МРНТИ 27.29.17, 27.29.23 https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.06

[1]С.А. Айсагалиев, [2]Г.Т. Корпебай
[1]д.т.н., профессор, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
[2]магистрант, E-mail: Guldana.Korpebay@kaznu.kz
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Предлагается метод решения задачи оптимального быстродействия для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями из заданных множеств при наличии фазовых и интегральных ограничений, а также голономных связей. В отличие от известных методов решения задачи оптимального быстродействия разработан новый подход к проблеме быстродействия в виде принципа погружения. Принцип погружения создан на основе исследования разрешимости и построение общего решения интегральное уравнения.
Основными результатами являются:
– необходимое и достаточное условия существования решения одного класса интегрального уравнения и построение его общего решения;
– выделение всех множеств управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы из любого начального состояния в любое желаемое конечное состояние для линейных систем;
– предлагаемый принцип погружения позволяющий свести исходную краевую задачу оптимального быстродействие с ограничениями к специальной начальной задаче оптимального управления;
– необходимое и достаточное условия существования допустимого управления;
– разработан алгоритм решения задачи оптимального быстродействия с ограничениями для линейных систем любого порядка.
Полученные результаты являются решениями актуальных проблем теории оптимального быстродействия с ограничениями имеющие многочисленные приложения.
Разработан новый метод решения задачи оптимального быстродействия линейных систем с краевыми условиями, при наличии фазовых, интегральных ограничений и голономных связей. Создана общая теория краевых задач оптимального быстродействия имеющая многочисленные приложение в естественных науках, технике, экономике.
Принципиальное отличие предлагаемого метода от известных методов состоит в том, что исходная задача погружается в задачу управляемости с управлениями из функциональных пространств с последующим сведением к начальной задаче оптимального управления.
Ключевые слова: Оптимальное быстродействие, фазовые и интегрального ограничения, голономные связи, принцип погружения, интегральное уравнение.

[1]С.Ә. Айсағалиев, [2]Г.Т. Көрпебай
[1]т.ғ.д., профессор, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
[2]магистрант, E-mail: Guldana.Korpebay@kaznu.kz
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
Шенелген сызықты жүйелердің тиімді тез әсер ету теориясындағы интегралдық теңдеу

Фазалық және интегралдық шектеулері, сондай-ақ голондық байланыстары бар болатын берілген жиындардан шекаралық шарттары бар сызықты қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін тиімді тез әрекет ету есебін шешу әдісі ұсынылады. Тиімді тез әрекет ету есебін шешудің белгілі әдістеріне қарағанда, батыру қағидасы түрінде тиімді тез әрекет ету проблемасына жаңа көзқарас әзірлені. Батыру қағидасы интегралдық теңдеудің жалпы шешімін құру және шешімділігін зерттеу негізінде құрылған.
Алынатын негізгі нәтижелер:
– бір классты интегралдық теңдеулердің шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары жане оның жалпы шешімін құру;
– әрбір элементі сызықты жүйенің траекториясын кез келген бастапқы күйден кез келген қалаған соңғы күйге ауыстыратын басәрудың барлық жиындарын таңдау;
– ұсынылған батыру қағидасы шектеулері бар тиімді тез әсер етудің бастапқы шекаралық есебін тиімді басқарудың арнайы бастапқы есебіне келтіруге мүмкіндік береді;
– мүмкін болатын басқарудың қажетті және жеткілікті шарттары;
– кез келген ретті сызықтық жүйелер үшін шектеулері бар тиімді тез әсер ету есебін шешу алгоритмі әзірленді.
Алынған нәтижелер көптеген қосымшалары бар болатын шектеулері бар тиімді тез әсер ету теориясының өзекті мәселелерінің шешімі болып табылады.
Фазалық және интегралдық шектеулері, сондай-ақ голондық байланыстары бар болатын берілген жиындардан шекаралық шарттары бар сызықты қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін тиімді тез әрекет ету есебін шешудің жаңа әдісі құрылған. Жаратылыстану ғылымдарда, техникада, экономикада көптеген қосымшалары бар тиімді тез әсер ету шекаралық есептерінің жалпы теориясы құрылды.
Ұсынылған әдісің белгілі әдістерден принципиалды айырмашылығы бастапқы есеп тиімді басқарудың бастапқы есебіне келтірілетін функционалдық жиында анықталған басқарулары бар басқарымдылық есебіне келтіріледі.
Түйін сөздер: Тиімді тез әсер ету, фазалық шектеулер, голономдық байланыстар, батыру қағидасы, интегралдық теңдеу.

[1]S.A. Aisagaliev, [2]G.T. Korpebai
[1]Dr.Sci., professor, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
[2]Master Student, E-mail: Guldana.Korpebay@kaznu.kz
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

Integral equation in the theory of optimal speed of linear systems with constraints

We propose a method for solving the optimal speed problem for linear ordinary differential equations with curve conditions from given sets in the presence of phase and integral constraints, as well as holonomic connections. In contrast to the known methods of solving the problem of optimal performance, a new approach to the problem of performance in the form of the principle of immersion is developed. The immersion principle is based on the study of solvability and the construction of a General solution of the integral equation.
The main results are:
– necessary and sufficient conditions for the existence of a solution of one class of integral equation and the construction of its General solution;
– selection of all sets of controls, each element of which translates the trajectory of the system from any initial state to any desired final state for linear systems;
– the proposed immersion principle allows reducing the initial boundary value problem of optimal performance with restrictions to a special initial problem of optimal control;
– necessary and sufficient conditions for the existence of acceptable management;
– an algorithm for solving the optimal performance problem with constraints for linear systems of any order has been developed.
The results obtained are solutions to current problems in the theory of optimal performance with restrictions that have numerous applications.

A new method is developed for solving the problem of optimal performance of linear systems with boundary conditions, in the presence of phase, integral constraints and holonomic connections. A General theory of boundary value problems of optimal performance has been developed that has numerous applications in the natural Sciences, technology, and Economics.
The principal difference between the proposed method and the known methods is that the initial problem is immersed in the manageability problem with controls from functional spaces, and then reduced to the initial optimal control problem.
Key words: Optimal performance, phase and integral constraints, holonomic relations, immersion principle, integral equation.

1 Введение

Рассматривается следующая задача оптимального быстродействия: минимизировать функционал

$$J(x(\cdot),\ u(\cdot), x_0, x_1, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0 \to inf \tag{1}$$

на множестве решений уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + \mu(t), \quad t \in \mathrm{I} = [t_0,\ t_1] \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1, \quad S_0 \subset R^n,\ S_1 \subset R^n, \tag{3}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t): \qquad G(t) = \{x \in R^n | \omega(t) \le L(t)x \le \varphi(t), \quad t \in I\} \tag{4}$$

интегральных ограничений

$$g_j(x(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, t_1) \le c_j, \quad j = \overline{1, m_1}, \tag{5}$$

$$g_j(x(\cdot), u(\cdot t), x_0, x_1, t_1) = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2} \tag{6}$$

$$g_j(x(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [a_j^*(t)\ x(t) + b_j^*(t)\ u(t)]dt, \quad j = \overline{1, m_2}, \tag{7}$$

а также с учетом голономных связей

$$\Gamma_j(x(t), u(t), t) = e_j^*(t)x(t) + r_j(t) = 0,\ t \in \mathrm{I}, \quad j = \overline{1, p}, \tag{8}$$

с ограничениями на значения управления

$$u(t) \in U(t)\{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)\ |.\ u(t) \in V(t) \subset R^m \text{ п.в } \ t \in I, \} \tag{9}$$

где $(*)$ – знак транспонирования, t_0– фиксированный момент времени, t_1 – не фиксирован, $t_1 > t_0$. Здесь $A(t), B(t)$ – матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$ соответственно, с кусочно непрерывными элементами, $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$ – заданная функция. При указанных условиях дифференциальное уравнение (2) имеет единственное решение для любого фиксированного $u(t) \in U(t)$ и для любой начальной точки $x_0 \in S_0$, функция $x(t) = x(t; t_0, x_0, u)$, $t \in I$ абсолютна непрерывна.

В краевом условии, S_0, S_1 заданные ограниченные выпуклые замкнутые множества из R^n. В фазовом ограничении, $L(t), t \in I$ – заданная матрица порядка $s \times n$ с непрерывными элементами, $\omega(t)$, $\varphi(t)$, $t \in I$ заданные непрерывные вектор функции $s \times 1$. В интегральных ограничениях, $a_j(t), b_j(t), j = \overline{1, m_2}$ – заданные кусочно - непрерывные вектор функции $n \times 1$, $m \times 1$ соответственно. В голономных связях $e_j(t)$, $r_j(t)$, $j = \overline{1, p}$ – непрерывные вектор функции $n \times 1$, 1×1, соответственно. В ограничении на значения управления, $V(t)$, $t \in I$ – заданные ограниченные выпуклые замкнутое множество из R^m.

Следует отметить, что интегральные ограничения в виде (5), путем введения дополнительных переменных $d_j \geq 0$, $j = \overline{1, m_1}$, могут быть записаны в виде $g_j(x(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1,) = c_j - d_j, j = \overline{1, m_1}$. Обозначим через $\overline{c_j} = c_j - d_j$, $j = \overline{1, m_1},$. Пусть вектор $\overline{c} = (\overline{c_1}, ..., \overline{c_{m_2}})$ где $\overline{c_j} = c_j - d_j$, $j = \overline{1, m_1}$, $\overline{c_j} = c_j$, $j = \overline{m, +1, m_2}$, $d_j \geq 0$, $j = \overline{1, m_1}$. Пусть множество

$$Q = \left\{ \overline{c} \in R^{m_2} \;\middle|\; \overline{c_j} = c_j - d_j, \;\; d_j \geq 0, \; j = \overline{1, m}, \; \overline{c_j} = c_j, \; j = \overline{m_1 + 1, m_2} \right\}$$

где $d_j \geq 0$, $j = \overline{1, m_1}$ – неизвестные числа.

Определение 1 *Для любого фиксированного* $t_1, t_1 > t_0$, *тройка* $(\overline{u}(t), \overline{x_0}, \overline{x_1}) \in U \times S_0 \times S_1$ *называется допустимые управлением для задачи* (1)-(9), *если краевая задача* (2)-(9) *с ограничениями имеет решение. Множество всех допустимых управлений обозначим через* $\sum_{t_1}, \sum_{t_1} \subset U \times S_0 \times S_1$.

Задача 1 *Найти необходимые и достаточные я существования решений краевой задачи* (2)-(9) *при фиксированном* t_1.

Заметим что если $\sum_{t_1} = \emptyset$, $\emptyset$- пустое множество, то краевая задача оптимального быстродействия (2)-(9) не имеет решения при фиксированном t_1.

Задача 2 *Найти допустимое управление* $(\overline{u}(t),\; \overline{x_0}, \overline{x_1}) \in \sum_{t_1} \subset U \times S_0 \times S_1$.

Краевая задача (2)-(9) называется задачей управляемости при фиксированном $t_1, t_1 > t_0$, где допустимое управление $(\overline{u}(t),\; \overline{x_0}, \overline{x_1}) \in \sum_{t_1}$, переводит траекторию системы (2) исходящую из точки $\overline{x_0} \in S_0$ в момент времени t_0, в точку $\overline{x_1} \in S_1$ в момент времени t_1, и выполнены: включение $\overline{x}(t; \overline{u},\; \overline{x_0}, \overline{x_1}) \in G(t)$, $t \in I$; равенства $g_j(\overline{x}(\cdot), \overline{u}(\cdot), \overline{x_0},\; \overline{x_1}) = \overline{c_j}$, $j = \overline{1, m_2}$, $\Gamma_j(\overline{x}(\cdot), t) = 0$, $j = \overline{1, p}$, $t \in I$.

Определение 2 *Допустимое управление* $(u_*(t),\; x_0^*, x_1^*) \in \sum_{t_{1*}}$, *называется оптимальным управлением для задачи* (1)-(9), *если* $t_{1*} - t_0 = \min\limits_{t_1 > t_0}[t_1 - t_0]$.

Задача 3 *Найти оптимальные управление* $(u_*(t),\ x_0^*,\ x_1^*) \in \sum_{t_{1*}}$, *где* $(x_0^*, x_1^*) \in S_0 \times S_1,\ x_*(t, u_*, x_0^*, x_1^*) \in G(t),\ t \in I_1,\quad g_j(x_*(\cdot), u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*) = \overline{c_j},\ j = \overline{1, m_2},\quad \Gamma_j(x_*(t),\ t) = 0,\quad t \in I_1,\quad j = \overline{1, p},\quad I_1 = [t_0,\quad t_{1*}]$.

Функция $x_*(t) = x_*(t, u_*, x_0^*, x_1^*),\ t \in I_1 = [t_0, t_{1*}]$- называется оптимальной траекторией для задачи (1)-(9).

В статье предлагается метод решения указанных задач путем построения общего решения интегрального уравнения следующего вида

$$\mathrm{K}\omega = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{K}(t_*, t) w(t) dt = \beta, \quad t_* \in I = [t_0, t_1], \tag{10}$$

где $\mathrm{K}(t_*, t) = K(t)$ – известная матрица порядка $n_1 \times \overline{m}$ с элементами из L_2, $\quad t_* \in [t_0, t_1]$ – фиксированная точка, $w(t) \in L_2(I, R^{\overline{m}})$ – искомая функции $\beta \in R^{n_1}$.

Задача 4 *Найти необходимые и достаточные условия существования решения интегрального уравнения* (10) *для любых* $\beta \in R^n$.

Задача 5 *Найти общее решение интегрального уравнение* (10) *для любых* $\beta \in R^n$.

Решения задач 4, 5 позволяют выделить все множества допустимых управлений $\sum_{t_1}$ для задачи управляемости (2)-(9) и построить решения задачи (1)-(9), при фиксированном t_1. Наименьшее значение t_{1*} , $t_{1*} - t_0 > 0$ определяется последовательным решением задачи управляемости (2)-(9) методом деления "попалам" значений t_1.

2 Обзор литературы

Теория экстремальных задач в банаховом пространстве, решения задачи оптимального управления и оптимального быстродействие содержатся в [1, 2, 3]. Теоретическая основа решения задачи оптимального быстродействия в виде принципа максимума имеется в [3]. Принцип максимума сводит решение задачи оптимального быстродействия к решению краевой задачи системы дифференциальных уравнений порядка $2n$. Однако решение краевой задачи принципа максимума практически невозможно для системы порядка $n > 2$. В данной работе предлагается совершенно новый подход к решению задачи оптимального быстродействия путем сведения исходной задачи к начальной задаче специального вида.

Интегральное уравнение (10) относится к типу интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Разрешимость и построение решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода относятся к типу сложных проблем математики. Известные результаты по разрешимости интегрального уравнение относится к случаю, когда ядро симметрично [4, 5, 6]. Поэтому решения задач 4, 5 являются актуальным как для теории интегральных уравнении так и ее приложений.

Отдельные результаты по исследованию интегрального уравнения (10) и решения задачи управляемости (2)-(9) приведены в [7, 8, 9]. Некоторые результаты по решению задачи оптимального быстродействие (1)-(9) содержатся в работах [12, 11, 12, 13].

3 Материал и методы

Вводя обозначения

$$A_0\,(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \dots \\ a_{m_2}(t) \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \dots \\ b_{m_2}(t) \end{pmatrix}, \; a_j(t) = (a_{j1}(t), \dots, a_{jn}(t)), \; b_j(t) = (b_{j1}(t), \dots, b_{jm}(t)),$$

функционал (7) запишем в виде

$$g(x(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, t_1 = \int\limits_{t_0}^{t_1} [A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t)]dt.$$

Пусть вектор функция $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_{m_2}(t)),\; t \in I$, где

$$\eta(t) = \int\limits_{t_0}^{t} [A_0(\tau)x(\tau) + B_0(\tau)u(\tau)]d\tau.$$

Тогда

$$\dot{\eta}(t) = A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t), \quad t \in I, \tag{11}$$

$$\eta(t_0) = 0, \quad \eta(t_1) = \overline{c} \in Q, \; (x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, \; u(t) \in U(t), \tag{12}$$

где $A_0(t), B_0(t)$ матрицы с кусочно-непрерывными элементами порядков $m_2 \times n, m_2 \times m$, соответственно. Теперь задача оптимального быстродействия (1)-(9) запишется в виде: минимизировать функционал

$$J(\xi(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, d, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0 \;\; \to inf \tag{13}$$

при условиях

$$\dot{\xi} = A_1(t)\xi + B_1(t)u(t) + \overline{\mu}(t), \quad t \in I, \tag{14}$$

$$\xi\,(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \; \xi(t_0) = \begin{pmatrix} x\,(t_0) = x_0 \\ \eta\,(t_0) = 0 \end{pmatrix} = \xi_0, \; \xi(t_1) = \begin{pmatrix} x\,(t_1) = x_1 \\ \eta\,(t_1) = \overline{c} \end{pmatrix} = \xi_1, \; x\,(t) = P_1\xi(t),$$

$$P_1 = (I_n, O_{nm_2}), \quad P_1\xi(t) \in G(t), \; u(t) \in U(t), \; (x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, \tag{15}$$

$$\overline{c} \in Q, \; \Gamma(P_1\xi) = DP_1\xi(t) + r(t) = 0,$$

где

$$A_1\,(t) = \begin{pmatrix} A\,(t) & O_{nm_2} \\ A_0\,(t) & O_{m_2,m_2} \end{pmatrix}, \; B_1\,(t) = \begin{pmatrix} B\,(t) \\ B_0\,(t) \end{pmatrix}, \; D = D\,(t) = \begin{pmatrix} e_1\,(t) \\ \dots \\ e_p\,(t) \end{pmatrix},$$

$$r(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_p(t) \end{pmatrix}, \ \overline{\mu}(t) = \begin{pmatrix} \mu(t) \\ O_{m_2} \end{pmatrix}, \ d \in \Pi = \{d \in R^{m_1} \mid d \geq 0\},$$

$A_1(t), B_1(t), D(t), r(t)$- матрицы порядков $(n+m_2)\times(n+m_2)$, $(n+m_2)\times m$, $p\times n$, $p\times 1$ соответственно $\overline{\mu}(t) \in L_2(I, R^{m+m_2})$, $O_{k,q}$ – прямоугольная матрица порядка $k \times q$ с нулевыми элементами, I_n – единичная матрица порядка $n \times n$.

Рассмотрим интегральное уравнение (10). Решения задач 4, 5 дают следующие теоремы.

Теорема 1 *Интегральное уравнение* (10) *при любом фиксированном* $\beta \in R^{n_1}$ *имеет решения тогда и только тогда когда матрица*

$$C(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_*, t)K^*(t_*, t)dt \tag{16}$$

порядка $n_1 \times n_1$ *является положительно определенной, где* $(*)$ *– знак транспонирования.*

Теорема 2 *Пусть матрица* $C(t_0, t_1)$ *положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения* (10) *определяется по формуле*

$$\omega(t) = v(t) + K^*(t_*,\ t)C^{-1}(t_0, t_1)\beta - K^*(t_*, t)C^{-1}(t_0, t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_*, t)v(t)dt, \quad t \in I, \tag{17}$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^{\overline{m}})$ *– произвольная функция,* $\beta \in R^n$ *– любой вектор.*

Рассмотрим линейную управляемую систему (см. (14))

$$\dot{y} = A_1 t(t)y + B_1(t)w_1(t) + \overline{\mu}(t), \quad t \in I, \quad w_1(\cdot) \in L_2(I,\ R^m), \tag{18}$$

$$y(t_0) = \xi(t_0) = \xi_0 = (x_0, 0) \in S_0 \times O_{m_2},\ y(t_1) = \xi(t_1) = (x, \overline{c}) \in S_1 \times Q. \tag{19}$$

Решения дифференциального уравнения (18) имеет вид

$$y(t) = \Phi(t, t_0)\xi_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B_1(\tau)w_1(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\overline{\mu}(\tau)d\tau\ ,\ t \in I, \tag{20}$$

где $\Phi(t,\ \tau) = \theta_1(t)\theta_1^{-1}(\tau)$, $\theta_1(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\eta} = A_1(t)\eta$. Поскольку $y(t_1) = \xi_1$, то из (20) следует

$$\int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t_0, t)B_1(t)w_1(t)dt = \ a = \Phi(t_0, t_1)\xi_1 - \xi_0 - \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t_0, t)\overline{\mu}(t)dt. \tag{21}$$

Таким образом, управление $w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ является решением интегрального уравнения (21). Как следует из (10) для решения интегрального уравнения (21) применимы теоремы 1,2, где $K(t_*, t) = \Phi(t_0, t)B_1(t)$, $\beta = a$, $w(t) = w_1(t)$, $t_* = t_0 \in I = [t_0, t_1]$, $n_1 = n + m_2$ $\overline{m} = m$.

Теорема 3 *Пусть матрица*

$$W(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B_1(t)B_1^*(t)\Phi^*(t_0,tt)dt \tag{22}$$

порядка $(n+m_2)\times(n+m_2)$ *положительно определенная. Тогда управление* $w_1(\cdot)\in L_2(I_1,R^m)$ *переводит траекторию системы* (18) *из любой начальной точки* $\xi_0\in R^{n+m_2}$ *в любое конечное состояние* $\xi_1\in R^{n+m_2}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} w_1(t)\in U_1=\{w_1(\cdot)\in L_2(I,R^m)|w_1(t)=v(t)+T_1(t)\xi_0+T_2(t)\xi_1+ \\ +\overline{\mu}_1(t)+M_1(t)z(t_1,v),\quad t\in I,\quad \forall v(t),\quad v(\cdot)\in L_2(I,R^m)\}, \end{gathered} \tag{23}$$

где

$$\begin{gathered} T_1(t)=-B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1),\ T_2(t)=B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1), \\ M_1(t)=-B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1), \\ \overline{\mu}_1(t)=-B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\overline{\mu}(t)dt, \end{gathered} \tag{24}$$

Функция $z(t)=z(t,v),\ t\in I$*–решение дифференциального уравнения*

$$\dot z=A_1(t)z+B_1(t)v(t),\quad z(t_0)=0,\quad v(\cdot)\in L_2(I,R^m). \tag{25}$$

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теорем 1,2. В самом деле, из (10) при $K(t_0,t)=\Phi(t_0,t)B_1(t)$ имеем (21). Тогда (см.(16))

$$C(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)K^*(t_0,t)dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B_1(t)B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt=W(t_0,t_1).$$

Следовательно, для существования решения интегрального уравнения (21) необходимо и достаточно, чтобы матрица $W(t_0,t_1)>0$. Как следует из теоремы 2, управление $w_1(t),\ t\in I$ определяется по формуле (17). Тогда

$$w_1(t)=v(t)+K^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)a-K^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)v(t)dt=$$

$$=v(t)+B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)[\Phi(t_0,t_1)\xi_1-\xi_0-\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\overline{\mu}(t)dt]-$$

$$-B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B_1(t)v(t)dt=$$

$$=v(t)+T_1(t)\xi_0+T_2(t)\xi_1+\overline{\mu}(t)+M_1(t)z(t_1,v),\quad t\in I,\quad \forall v,\quad v(\cdot)\in L_2(I,R^m),$$

где матрицы $T_1(t)$, $T_2(t)$, $M_1(t)$, $t \in I$ – определяются соотношениями (24),

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B_1(t)v(t)dt = \Phi(t_0,t_1)z(t_1,v), \quad v(\cdot) \in L_2(I,R^m)$$

$z(t,v)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (25). Множество U_1 порождается, когда произвольная функция $v(\cdot) \in L_2(I,R^m)$ пробегает все элементы пространства $L_2(I,R^m)$. Теорема доказана.

Теорема 4 *Пусть матрица* $W(t_0,t_1) > 0$. *Тогда решение дифференциального уравнения* (18) *соответствующее управлению* $w_1(t) \in U_1$ *определяется по формуле*

$$y(t) = z(t,v) + E_1(t)\xi_0 + E_2(t)\xi_1 + \overline{\mu}_2(t) + M_2(t)z(t_1,v), t \in I, \tag{26}$$

где

$$E_1(t) = \Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1), E_2(t) = \Phi(t_0,t)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$\overline{\mu}_2(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\overline{\mu}(\tau)d\tau - \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\overline{\mu}(t)dt,$$

$$M_2(t) = -\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1), W(t_0,t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)B_1^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)d\tau,$$

$$W(t,t_1) = W(t_0,t_1) - W(t_0,t), \quad t \in I. \tag{27}$$

Доказательство. Как следует из (20) функция $y(t), t \in I$ при $w_1(t) \in U_1$ равна

$$y(t) = \Phi(t,t_0)\xi_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B_1(\tau)w_1(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\overline{\mu}(\tau)d\tau =$$

$$= \Phi(t,t_0)\xi_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B_1(\tau)[v(\tau)+T_1(\tau)\xi_0+T_2(\tau)\xi_1+\overline{\mu}_1(\tau)+M_1(\tau)z(t_1,v)]d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\overline{\mu}(\tau)d\tau =$$

$$= \Phi(t,t_0)\xi_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B_1(\tau)v(\tau)d\tau + \Phi(t,t_0)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)T_1(\tau)d\tau\xi_0 +$$

$$+\Phi(t,t_0)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)T_2(\tau)d\tau\xi_1 + \Phi(t,t_0)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)\overline{\mu}_1(\tau)d\tau +$$

$$+\Phi(t,t_0)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)M_1(\tau)d\tau z(t_1,v) + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B_1(\tau)\overline{\mu}(\tau)d\tau, t \in I.$$

Отсюда с учетом того, что:

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B_1(\tau)v(\tau)d\tau = z(t,\tau), \qquad \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)T_1(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)[-B_1^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)W^{-1}(t_0,t_1)]d\tau = -W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1),$$

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)T_2(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)[B_1^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)]d\tau =$$

$$= W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)M_1(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)[-B_1^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)]d\tau =$$

$$= -W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$\Phi(t,t_0)\xi_0 - \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\xi_0 = \Phi(t,t_0)[I_n - W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)]\xi_0 =$$

$$= \Phi(t,t_0)\{I_n - [W(t_0,t_1) - W(t_1,t_1)]W^{-1}(t_0,t_1)\}\xi_0 = \Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)\xi_0,$$

получим формулы (26), где $E_1(t), E_2(t), \overline{\mu}_2, M_2(t), t \in I$ определяются соотношениями (27). Теорема доказана.

Лемма 1 *Пусть матрица $W(t_0,t_1) > 0$. Для того чтобы функция $y(t) = \xi(t),\ t \in I$ необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:*

$$w_1(t) = U_1, \quad w_1(t) = u(t) \in U(t) \subset L_2(I, R^m), \quad U_1 \cap U \neq \emptyset, \tag{28}$$

$$p(t) = L(t)P_1y(t) \in V = \{p(\cdot) \in L_2(I, R^s) \mid w(t) \le p(t) \le \varphi(t), \quad t \in I\}, \tag{29}$$

$$\Gamma(P_1y(t), t) = DP_1y(t) + r(t) \equiv 0, t \in I, (x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, d \in \Pi. \tag{30}$$

Лемма 2 *Пусть матрица $W(t_0,t_1) > 0$. Тогда задача оптимального быстродействия* (1)-(9) *эквивалентна следующей задаче: Минимизировать функционал*

$$J(y(\cdot), u(\cdot)v(\cdot), p(\cdot), (x_0, x_1, d) = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0 \to inf \tag{31}$$

при условиях

$$J_1(y(\cdot), u(\cdot)v(\cdot), p(\cdot), x_0, x_1, d) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} [|w_1(t) - u(t)|^2 + |p(t) - L(t)P_1y(t)|^2 + |DP_1y(t) + r(t)|^2]dt = 0, \tag{32}$$

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v(t), \quad z(t_0) = 0, \quad v(\cdot) \in L_2(I, R^m), \tag{33}$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, \quad p(t) \in V(t), \quad u(t) \in U(t), \quad d \in \Pi, \tag{34}$$

где функции $w_1(t), \ y(t), \quad t \in I$ *определяются формулами* (23), (26) *соответственно.*

3.1 Преобразование

Как следует из леммы 2 существование допустимого управления при фиксированном t_1 следует из решения задачи оптимального управления: минимизировать функционал

$$J_1(y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot), p(\cdot), x_0, x_1, d) = \int_{t_0}^{t_1} F_1(q(t), t)dt \to inf \tag{35}$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{36}$$

$$v(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad (x_0, \ x_1) \in S_0 \times S_1, \ p(t) \in V(t), \ u(t) \in U(t), \ d \in \Pi, \tag{37}$$

где

$$q(t) = (\theta(t), z(t, v), z(t_1, v)),$$

$$\theta(t) = (u(t), v(t), p(t), x_0, x_1, d),$$

$$F_1(q(t), t) = |w_1(t) - u(t)|^2 + |p(t) - L(t)P_1 y(t)|^2 + |DP_1 y(t) + r(t)|^2,$$

функции $y(t), w_1(t), t \in I$ определяются формулами (26), (23) соответственно, $\xi_0, \xi_1, V, \ \Gamma(P, y, t)$ из (15), (29), (15).

Введем следующие обозначения:

$$X = U \times L_2^{\rho}(I, R^m) \times V \times S_0 \times S_1 \times \Pi_{\rho}, \ H = L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^s) \times R^n \times R^n \times R^{m_1},$$

$$L_2^{\rho}(I, R^m) = \{v(\cdot) \in L_2(I, R^m) \big| \parallel v \parallel \leq \rho, \ \rho > 0 - \text{достаточно большое число}\},$$

$$\Pi_{\rho} = \{d \in R^{m_1} \big| |d| \leq \rho\}, \ \theta \in X, \quad X \subset H,$$

где X – ограниченное выпуклое замкнутые множество в H, H – гильбертово пространство. Оптимизационная задача (35)-(37) может быть представлена в виде

$$J_1(\theta(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F_1(q(t), t)dt \to tnf, \quad \theta(\cdot) \in X \subset H.$$

Пусть множество $X_* = \{\theta_*(\cdot) \in X | J_1(\theta_*) = \inf\limits_{\theta \in X} J_1(\theta(\cdot))\}$.

Лемма 3 *Пусть матрица $W(t_0,t_1)>0$. Для того чтобы краевая задача (2)-(9) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение $J_1(\theta_*(\cdot))=0$.*

Доказательство следует из леммы 2.

Заметим что: 1) функционал $J_1(\theta),\ \theta\in X$ – выпуклый и слабо полунепрерывен снизу в X, X – слабобикомпактное множество. Следовательно, $J_1(\theta),\ \theta\in X$ достигает нижней грани на множестве X, множество $X_*\neq\oslash,\ \oslash$ – пустое множество; 2) Поскольку значение $J_1(\theta)\geq 0,\quad \theta\in X$, то возможны случаи: а) $J_1(\theta_*)=\inf\limits_{\theta\in X}J_1(\theta)=\min\limits_{\theta\in X}J_1\ (\theta)=0$; $b)$ $J_1(\theta_*)>0$. В случае, $J_1(\theta_*)=0,\ \theta_*=(\overline{u}_*,\overline{v}_*,\ \overline{p}_*,\overline{x}_0^*,\overline{x}_1^*,\overline{d})\in X_*$ – оптимальное решение задачи (35)-(37), тройка $(\overline{u}(t)=\overline{u}_*,\overline{x}_0=\overline{x}_0^*,\ \overline{x}_1=\overline{x}_1^*)\in\sum_{t_1}$ допустимое управление для задачи (1)-(9). Если $J_1(\theta_*)>0,\quad \theta_*\in X_*$, то $\sum_{t_1}=\oslash,\ \oslash$- пустое множество. Краевая задача (2)-(9) не имеет решение при фиксированном t_1.

Теорема 5 *Пусть матрица $W(t_0,t_1)>0$, функция $F_1(q,t)$ определена и непрерывно по совокупности переменных (q,t) вместе с частичными производными по q.*

Тогда функционал (35) при условиях (36), (37) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент

$$J_1'(\theta)=(J_{1u}'(\theta),J_{1v}'(\theta),\ J_{1p}'(\theta),J_{1x_0}'(\theta),J_{1x_1}'(\theta),\ J_{1d}'(\theta))\in H$$

в любой точке $\theta\in X$ вычисляется по формуле

$$J_{1u}'(\theta)=F_{1u}(q(t),t),\quad J_{1v}'(\theta)=F_{1v}(q(t),t)-B_1^*(t)\psi(t),\quad J_{1p}'(\theta)=F_{1p}(q(t),t),$$

$$J_{1x_0}'(\theta)=\int\limits_{t_0}^{t_1}F_{1x_0}(q(t),t)dt,\ \ J_{1x_1}'(\theta)=\int\limits_{t_0}^{t_1}F_{1x_1}(q(t),t)dt,\ \ J_{1d}'(\theta)=\int\limits_{t_0}^{t_1}F_{1d}(q(t),t)dt,\ \ (38)$$

где $z(t),\quad t\in I$ – решение дифференциального уравнения (36), а функция $\psi(t),\quad t\in I$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}=F_{1z}(q(t),t)-A^*{}_1(t)\psi(t),\quad \psi(t_1)=-\int\limits_{t_0}^{t_1}F_{1z(t_1)}(q(t),t)dt. \qquad (39)$$

Кроме того, градиент $J_1'(\theta),\ \theta\in X$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|J_1'(\theta_1)-J_1'(\theta_2)\|\leq K\|\theta_1-\theta_2\|,\ \forall\theta_1,\theta_2\in X, \qquad (40)$$

где $K=const>0$.

Доказательство аналогичной теоремы можно найти в [10].
Строим последовательности $Q_n=\{u_n,v_n,p_n,x_0^n,x_1^n,d_n\},\ n=0,1,2,...$ по алгоритму

$$\begin{array}{l} u_{n+1}=P_u\ [u_n-\alpha_nJ_{1u}'(\theta_n)],\ v_{n+1}=P_{L_2^\rho}\ [u_n-\alpha_nJ_{1v}'(\theta_n)],\\ P_{n+1}=P_v\ [P_n-\alpha_nJ_{1p}'(\theta_n)],\ x_0^{n+1}=P_{S_0}\ [x_0^n-\alpha_nJ_{1x_0}'(\theta_n)],\\ x_1^{n+1}=P_{S_1}\ [x_1^n-\alpha_nJ_{1x_1}'(\theta_n)],\ d_{n+1}=P_{_p}\ [d_n-\alpha_1J_{1d}'(\theta_n)],\\ n=0,1,2,...,\ 0<\varepsilon_0\leqslant\alpha_n\leqslant 2/k+2\varepsilon,\ \varepsilon>0, \end{array} \qquad (41)$$

где $P_\Omega\ [\cdot]$ - проекция точки на множестве Ω, $K=const>0$ из (40).

Теорема 6 *Пусть выполнены условия теоремы 5, последовательность* $\{\theta_n\} \subset X$ *определяется по формуле* (41). *Тогда:*

1. *последовательность* $\{\theta_n\} \subset X$ *является минимизирующей,* $\lim\limits_{n\to\infty} J_1(\theta_n) = J_{1*} = \inf\limits_{\theta\in X} J_1(\theta)$;

2. $\theta_n \overset{сл}{\to} \theta_*,\quad \theta_* \in X_*,\quad u_n \overset{сл}{\to} u_*,\quad p_n \overset{сл}{\to} p_*,\quad v_n \overset{сл}{\to} v_*\ ,\quad x_0^n \to x_0^*,\quad x_1^n \to x_1^*,$
$$d_n \to d_* \quad n \to \infty, \qquad \theta_* = (u_*, v_*, p_*, x_0^*, x_1^*, d_*) \in X_*;$$

3. *справедлива следующая скорость сходимости*
$$0 \le J_1(\theta_n) - J_{1*} \le \frac{c_0}{n} \quad , \quad n = 1, 2, \ \ldots, \ c_0 = const > 0; \tag{42}$$

4. *для того, чтобы задача* (2)-(9) *при фиксированном* $t_1, t_1 > t_0$ *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty} J_1(\theta_n) = J_{1*} = J_1(\theta_*) = 0$.

3.2 Построение решения задачи оптимального быстродействия

Как следует из леммы 3, для того чтобы $t_{1*} - t_0 = \min\limits_{t_1 > t_0}[t_1 - t_0]$ т.е. разность $t_{1*} - t_0$ была наименьшим значением функционал (1) при условиях (2)-(9) необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) матрица $W(t_0,\ t_{1*})$ порядка $(n+m_2)\times(n+m_2)$ была положительно определенной;

2) значения $J_1(\theta_*(\cdot)) = 0$. Следовательно, необходимо чтобы значение $t_1 \ge t_{1*}$. Пусть $\overline{t_1},\ \overline{t_1} > 0$ наименьшее значение t_1 где $\min\limits_{t_1 > t_0} W(t_0, t_1) = W(t_0, \overline{t_1}) > 0$. Заметим, что если матрица $W(t_0, \overline{t_1}) > 0$, то матрица $\mathrm{W}(t_0, t_1) > 0$ при всех $t_1 \ge \overline{t_1}$. Из условий $\mathrm{W}(t_0, t_{1*}) > 0,\ W(t_0, \overline{t_1}) > 0$ следует $t_{1*} \ge \overline{t_1}$. Из леммы 1-3 и теорем 1-6 следует следующий алгоритм решения задачи оптимального быстродействия.

Строится какое-либо допустимое управление по методу изложенному выше. Для этого достаточно выбрать некоторое значение $t_1 = t_1^0,\ t_1^0 > t_0$ найти решение оптимизационной задачи (35)-(37). Пусть найдена точка $\theta_* = \theta_*(t_1^0) \in X,\ J_1(\theta_*) = J_1(\theta_*(t_1^0)) = \inf\limits_{\theta\in X} J_1(\theta)$. Здесь возможны два случая:

a) $J_1(\theta_*(t_1^0)t) > 0$;

b) $J_1(\theta_*(t_1^0)) = J_{1*} = 0$. Далее, рассматривается в отдельности, случаи а), б). В случае

а) выбирается новое значение $t_1 = 2t_1^0$, а в случае

б) новое значение $t_1 = (t_0 + t_1^0)/2$ и т.д. Ниже приведены два алгоритма нахождения значения t_{1*}, где $t_{1*} - t_0 = \min\limits_{t_1 > t_0} (t_1 - t_0)$.

А. Пусть известно значение $\overline{t_1}, \overline{t_1} > t_0$, где $\min\limits_{t_1 > t_0} W(t_0, t_1) = W_0(t_0, \overline{t_1}) > 0$. В этом случае, целесообразно выбрать значение $t_1 = m\overline{t}_1,\ m = 1, 2, \ldots$ Следует отметить, что если значения $J_1(\theta_*(m\overline{t_1})) > 0$ для любых $m = 1, 2, \ldots$ то задача оптимального быстродействия (1)-(9) не имеет решения. В случае когда при $m = m_*,\ J_1(\theta_*(m_*\overline{t}_1)) = 0$, необходимо выбрать $t_1 = \overline{t}_1(m_* - 1 + m_*)/2 = (m_* - \frac{1}{2})\overline{t}_1 = \overline{m}_*\overline{t}_1,\ \overline{m}_* = m_* - \frac{1}{2}$. Найти значения $J_1(\theta_*(\overline{m}_*\overline{t}_1))$ путем решение оптимальности задачи (35)-(37). Здесь возможны случаи: 1) $J_1(\theta_*(\overline{m}_* t_1)) > 0$; 2) $J_1(\theta_*(\overline{m}_* t_1)) = 0$. В случае $J_1(\theta_*(m_* \bar{t}_1)) > 0$ необходимо выбрать $t_1 = \bar{t}_1(m_* - \frac{1}{2} + m_*)/2 = (m_* - \frac{1}{4})\bar{t}_1$, а в случае $J_1(\theta_*(\overline{m}_* t_1)) = 0$ необходимо выбрать $t_1 = \bar{t}_1(m_* - 1 + m_* - \frac{1}{2}) = (m_* - \frac{3}{4})\bar{t}_1$ и т.д. Повторяя данную процедуру можно найти со сколь угодной точностью значение $t_1 = t_1^*$, где t_1^* – оптимальный момент времени.

Б. Пусть значение $\bar{t}_1, \bar{t}_1 > t_0$, где $\min\limits_{t_1 > t_0} W(t_0, t_1) = W(t_0, \overline{t_1}) > 0$, либо матрица $W(t_0, t_1) > 0$ для любого $t_1 > t_0$. В этом случае, выбираем значение $t_0 = t_1^0$, где $W(t_0, t_1^0) > 0$. Находим значение $J_1(\theta_*(t_1^0))$ путем решения оптимизационный задачи (35)-(37). Возможны случаи: а) $J_1(\theta_*(t_1^0)) > 0$; в) $J_1(\theta_*(t_1^0)) = 0$;

Рассмотрим случай а). В этом случае выберем значение $t_1 = 2t_1^0$, находим значение $J_1(\theta_*(2t_1^0))$. Если значение $J_1(\theta_*(mt_1^0)) > 0$, $m = 1, 2, \ldots$, то задача оптимального быстродействия (1)-(9) не имеет решения. В случае, когда при $m = m_*$, $J(\theta_*(m_* t_1^0)) = 0$. Выберем $t_1 = t_1^0(m_* - 1 + m_*)/2 = (m_* - \frac{1}{2})t_1^0$.

Рассмотрим случай б). В этом случае $J_1(\theta_*(t_1^0)) = 0$, выберем $t_1 = (t_0 + t_1^0)/2$, проверим будет ли матрица $\mathrm{W}(t_0, t_1) > 0$, $t_1 = (t_0 + t_1^0)/2$. Если $\mathrm{W}(t_0, t_1) > 0$, то находим значение $J_1(\theta_*(t_1))$, где $t_1 = (t_0 + t_1^0)/2$. В случае $J_1(\theta_*(t_1)) = 0$, $t_1 = (t_0 + t_1^0)/2$, то выберем $t_1 = \frac{t_0 + t_1^0}{2} + t_1^0/2 = (t_0 + 3t_1^0)/4$ и так далее.

3.3 Решения модельной задачи

Рассмотрим следующую задачу оптимального быстродействия: минимизировать функционал

$$J(u, t_1) = \int\limits_0^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 \to inf \tag{43}$$

при условиях

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad t \in I = [0, t_1], \tag{44}$$

$$x_1(o) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(t_1) = 0, \quad x_2(t_1) = 0, \tag{45}$$

$$u(t) \in U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^1) | \ -1 \le u(t) \le +1 \quad \text{п.в} \quad t \in I\}. \tag{46}$$

Для данного примера

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

отсутствуют фазовые и интегральные ограничения, голономные связи, множества $S_0 = \{(1, 0)\}$, $S_1 = \{(0, 0)\}$ содержат единственные точки. В векторной форме задача (44)-(46) запишется в виде

$$J(u, t_1) = t_1 \to inf$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad t \in I = [0, t_1], \quad u(t) \in U.$$

Поскольку $\eta(t) \equiv 0,\ t \in I$, то $\xi(t) = x(t),\ t \in I$. Линейная управляемая система (18) для данного примера запишется так

$$\dot{y} = Ay + Bw_1(t), \quad y(0) = x_0, \quad y(t_1) = x_1, \quad t \in I, \quad w_1(\cdot) \in L_2(I, R^1),$$

где $\xi_0 = x_0,\ \xi_1 = x_1$. Матрицы

$$\Phi\left(t,\tau\right) = e^{A(t-\tau)},\ e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-A\tau} = \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_1\left(t\right) = e^{A\tau}.$$

Вычислим следующие векторы и матрицы (см.(21)-(27)):

$$a = \Phi\left(0, t_1\right) x_1 - x_0 = -x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$W\left(0, t_1\right) = \int\limits_0^{t_1} e^{-At} BB^* e^{-A^* t} dt = \begin{pmatrix} \frac{t_1^3}{3} & \frac{-t_1^2}{2} \\ -\frac{t_1^2}{2} & t_1 \end{pmatrix} > 0, \quad t_1 > 0,$$

$$W^{-1}\left(o, t_1\right) = \begin{pmatrix} \frac{12}{t_1^3} & \frac{6}{t_1^2} \\ \frac{6}{t_1^2} & \frac{4}{t_1} \end{pmatrix},$$

$$T_1(t)\xi_0 = T_1(t)x_0 = -B^*\Phi^*(0,t)W^{-1}(0,t_1)x_0 = \frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2},$$

$$T_2(t)\xi_1 = T_2(t)x_1 = 0, \quad M_1(t) = -B^*\Phi^*(0,t)W^{-1}(0,t_1)\Phi(0,t_1) = (\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2} \qquad -\frac{6}{t_1^2} + \frac{2}{t_1}),$$

$$E_1(t)\xi_0 = E_1(t)x_0 = \Phi(t,0)W(t,t_1)W^{-1}(0,t_1) = (\begin{matrix} \frac{t_1^3+2t^3-3t_1t^3}{t_1^3} \\ \frac{6t^2-6tt_1}{t_1^3} \end{matrix}),\ E_2(t)\xi_1 = E_2(t)x_1 = 0,$$

$$M_2(\text{t}) = -\Phi(t,0)W(t,t_1)W^{-1}(0,t_1)\Phi(0,t_1) = \begin{pmatrix} \frac{2t^3-3t^2t_1}{t_1^3} & \frac{-t^3+t_1t^2}{t_1^2} \\ \frac{6t^2-6tt_1}{t_1^3} & \frac{-3t^2+2tt_1}{t_1^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$w_1(t) = v(t) + (\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2}) - (\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2})z_1(t_1, v) + (\frac{-6t}{t_1^2} + \frac{2}{t_1})z_2(t_1, v),$$

$$y\left(t\right) = \begin{pmatrix} y_1\left(t\right) \\ y_2\left(t\right) \end{pmatrix}, \quad y_1(t) = z_1(t,v) + \frac{t_1^3 + 2t^3 - 3t_1t^2}{t_1^3} + (\frac{2t^3 - 3t^2t_1}{t_1^3})z_1(t,v) +$$

$$+(\frac{-t^3 + t_1t^2}{t_1^2})z_2(t_1,v), \quad y_2(t) = z_2(t,v) + \frac{6t^2 - 6tt_1}{t_1^3} + (\frac{6t^2 - 6tt_1}{t_1^3})z_1(t_1,v) +$$

$$+(\frac{-3t^2 + 2tt_1}{t_1^2})z_2(t_1,v).$$

Задача оптимального управления (35)-(37) имеет вид

$$J_1(\theta) = \int\limits_0^{t_1} F_1(q(t),t)dt = \int\limits_0^{t_1} |w_1(t) - u(t)|^2 dt = \int\limits_0^{t_1} |v(t) + (\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2}) + \\ +(\tfrac{12t}{t_1^3} - \tfrac{6}{t_1^2})z_1(t_1,v) + (\tfrac{-6t}{t_1^2} + \tfrac{2}{t_1})z_2(t_1,v) - u(t)|^2 dt \to inf \quad (47)$$

$$\dot{z} = Az + Bv(t), \quad z(0) = 0, \quad v(\cdot) \in L_2(I,R^1), u(t) \in U, \quad (48)$$

где $\theta = (u,v),\ q = (u,v,\ \ z(t,v), z(t_1,v))$.

Градиент функционала. Частные производное

$$\frac{\partial F_1(q,t)}{\partial u} = -2(w_1,-u), \quad \frac{\partial F_1(q,t)}{\partial v} = 2(w_1,-u), \quad \frac{\partial F_1(q,t)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial F_1(q,t)}{\partial z_1(t_1)} = 2(w_1-u)(\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2}), \quad \frac{\partial F_1(q,t)}{\partial z_2(t_1)} = 2(w_1-u)(\frac{-6t}{t_1^2} + \frac{2}{t_1}), \quad t \in I.$$

Градиент функционала $J_1'(\theta) = (J_{1u}'(\theta),\ \ J_{1v}'(\theta) \in$ H, где

$$J_{1u}'(\theta) = \frac{\partial F_1(q(t),t)}{\partial u}, \quad J_{1v}'(\theta) = \frac{\partial F_1(q(t),t)}{\partial v} - B^*\psi(t),$$

где $z(t,v),\ t \in I$ – решение дифференциального уравнения (47), а функция $\psi(t)$ решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^*\psi, \quad \psi(t_1) = -\int\limits_0^{t_1} \frac{\partial F_1(q(t),t)}{\partial z(t_1)} dt = \begin{pmatrix} \psi_1(t_1) \\ \psi_2(t_1) \end{pmatrix} \\ \psi_1(t_1) = -\int\limits_0^{t_1} \frac{dF_1(q(t),t)}{dz_1(t_1)} dt, \quad \psi_2(t_1) = -\int\limits_0^{t_1} \frac{dF_1(q(t),t)}{dz_2(t_1)} dt. \quad (49)$$

Минимизирующие последовательности

$$u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n J_{1u}'(\theta_u)], \quad v_{n+1} = v_n - \alpha_n J_{1v}'(\theta_n), \quad n = 0,1,2\ldots, \quad (50)$$

где $\theta_n = (u_n, v_n) \in X,\ \alpha_n \le \frac{2}{l_1 + 2e},\ \varepsilon > 0,\ l_1$– постоянная Липшица (см. (40), $l_1 = k$)

Построение решения задачи оптимального быстродействия. Заметим, что матрица

$$W(0,t_1) = \begin{pmatrix} t_1^3/3 & -t_1^2/2 \\ -t_1^2/2 & t_1 \end{pmatrix} > 0$$

для любого $t_1 > 0$. Определим $t_{1*} > t_0$ по алгоритму

B. Выберем значение $t_1 = 8$. Строим допустимые управления путем построения минимизирующих последовательностей (50) с учетом (49).

а). Для данного примера при $t_1 = 8$ оптимальное решение задачи (47), (48) следующее:

$$\mathrm{u}_*(\mathrm{t}) = \mathrm{v}_*(\mathrm{t}) = \begin{cases} -1 & 0 \le \mathrm{t} < 17/8, \\ +1 & 17/8 \le \mathrm{t} < 49/8, \\ -1 & 49/8 \le \mathrm{t} \le 8, \end{cases} \quad w_1(\mathrm{t}) = \mathrm{v}_*(\mathrm{t}), \quad t \in [0, \ 8].$$

Значение $J_1(\theta_*) = 0, \quad \theta_* = (u_*(t), v_*(t)), \quad t \in I = [0, 8]$.

б). Выберем $t_1 = 8/2 = 4$. Для значений $t_1 = 4$, оптимальным решением задачи (47), (48) будет

$$\mathrm{u}_{**}(\mathrm{t}) = \mathrm{v}_{**}(\mathrm{t}) = \begin{cases} -1 & 0 \le \mathrm{t} < 5/4, \\ +1 & 5/4 \le \mathrm{t} < 13/4, \\ -1 & 13/4/8 \le \mathrm{t} \le 4, \end{cases} \quad w_1(\mathrm{t}) = \mathrm{v}_{**}(\mathrm{t}), \quad t \in [0, \ 4].$$

Значение $J_1(\theta_{**}) = 0, \theta_{**} = (u_{**}(t), v_{**}(t)), \quad t \in I[0, 4]$.

в). Выберем $t_1 = 4/2 = 2$. Для значения $t_1 = 2$. Оптимальным решением задачи (47),(48) является:

$$\mathrm{u}_{***}(\mathrm{t}) = \mathrm{v}_{***}(\mathrm{t}) = \begin{cases} -1 & 0 \le \mathrm{t} < 1, \\ +1 & 1 \le \mathrm{t} \le 2, \end{cases} \quad w_1(\mathrm{t}) = \mathrm{v}_{***}(\mathrm{t}), \quad t \in [0, \ 2.]$$

Значение $J_1(\theta_{***}) = 0, \quad \theta_{***} = (u_{***}(t), \quad v_{***}(t)), \quad t \in I = [0, 2]$.

Оптимальная траектория для задачи (44)-(47):

$$x_{1*}(t) = y_{1*}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{2}, & 0 \le t < 1, \\ \frac{t^2}{2} - 2t + 2, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \quad x_{2*}(t) = y_{2*}(t) \begin{cases} -t, & 0 \le t < 1, \\ t - 2, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Эти результаты совпадают с результатами, полученными с помощью принципа максимума Л.Е. Понтрягина [3], для значений $n = 2$. В отличии от принципа максимума данный метод позволяет решать задачи оптимального быстродействия для системы любого порядка $n \ge 2$.

4 Результаты и обсуждение

Основными результатами являются:

– необходимое и достаточное условия существования решения одного класса интегрального уравнения и построение его общего решения;

– выделение всех множеств управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы из любого начального состояния в любое желаемое конечное состояние для линейных систем;

– предлагаемый принцип погружения позволяющий свести исходную краевую задачу оптимального быстродействие с ограничениями к специальной начальной задаче оптимального управления;

– необходимое и достаточное условия существования допустимого управления;

– разработан алгоритм решения задачи оптимального быстродействия с ограничениями для линейных систем любого порядка.

Полученные результаты являются решениями актуальных проблем теории оптимального быстродействия с ограничениями имеющие многочисленные приложения.

5 Заключение

Разработан новый метод решения задачи оптимального быстродействия линейных систем с краевыми условиями, при наличии фазовых, интегральных ограничений и голономных связей. Создана общая теория краевых задач оптимального быстродействия имеющая многочисленные приложение в естественных науках, технике, экономике.

Принципиальное отличие предлагаемого метода от известных методов состоит в том, что исходная задача погружается в задачу управляемости с управлениями из функциональных пространств с последующим сведением к начальной задаче оптимального управления.

Список литературы

[1] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1985. – 480 с.

[2] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 430 с.

[3] Понтрягин Л.С., Болтанский В.Г., Гамирелидзе Т.В., Мищенко Е. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1965. – 384 с.

[4] Краснов М.Л. Интегральное уравнения. – М.: Наука, 1975. – 303 с.

[5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 623 с.

[6] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1968. – 310 с.

[7] Айсагалиев С.А. Управляемость некоторый системы дифференциальных уравнений // Дифференциальное уравнение. – 1991. – Том 27, № 9. – С. 1037-1047.

[8] Айсагалиев С.А., Айсагалиева С.С. Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнение. – 1993. – Том 29, № 4. – С. 471-482.

[9] Айсагалиев С.А., Белогуров А.П. Управляемость и быстродействие процессом, описываемого параболического уравнением с ограниченным управление // Сибирский математический журанал. – 2012. – Том 53, № 1. – С. 13-28.

[10] Айсагалиев С.А. Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траектории и ограниченным управлением // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Том 30, № 5. – С. 748-757.

[11] Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А. Оптимальное управление линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Том 48, № 6. – С. 826-836.

[12] Айсагалиев С.А. Проблемы качественной теории дифференциальных уравнений. – Қазақ университетi: Алматы, 2016. – 397 с.

[13] Айсагалиев С.А. Лекции по оптимальному управлению. – Қазақ университетi: Алматы, 2007. – 278 с.

[14] Айсагалиев С.А., Белогуров А.П., Севрюгин И.В. Управление тепловыми процессами // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2012. – № 1(72). – С. 14-26.

[15] Айсагалиев С.А., Севрюгин И.В. Управляемость и быстродействие процесса, описываемого линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с ограничениями // Математический журнал. – 2013. – Т. 13, № 2(48). – С. 5-30.

[16] Айсагалиев С.А., Севрюгин И.В. Управляемость и быстродействие процесса, описываемого обыкновенными дифференциальными уравнениями с ограничениями // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2013. – Т. 14, № 3(78). – С. 3-20.

[17] Айсагалиев С.А., Шангитова М.Е. К математической теории управляемых процессов // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2013. – № 2 (77). – С. 21-36.

[18] Айсагалиев С.А. К решению Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в неограниченной области // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2013. – № 1 (76). – С. 4-21.

[19] Айсагалиев С.А., Аязбаева А.М. К построению оптимального фильтра для случайных процессов // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2012. – № 3(74). – С. 4-21.

[20] Айсагалиев С.А., Айсагалиева С.С. Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 4. – С. 555-567.

[21] Айсагалиев С. А. Управляемость и оптимальное управление в нелинейных системах. Журнал вычислительной техники и систем // Sciences International. – 1994. – № 32(5). – С. 73-80.

[22] Айсагалиев С. А., Айсагалиева С. С. Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 4. – С. 471-482.

[23] Айсагалиев С. А., Белогуров А. П. Управляемость и скорость процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 13-28.

[24] Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 495 с.

[25] Габасов Р., Киориллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 480 с.

References

[1] Ioffe A.D., Tihomirov V.M., *Teoriya ekstremalnyih zadach* [Theory of extreme problems] (M.: Nauka, 1985): 480.

[2] Alekseev V.M., Tihomirov V.M., Fomin S.V., *Optimalnoe upravlenie* [Optimal control] (M.: Nauka, 1979): 430.

[3] Pontryagin L.S., Boltanskiy V.G., Gamirelidze T.V., Mischenko E., *Matematicheskaya teoriya optimalnyih protsessov* [Mathematical theory of optimal processes] (M.: Nauka, 1965): 384.

[4] Krasnov M.L., *Integralnoe uravneniya* [Integral equation] (M.: Nauka, 1975): 303.

[5] Kolmogorov A.N., Fomin S.V., *Elementyi teorii funktsii i funktsionalnogo analiza* [Elements of the theory of function and functional analysis] (M.: Nauka, 1989): 623.

[6] Tihonov A.N., Arsenin V.Ya., *Metodyi resheniya nekorrektnyih zadach* [Methods of solving incorrect problems] (M.: Nauka, 1968): 310.

[7] Aisagaliev S.A., "Upravlyaemost nekotoryiy sistemyi differentsialnyih uravneniy [Controllability of some systems of differential equations]", *Differentsialnoe uravnenie* Vol. 27, No 9 (1991): 1037-1047.

[8] Aisagaliev S.A., Aisagalieva S.S., "Konstruktivnyiy metod resheniya zadachi upravlyaemosti dlya obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy [Constructive method for solving the controllability problem for ordinary differential equations]", *Differentsialnyie uravnenie* Vol. 29, No 4 (1993): 471-482.

[9] Aisagaliev S.A., Belogurov A.P., "Upravlyaemost i byistrodeystvie protsessom, opisyivaemogo parabolicheskogo uravneniem s ogranichennyim upravlenie [Controllability and speed of the process described parabolic equation with limited control]", *Sibirskiy matematicheskiy zhuranal* Vol. 53, No 1 (2012): 13-28.

[10] Aisagaliev S.A., "Optimalnoe upravlenie lineynyimi sistemami s zakreplennyimi kontsami traektorii i ogranichennyim upravleniem [Optimal control of linear systems with fixed trajectory ends and limited control]", *Differentsialnyie uravneniya* Vol. 30, No 5 (1994): 748-757.

[11] Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A., "Optimalnoe upravlenie lineynyimi sistemami s lineynyim kriteriem kachestva i ogranicheniyami [Optimal control of linear systems with linear quality criterion and constraints]", *Differentsialnyie uravneniya* Vol. 48, No 6 (2012): 826-836.

[12] Aisagaliev S.A., *Problemyi kachestvennyoy teorii differentsialnyih uravneniy* [Problems of the qualitative theory of differential equations] (Qazaq universiteti: Almaty, 2016): 397.

[13] Aisagaliev S.A. *Lektsii po optimalnomu upravleniyu* [Lectures on optimal control] (Qazaq universiteti: Almaty, 2007): 278.

[14] Aisagaliev S.A., Belogurov A.P., Sevryugin I.V., "Upravlenie teplovyimi protsessami [Management of thermal processes]", *Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf.* No 1 (72) (2012): 14-26.

[15] Aisagaliev S.A., Sevryugin I.V., "Upravlyaemost i byistrodeystvie protsessa, opisyivaemogo lineynoy sistemoy obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy s ogranicheniyami [Controllability and speed of the process described by a linear system of ordinary differential equations with restrictions]", *Matematicheskiy zhurnal* Vol. 13, No 2(48) (2013): 5-30.

[16] Aisagaliev S.A., Sevryugin I.V., "Upravlyaemost i byistrodeystvie protsessa, opisyivaemogo obyiknovennyimi differentsialnyimi uravneniyami s ogranicheniyami [Controllability and speed of the process described by ordinary differential equations with restrictions]", *Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf.* Vol. 14, No 3(78) (2013): 3-20.

[17] Aisagaliev S.A., Shangitova M.E., "K matematicheskoy teorii upravlyaemyih protsessov [On the mathematical theory of controlled processes]", *Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf.* No 2 (77) (2013): 21-36.

[18] Aisagaliev S.A., "K resheniyu Nave-Stoksa dlya vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti v neogranichennoy oblasti [To the Navier-Stokes solution for a viscous incompressible fluid in an unbounded region]", *Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf.* No 1 (76) (2013): 4-21.

[19] Aisagaliev S.A., Ayazbaeva A.M., "K postroeniyu optimalnogo filtra dlya sluchaynyih protsessov [To construct an optimal filter for random processes]", *Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf.* No 3(74) (2012) : 4-21.

[20] Aisagaliev S.A., Aisagalieva S.S., "Konstruktivnyiy metod resheniya zadachi upravlyaemosti dlya obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy [Constructive method for solving the controllability problem for ordinary differential equations]", *Differentsialnyie uravneniya* Vol. 29, No 4 (1993) 555-567.

[21] Aisagaliev S.A., "Upravlyaemost i optimalnoe upravlenie v nelineynyih sistemah. Zhurnal vyichislitelnoy tehniki i sistem [Controllability and optimal control in nonlinear systems. Journal of computer science and systems]", *Sciences International* No 32(5) (1994): 73-80.

[22] Aisagaliev S.A., Aisagalieva S.S., "Konstruktivnyiy metod resheniya zadachi upravlyaemosti dlya obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy [Constructive method for solving the controllability problem for ordinary differential equations]", *Differentsialnyie uravneniya* Vol. 29, No 4 (1993): 471-482.

[23] Aisagaliev S.A., Belogurov A.P., "Upravlyaemost i skorost protsessa, opisyivaemogo parabolicheskim uravneniem s ogranichennyim upravleniem [Controllability and speed of the process described by the parabolic equation with limited control. Siberian mathematical journal]", *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* Vol. 53, No 1 (2012): 13-28.

[24] Zubov V.I., *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on control theory] (M.: Nauka, 1975): 495.

[25] Gabasov R., Kiorillova F.M., *Kachestvennaya teoriya optimalnyih protsessov* [Qualitative theory of optimal processes] (M.: Nauka, 1971): 480.