac{1}{2}A(p,T,\sigma)\le C_T\le 2\cdot 8^p p(p')^{p-1}\cdot A(p,T,\sigma), \tag{9}$$

где C_T - наилучшая постоянная в (1).

Доказательство теоремы 1. Достаточность. Пусть $A(p,T,\sigma)<\infty$. Покажем выполнение неравенства (1). Так как $f(T)=D_r^1f(T)=D_r^1f(0)=0$ для $f\in L'RL^2_{p,v}(r,T)$, то интегрируя $D_r^2f(t)=g(t),\quad t\le T$, имеем $D_r^1f(x)=-\int\limits_x^T g(t)dt$ или $D_r^1f(x)=\int\limits_0^x g(t)dt$ для всех $0<x\le T$ и $\int\limits_0^T g(t)dt=0$. Далее представление $D_r^1f(x)=-\int\limits_x^T g(t)dt$ используем при $T>x\ge\sigma_T$ и $D_r^1f(x)=\int\limits_0^x g(t)dt$ при $0<x<\sigma_T$. Тогда

$$f(z)=\int_z^T r^{-1}(x)\int_x^T g(t)dtdx=\int_z^T g(t)\int_z^t r^{-1}(x)dxdt, \tag{10}$$

при $T>z\ge\sigma_T$ и

$$f(z)=\int_{\sigma_T}^T g(t)\int_{\sigma_T}^t r^{-1}(x)dxdt-\int_z^{\sigma_T} g(t)\int_t^{\sigma_T} r^{-1}(x)dxdt-\int_0^z g(t)dt\int_z^{\sigma_T} r^{-1}(x)dx, \tag{11}$$

при $z<\sigma_T$.

Используя (10), (11), имеем

$$\int_0^T u(z)|f(z)|^pdz=\int_{\sigma_T}^T u(z)\left|\int_z^T g(t)\int_z^t r^{-1}(x)dxdt\right|^pdz+\int_0^{\sigma_T} u(z)\left|\int_{\sigma_T}^T g(t)\int_{\sigma_T}^t r^{-1}(x)dxdt-\right.$$

$$\left.-\int_z^{\sigma_T} g(t)\int_t^{\sigma_T} r^{-1}(x)dxdt-\int_0^z g(t)dt\int_z^{\sigma_T} r^{-1}(x)dx\right|^pdz=F_1+F_2. \tag{12}$$

Применяя теорему B, как в теореме 3.1, получаем

$$F_1=\int\limits_{\sigma_T}^{T}u(z)\left|\int\limits_{z}^{T}g(t)\int\limits_{z}^{t}r^{-1}(x)dxdt\right|^p dz\le 8^p p(p')^{p-1}\times$$

$$\times\max\left\{A_{1,1}(p,T,\sigma),A_{1,2}(p,T,\sigma)\right\}\int\limits_{\sigma_T}^{T}v(t)|g(t)|^p dt. \tag{13}$$

Теперь, оценим F_2 :

$$F_2\le 3^{p-1}\left[\int\limits_{0}^{\sigma_T}u(z)\left|\int\limits_{\sigma_T}^{T}g(t)\int\limits_{\sigma_T}^{t}r^{-1}(x)dxdt\right|^p dz+\int\limits_{0}^{\sigma_T}u(z)\left|\int\limits_{z}^{\sigma_T}g(t)\int\limits_{t}^{\sigma_T}r^{-1}(x)dxdt\right|^p dz+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{\sigma_T}u(z)\left(\int\limits_{z}^{\sigma_T}r^{-1}(x)dx\right)^p\left|\int\limits_{0}^{z}g(t)dt\right|^p dz\right]=3^{p-1}(F_{2,1}+F_{2,2}+F_{2,3}). \tag{14}$$

Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$F_{2,1}=\int\limits_{0}^{\sigma_T}u(z)dz\left|\int\limits_{\sigma_T}^{T}g(t)\int\limits_{\sigma_T}^{t}r^{-1}(x)dxdt\right|^p\le$$

$$\le\int\limits_{0}^{\sigma_T}u(z)dz\left[\int\limits_{\sigma_T}^{T}v^{1-p'}(t)\left(\int\limits_{\sigma_T}^{t}r^{-1}(x)dx\right)^{p'}dt\right]^{p-1}\int\limits_{\sigma_T}^{T}v(t)|g(t)|^p dt= \tag{15}$$

$$=A_{2,1}(p,T,\sigma)\int\limits_{\sigma_T}^{T}v(t)|g(t)|^p dt.$$

Для оценки $F_{2,2},\ F_{2,3}$ применяем теорему A.

$$F_{2,2}=\int\limits_{0}^{\sigma_T}u(z)\left|\int\limits_{z}^{\sigma_T}g(t)\int\limits_{t}^{\sigma_T}r^{-1}(x)dxdt\right|^p dz\le p(p')^{p-1}A_{2,2}(p,T,\sigma)\int\limits_{0}^{\sigma_T}v(t)|g(t)|^p dt, \tag{16}$$

$$F_{2,3}=\int\limits_{0}^{\sigma_T}u(z)\left(\int\limits_{z}^{\sigma_T}r^{-1}(x)dx\right)^p\left|\int\limits_{0}^{z}g(t)dt\right|^p dz\le p(p')^{p-1}A_{2,3}(p,T,\sigma)\int\limits_{0}^{\sigma_T}v(t)|g(t)|^p dt. \tag{17}$$

Подставляя (15), (16) и (17) в (14) имеем

$$F_2\le 3^{p-1}\left[A_{2,1}(p,T,\sigma)\int\limits_{\sigma_T}^{T}v(t)|g(t)|^p dt+\right.$$

$$\left.+p(p')^{p-1}\big(A_{2,2}(p,T,\sigma)+A_{2,3}(p,T,\sigma)\big)\int\limits_{0}^{\sigma_T}v(t)|g(t)|^p dt\right]. \tag{18}$$

Эту оценку и оценку (13), подставляя в (12), получим

$$\int_0^T u(z)|f(z)|^p dz \le 2\cdot 8^p p(p')^{p-1}\cdot A(p,T,\sigma)\int_0^T v(t)|D_r^2 f(t)|^p dt,\ \ f\in W^2_{p,v}(r,T). \tag{19}$$

Так как $L'RL^2_{p,v}(r,T)\subset W^2_{p,v}(r,T)$, то из (19) следует, что неравенство (1) выполнено с оценкой

$$C_T \le 2\cdot 8^p p(p')^{p-1}\cdot A(p,T,\sigma) \tag{20}$$

для наилучшей постоянной C_T в (1).

Необходимость. Пусть неравенство (1) выполнено с наилучшей постоянной $C_T>0$. Пусть

$$K^+_{1,p}(\sigma_T,T)=\big\{f\in L_1(\sigma_T,T)\cap L_{p,v}(\sigma_T,T):\ f\ge 0, f\ne 0\big\},$$
$$K^-_{1,p}(0,\sigma_T)=\big\{f\in L_1(0,\sigma_T)\cap L_{p,v}(0,\sigma_T):\ f\le 0, f\ne 0\big\}.$$

Покажем, что каждому $f_1\in K^+_{1,p}(\sigma_T,T)$ найдется $f_2\in K^-_{1,p}(0,\sigma_T)$, обратно для $f_2\in K^-_{1,p}(0,\sigma_T)$ найдется $f_1\in K^+_{1,p}(\sigma_T,T)$ такие, что для $f(t)=f_1(t), t\in(\sigma_T,T)$ и $f(t)=f_2(t), t\in(0,\sigma_T)$ выполняется соотношение $\int\limits_0^T f(t)dt=0$ и

$$\int_0^T v(t)|f(t)|^p dt = 2\int_{\sigma_T}^T v(t)|f_1(t)|^p dt = 2\int_0^{\sigma_T} v(t)|f_2(t)|^p dt. \tag{21}$$

Для $f_1\in K^+_{1,p}(\sigma_T,T)$ положим $f_2(x)=-f_1(\rho^{-1}(x))\frac{v^{1-p'}(x)}{v^{1-p'}(\rho^{-1}(x))},\ \ x\in(0,\sigma_T)$.
Тогда $f_2\le 0$ и произведя замену $\rho^{-1}(x)=t$, имеем

$$\int_0^{\sigma_T} f_2(x)dx = -\int_0^{\sigma_T} f_1(\rho^{-1}(x))\frac{v^{1-p'}(x)}{v^{1-p'}(\rho^{-1}(x))}dx = \int_{\sigma_T}^T f_1(t)\frac{v^{1-p'}(\rho(t))}{v^{1-p'}(t)}\rho'(t)dt =$$
$$= -\int_{\sigma_T}^T f_1(t)\frac{v^{1-p'}(\rho(t))}{v^{1-p'}(t)}|\rho'(t)|dt = -\int_{\sigma_T}^T f_1(t)dt. \tag{22}$$

Здесь в последнем равенстве использовали (8). Из (22) следует $\int\limits_0^{\sigma_T}|f_2(x)|dx<\infty$ и $\int\limits_{\sigma_T}^T f_1(t)dt+\int\limits_0^{\sigma_T} f_2(t)dt=\int\limits_0^T f(t)dt=0$. Опять, с помощью замены $\rho^{-1}(x)=t$ и используя соотношения (8), имеем

$$\int_0^{\sigma_T}|f_2(t)|^p v(t)dt = \int_0^{\sigma_T}\left|f_1(\rho^{-1}(x))\frac{v^{1-p'}(x)}{v^{1-p'}(\rho^{-1}(x))}\right|^p v(x)dx =$$

$$= -\int_{\sigma_T}^{T} |f_1(t)|^p \frac{v^{-p'}(\rho(t))}{v^{-p'}(t)} v(\rho(t))\rho'(t)dt = \int_{\sigma_T}^{T} |f_1(t)|^p v(t) \frac{v^{1-p'}(\rho(t))}{v^{1-p'}(t)} |\rho'(t)| dt$$

$$= \int_{\sigma_T}^{T} |f_1(t)|^p v(t) dt.$$

Откуда следует (21). Обратно, для $f_2 \in K^-_{1,p}(0, \sigma_T)$ положим

$$f_1(x) = -f_2(\rho^{-1}(x)) \frac{v^{1-p'}(x)}{v^{1-p'}(\rho^{-1}(x))}.$$

Тогда

$$\int_{\sigma_T}^{T} f_1(x)dx = \int_{\sigma_T}^{T} \left|f_2(\rho^{-1}(x))\right| \frac{v^{1-p'}(x)}{v^{1-p'}(\rho^{-1}(x))} dx = -\int_{0}^{\sigma_T} |f_2(t)| \frac{v^{1-p'}(\rho(t))}{v^{1-p'}(t)} \rho'(t) dt =$$

$$= \int_{0}^{\sigma_T} |f_2(t)| \frac{v^{1-p'}(\rho(t))}{v^{1-p'}(t)} |\rho'(t)| dt = \int_{0}^{\sigma_T} |f_2(t)| dt < \infty.$$

Следовательно, $\int\limits_{\sigma_T}^{T} f_1(t)dt - \int\limits_{0}^{\sigma_T} |f_2(t)|dt = \int\limits_{\sigma_T}^{T} f_1(t)dt + \int\limits_{0}^{\sigma_T} f_2(t)dt = \int\limits_{0}^{T} f(t)dt = 0.$ Аналогичным образом выполняется и (21).

Совокупность функций $f(t) = f_1(t)$ при $t \in (\sigma_T, T)$ и $f(t) = f_2(t)$ при $t \in (0, \sigma_T)$, где $f_1 \in K^+_{1,p}(\sigma_T, T)$, $f_2 \in K^-_{1,p}(0, \sigma_T)$ и для которых выполняется $\int\limits_{0}^{T} f(t)dt = \int\limits_{\sigma_T}^{T} f_1(t)dt + \int\limits_{0}^{\sigma_T} f_2(t)dt = 0$ и соотношение (21), обозначим через $K_{1,p}(0, T)$.

По условию неравенство (1) выполняется. Так как условие $f \in LR'W^2_{p,v}(r, T)$ эквивалентно условию $D^2_r f = g \in \tilde{L}_{p,v}(0, T) = \left\{ g \in L_{p,v}(0, T),\ \int\limits_{0}^{T} g(t)dt = 0 \right\}$.

То из (1) и (12) следует, что неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$\int_{\sigma_T}^{T} u(z) \left| \int_{z}^{T} g(t) \int_{z}^{t} r^{-1}(x)dxdt \right|^p dz + \int_{0}^{\sigma_T} u(z) \left| \int_{\sigma_T}^{T} g(t) \int_{\sigma_T}^{t} r^{-1}(x)dxdt - \int_{z}^{\sigma_T} g(t) \int_{t}^{\sigma_T} r^{-1}(x)dxdt - \right.$$

$$\left. - \int_{0}^{z} g(t)dt \int_{z}^{\sigma_T} r^{-1}(x)dx \right|^p dz \le C_T \int_{0}^{T} v(t)|g(t)|^p dt, \quad g \in \tilde{L}_{p,v}(0, T) \tag{23}$$

Причем, наилучшие постоянные в (1) и в (23) совпадают.

Очевидно, что $K_{1,p}(0, T) \subset \tilde{L}_{p,v}(0, T)$. Поэтому неравенство (23) выполнено для всех $g \in K_{1,p}(0, T)$. Так как для $g \in K_{1,p}(0, T)$ $g(t) = g_1(t)$ при $t \in (\sigma_T, T)$ и $g(t) = g_2(t)$ при

$t \in (0, \sigma_T)$, где $g_1 \in K^+_{1,p}(\sigma_T, T)$, $g_2 \in K^-_{1,p}(0, \sigma_T)$, то, подставляя $g \in K_{1,p}(0, T)$ в (23), получим

$$\int_{\sigma_T}^{T} u(z)\left(\int_z^T g_1(t)\int_z^t r^{-1}(x)dxdt\right)^p dz$$
$$+\int_0^{\sigma_T} u(z)\left(\int_{\sigma_T}^T g_1(t)\int_{\sigma_T}^t r^{-1}(x)dxdt+\int_z^{\sigma_T}|g_2(t)|\int_t^{\sigma_T} r^{-1}(x)dxdt+\right. \tag{24}$$
$$\left.+\int_0^z |g_2(t)|dt\int_z^{\sigma_T} r^{-1}(x)dx\right)^p dz \le C_T\int_0^T v(t)|g(t)|^p dt, \quad g \in K_{1,p}(0,T). \tag{25}$$

Так как все слагаемые в левой части (25) неотрицательные, то с учетом (21), выполнены неравенства

$$\int_{\sigma_T}^{T} u(z)\left(\int_z^T g_1(t)\int_z^t r^{-1}(x)dxdt\right)^p dz \le 2C_T\int_{\sigma_T}^T v(t)|g_1(t)|^p dt, \quad g_1 \in K^+_{1,p}(\sigma_T, T),$$
$$\int_0^{\sigma_T} u(z)dz\left(\int_{\sigma_T}^T g_1(t)\int_{\sigma_T}^t r^{-1}(x)dxdt\right)^p \le 2C_T\int_{\sigma_T}^T v(t)|g_1(t)|^p dt, \quad g_1 \in K^+_{1,p}(\sigma_{T,T}),$$
$$\int_0^{\sigma_T} u(z)\left(\int_z^{\sigma_T}|g_2(t)|\int_t^{\sigma_T} r^{-1}(x)dxdt\right)^p dz \le 2C_T\int_0^{\sigma_T} v(t)|g_2(t)|^p dt, \quad g_2 \in K^-_{1,p}(0,\sigma_T),$$
$$\int_0^{\sigma_T} u(z)\left(\int_z^{\sigma_T} r^{-1}(x)dx\right)^p\left(\int_0^z |g_2(t)|dt\right)^p dz \le 2C_T\int_0^{\sigma_T} v(t)|g_2(t)|^p dt, \quad g_2 \in K^-_{1,p}(0,\sigma_T).$$

Из первого неравенства на основании теоремы B, со второго неравенства в силу неравенства Гельдера, а с третьего и четвертого неравенств на основании теоремы A получаем нижнюю оценку постоянной C_T, объединяя эти оценки и с учетом (21), в итоге получаем оценку

$$\frac{1}{2}A(p,T,\sigma) \le C_T,$$

которая вместе с (20) дает (9). Теорема 1 доказана.

5 Заключение

Целью работы является получение необходимых и достаточных условий выполнения неравенства (1). Для достижения поставленной цели использовались весовые неравенства Харди и типа Харди с ядром и полученные результаты могут быть применены для установления осцилляционных свойств диференциального уравнения четвертого порядка в окрестности конечной особой точки и, связанные с ними, спектральных характеристик некоторых дифференциальных операторов.

6 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проектов Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05130975, 2018-2020 годы).

Список литературы

[1] Adiyeva A., Oinarov R. Weighted inequality and oscillatory properties of a class of fourth order differential equations// Nonlinear Studies. - 2019. - Vol. 26, No. 4. -P. 741-753.

[2] Opic B. and Kufner A. Hardy-Type Inequalities. - Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific and Technical, Harlow. -1990. -344p.

[3] Абылаева А.М.,Байарыстанов А.О.,Ойнаров Р. Весовое дифференциальное неравенство Харди на множестве $\overset{\circ}{AC}(I)$// Сиб.Мат.Журнал. -2014. -Т.55,№3. -P.477-493.

[4] Kalybay A. A. One-dimensional differential Hardy inequality//J.Ineq.Appl,(2017) 2017:21 DOI 10.1186/s13660-017-1293-3.

[5] Степанов В. Д. Об одном весовом неравенстве типа Харди для производных высших порядков// Тр. МИАН СССР. -1989. -Т.187. -С.178–190.

[6] Kufner A. Higher order Hardy inequalities// Bayreuth. Math. Schr. - 1993. -Vol.44. -P.105-146.

[7] Куфнер А., Хейниг Г.П. Неравенство Харди для производных высших порядков// Тр. МИАН СССР. -1990. -Т.192. -P.105–113 (Kufner A. and Heinig H.P. Hardy's inequality for higher order derivatives // Proc. Steklov Inst. Math. -1992. -Vol.192. -P.113-121.)

[8] Kufner A, Wannebo A. Some remarks to the Hardy inequality for higher order derivatives// in: General Inequalities (Oberwolfach, -1990), Birkhauser, Basel. -1992. -P. 33–48.

[9] Kufner A., Kuliev K. and Persson L.-E. Some higher order Hardy inequalities// J. Inequal. Appl. -2012. 2012:69. -P.14.

[10] Sinnamon G. Kufner's conjecture for higher order Hardy inequalities// Real. Anal. Exchange. -1995. -Vol.21(2). -P.590-603.

[11] Sinnamon G. A weighted gradient inequality // Proc.Royal.Soc. Edinburg A. -1989. -Vol.111. -P.329-335.

[12] Kalybay, A. A., Persson, L.-E. Three weights higher order Hardy inequalities// Function Spaces and Applications.-2006. -Vol. 4(2). -P. 63-191.

[13] Kalybay, A. A. A Generalization of the weighted Hardy inequality for one class of integral operators// Siberian Math. J. -2004. -Vol.45, No.4. -P.100-111.

[14] Kufner A.,Simader C.G. Hardy inequalities for overdetermined classes of functions// Z. Anal.Anwendungen. -1997. No 16(2). -P.387-403.

[15] Kufner A.,Sinnamon G. Overdetermined Hardy inequalities// J.Math.Anal. Appl. -1997. -Vol.213. -P.468-486.

[16] Kufner A.,Lienfelder H. On overdetermined Hardy inequalities// Math. Bohem. -1998. -Vol.123(3), -P.279-293.

[17] Nasyrova M. and Stepanov V. D. On maximal overdetermined Hardy's inequality of second order on a finite interval// Math. Bohem. -1999. -Vol.124. -P.293–302.

[18] Kufner A., Persson L.-E. Weighted inequalities of Hardy type. - World Scientific., New Jersey-London-Singapore-Hong Kong. - 2003.

[19] Kufner A., Persson L.-E., Samko N. Weighted inequalities of Hardy type. - World Scientific. Second Edition. - 2017.

[20] Nasyrova M., Stepanov V.D. On weighted Hardy on semiaxis for functions vanishing at the endpoints// J. Ineq. Appl. -1997, -Vol.1, No.3. -P.223-238.

[21] Nassyrova M. Weighted inequalities involving Hardy-type and limiting Geometric Mean Operators. Doctorol thesis. Depatment of Mathematics, Lulea University of Technology,Sweeden. - 2002.

[22] Kufner A., Maligranda L. and Persson L.-E. The Prehistory of the Hardy Inequality// Amer. Math. Monthly. -2006. -Vol.113(8). -P.715–732.

[23] Мазья В.Г. Пространства С.Л.Соболева.- Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. -1985. - 416 с.

[24] Ойнаров Р. Двусторонние оценки нормы некоторых классов интегральных операторов// Труды мат.института им.В.Стеклова. -1993. -Т. 204. -С.240-250.

References

[1] Adiyeva A., Oinarov R. Weighted inequality and oscillatory properties of a class of fourth order differential equations, Nonlinear Studies vol. 26, no 4 (2019): 741-753.

[2] Opic B. and Kufner A. Hardy-Type Inequalities, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific and Technical, Harlow (1990): 344

[3] Abylaeva A.M.,Bajarystanov A.O.,Ojnarov R. Vesovoe differencial'noe neravenstvo Hardi na mnozhestve $\overset{\circ}{AC}(I)$ [A weighted differential hardy inequality on $\overset{\circ}{AC}(I)$] Sib.Mat.Zhurnal vol.55, no 3 (2014): 477-493.

[4] Kalybay A. A. One-dimensional differential Hardy inequality, J.Ineq.Appl (2017) 2017:21 DOI 10.1186/s13660-017-1293-3.

[5] Stepanov V. D. Ob odnom vesovom neravenstve tipa Hardi dlja proizvodnyh vysshih porjadkov [On a weighted inequality of Hardy type for derivatives of higher order] Tr. MIAN SSSR. vol.187 : 178–190.

[6] Kufner A. Higher order Hardy inequalities, Bayreuth. Math. Schr. vol.44 (1993): 105-146.

[7] Kufner A., Hejnig G.P. Neravenstvo Hardi dlja proizvodnyh vysshih porjadkov [Hardy's inequality for higher order derivatives] Tr. MIAN SSSR vol.192 (1990): 105–113 [Kufner A. and Heinig H.P. Hardy inequality for higher order derivatives, Proc. Steklov Inst. Math. vol.192 (1992):113-121.]

[8] Kufner A, Wannebo A. Some remarks to the Hardy inequality for higher order derivatives, in: General Inequalities (Oberwolfach, -1990), Birkhauser, Basel (1992): 33–48.

[9] Kufner A., Kuliev K. and Persson L.-E. Some higher order Hardy inequalities, J. Inequal. Appl. 2012:69 (2012): 14.

[10] Sinnamon G. Kufner's conjecture for higher order Hardy inequalities, Real. Anal. Exchange vol.21(2) (1995): 590-603.

[11] Sinnamon G. A weighted gradient inequality, Proc.Royal.Soc. Edinburg A. vol.111 (1989): 329-335.

[12] Kalybay, A. A., Persson, L.-E. Three weights higher order Hardy inequalities, Function Spaces and Applications vol. 4(2) (2006): 63-191.

[13] Kalybay, A. A. A Generalization of the weighted Hardy inequality for one class of integral operators, Siberian Math. J. vol.45, no 4 (2004): 100-111.

[14] Kufner A.,Simader C.G. Hardy inequalities for overdetermined classes of functions, Z. Anal.Anwendungen no 16(2)(1997): 387-403.

[15] Kufner A.,Sinnamon G. Overdetermined Hardy inequalities, J.Math.Anal. Appl. vol.213(1997): 468-486.

[16] Kufner A.,Lienfelder H. On overdetermined Hardy inequalities, Math. Bohem. vol.123(3)(1998): 279-293.

[17] Nasyrova M. and Stepanov V. D. On maximal overdetermined Hardy's inequality of second order on a finite interval, Math. Bohem. vol.124 (1999): 293–302.

[18] Kufner A., Persson L.-E. Weighted inequalities of Hardy type, World Scientific., New Jersey-London-Singapore-Hong Kong (2003).

[19] Kufner A., Persson L.-E., Samko N. Weighted inequalities of Hardy type. Second Edition, World Scientific (2017).

[20] Nasyrova M., Stepanov V.D. On weighted Hardy on semiaxis for functions vanishing at the endpoints, J. Ineq. Appl. vol.1, no 3 (1997): 223-238.

[21] Nassyrova M. Weighted inequalities involving Hardy-type and limiting Geometric Mean Operators, Doctorol thesis. Depatment of Mathematics, Lulea University of Technology,Sweeden (2002).

[22] Kufner A., Maligranda L. and Persson L.-E. The Prehistory of the Hardy Inequality, Amer. Math. Monthly. vol.113(8)(2006): 715–732.

[23] Maz'ja V.G. Prostranstva S.L.Soboleva [Sobolev spaces] (L.: Izd-vo Leningr. un-ta, 1985): 416

[24] Ojnarov R. Dvustoronnie ocenki normy nekotoryh klassov integral'nyh operatorov [Two-sided norm estimates for certain classes of integral operators], Trudy mat.instituta im.V.Steklova vol. 204(1993): 240-250.