МРНТИ 27.29.19

[1]Б.Е. Кангужин, [2]А.А. Сеитова
[1]профессор, E-mail: kanbalta@mail.ru
[2]PhD докторант, E-mail: functionaliya@gmail.com
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

# О ВЫРОЖДЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

**Аннотация**. Понятие вырожденных и невырожденных краевых задач ввел В.А. Марченко. Невырожденные краевые задачи согласно классификации Биркгофа делятся на регулярные и нерегулярные граничные условия. В данной работе приведены примеры вырожденных и невырожденных краевых задач Штурма-Лиувилля с нерегулярными по Кирхгофу граничными условиями на графе-звезде. Указанные примеры обобщают результаты работ В.А. Садовничего и его соавторов, а также работы Б.Е. Кангужина с соавторами. Для оператора Штурма-Лиувилля с симметричными коэффициентами на отрезке подобный эффект вырождения отмечен в работах М. Стоуна. В случае дифференциальных операторов высших порядков с симметричными коэффициентами на отрезке эффект вырождения указан в работе В.А. Садовничего и Б.Е. Кангужина. Эффект, когда одна и та же краевая задача Штурма-Лиувилля, в зависимости от свойств потенциала может иметь дискретный или непрерывный спектр был ранее отмечен в монографии Б.Е.Кангужина и М.А.Садыбекова. Там же изучены базисные свойства системы собственных и присоединенных функций в пространстве квадратично-суммируемых функций нерегулярных по Биркгофу краевых задач Штурма-Лиувилля на конечном отрезке.
**Ключевые слова**: вырожденные краевые задачи, невырожденные краевые задачи, регулярные и нерегулярные граничные условия, краевая задача Штурма-Лиувилля, граф-звезда.

[1]Б.Е. Кангужин, [2]А.А.Сеитова
[1]Профессор, E-mail: kanbalta@mail.ru
[2]PhD докторанты, E-mail: functionaliya@gmail.com
әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
**Геометриялық графтардағы Штурм-Лиувилль өзгеше шеттік есептері туралы**

**Аңдатпа**. Өзгеше және өзгеше емес шеттік есептердің түсінігін В.А. Марченко енгізді. Өзгеше емес шеттік есептер Биркгоф классификациясына сәйкес регулярлы және регулярлы емес шекаралық шарттарға бөлінеді. Бұл жұмыста граф-жұлдыздағы Биркгоф шекаралық шарттары бойынша регулярлы емес өзгеше және өзгеше емес Штурм-Лиувилль шеттік есептерінің мысалдары келтірілген. Көрсетілген мысалдар В.А. Садовничий және оның бірлескен авторларының, сонымен қатар Б.Е. Кангужиннің бірлескен авторларымен жұмыстарының нәтижелерін жалпылайды. Симметриялы ко ффициенттері бар Штурм-Лиувилль операторы үшин кесіндіде өзгешеленудің осындай тәрізді әсері М.Стоунның жұмыстарында атап өтілген. Симметриялы коэффициенттері бар жоғары ретті дифференциалдық операторлар жағдайында кесіндідегі өзгешелену әсері В.А. Садовничий және Б.Е. Кангужиннің жұмысында көрсетілген. Потенциалдың қасиеттеріне байланысты бірдей Штурм-Лиувиль шекаралық есептерінің дискретті немесе үзіліссіз спектрге ие болатындығы туралы Б.Е. Кангужин және М.А.Садыбеков монографиясында бұрын атап өткен. Сол жерде кесінді бойындағы Штурм-Лиувиллдің Биркгоф бойынша регулярлы емес шекаралық есептерінің меншкті және қосалқы функцияларының квадраттық қосынды функциялар жүйесінің базистік қасиеттері зерттелген.
**Түйін сөздер**: өзгеше шеттік есептер, өзгеше емес шеттік есептер, регулярлы және регулярлы емес шекаралық шарттар, Штурм-Лиувилль шеттік есебі, граф-жұлдызы.

[1]B.E. Kanguzhin, [2]A.A. Seitova
[1]Professor, E-mail: kanbalta@mail.ru
[2]PhD student, E-mail: functionaliya@gmail.com
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

**On degenerate Sturm-Liouville boundary value problems on geometric graphs**

**Abstract**. The concept of degenerate and non-degenerate boundary value problems was introduced by V.A. Marchenko. Non-degenerate boundary value problems according to the classification of Birkhoff are divided into regular and irregular boundary conditions. This paper gives examples of degenerate and non-degenerate Sturm-Liouville boundary value problems with Birkhoff irregular boundary conditions on a star graph. These examples summarize the results of V.A. Sadovnichy and his co-authors, as well as the work of B.E. Kanguzhin with co-authors. For the Sturm-Liouville operator with symmetrical coefficients on an interval similar effect was observed degeneration in the works of M. Stoun. In the case of higher-order differential operators with symmetric coefficients on the interval, the degeneracy effect is indicated in V.A. Sadovnichy and B.E. Kanguzhin. The effect when the same Sturm-Liouville boundary value problem, depending on the properties of the potential, can have a discrete or continuous spectrum was previously noted in the monograph by B.E. Kanguzhin and M.A. Sadybekov. The basic properties of the system of eigenfunctions and associated functions in the space of quadratically summable functions of Birkhoff irregular boundary value Sturm-Liouville boundary value problems on a finite interval were also studied there.
**Key words**: degenerate boundary value problems, non-degenerate boundary value problems, regular and irregular boundary conditions, Sturm-Liouville boundary value problem, star graph.

## 1 Введение

Следующая система дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами

$$\begin{aligned}
&-U''_{p+1}(x_{p+1}) + q_{p+1}(x_{p+1})U_{p+1}(x_{p+1}) = \lambda U_{p+1}(x_{p+1}), \quad 0 < x_{p+1} < l_{p+1},\\
&-U''_p(x_p) + q_p(x_p)U_p(x_m) = \lambda U_p(x_p), \quad 0 < x_p < l_p,\\
&\dots\\
&-U''_1(x_1) + q_1(x_1)U_1(x_1) = \lambda U_1(x_1), \quad 0 < x_1 < l_1.
\end{aligned} \tag{1}$$

с условиями вида (a)

$$\begin{aligned}
&U_{p+1}(1) = U_1(0) = \ldots = U_p(0),\\
&U'_{p+1}(1) = U'_1(0) + ... + U'_p(0)
\end{aligned} \tag{2}$$

и условиями вида (b)

$$\begin{aligned}
W_s(U_1, ..., U_{p+1}) = \sum_{j=1}^{2} \Big[ &a_{sj}U_1^{(j-1)}(1) + a_{s(2+j)}U_2^{(j-1)}(1) + \ldots + a_{s(2p-2-j)}U_p^{(j-1)}(1)\\
&+ a_{s(2p+j)}U_{p+1}^{(j-1)}(0)\Big] = 0, \quad s = 1, ..., p+1
\end{aligned} \tag{3}$$

может быть интерпретирована как задача на собственные значения опеатора Штурма-Лиувилля на геометрическом графе $\Im$. Причем, в качестве геометрического графа $\Im = \{V, E\}$ выступает граф-звезда. Множество $V$ представляет множество вершин, занумерованных от 0 до $p + 1$. Вершина $(p + 1)$ называется внутренней вершиной графа. Условия вида (a) означают, что во внутренней вершине выполняются законы Кирхгофа [1]. Вершины $0, 1, ..., p$ называются граничными вершинами. Условия вида (b) интерпретируются как граничные условия. Для полноты изложения приведем матрицу смежности [2] графа-звезды $\Im = \{V, E\}$. Размерность матрицы смежности $(p{+}2)\times(p{+}2)$ и она имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество $E$ означает множество ориентированных дуг $e_1, ..., e_{p+1}$ графа $\Im$. При $i = 1, ..., p$ дуга $e_i$ направлена от вершины $(p{+}1)$ к вершине $i$. В то же время направление дуги $e_{p+1}$ выбрано от вершины 0 к вершине $(p+1)$. Длина дуги $e_i$ считается равной $l_i$.

При $p = 1$ задача (1), (2), (3) совпадает с задачей Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Подобные задачи подробно изучены в монографиях [3], [4]. Согласно результатам указанных в монографиях [3], [4] в случае достаточно гладких коэффициентов дифференциальных уравнений (1) при $p = 1$ возможны только следующие две возможности:

1) либо существует не более счетного числа собственных значений, не имеющих конечных предельных точек;

2) либо каждое комплексное число является собственным значением.

Больше того, первый случай разбивается на два альтернативных случая:

– собственные значения вообще отсутствуют (к примеру, задача Коши);

– собственных значений счетное число с единственной предельной точкой на бесконечности (к примеру, задача Дирихле).

Показано, что при $p = 1$ нет таких задач на собственные значения, у которых есть собственные значения, но их только конечное число.

Случай $p > 1$ мало изучен. В работе [5] при $p = 2$ выделены так называемые невырожденные краевые задачи на собственные значения. В работе [6] при $p = 2$ изучены возможные случаи, когда появляются вырожденные краевые условия. В частности, показано, что вырожденные краевые задачи невозможны, когда нет одинаковых по длине дуг [6]. При $p = 1$ вырожденные краевые задачи для дифференциальных уравнений порядка выше два исследовались в работах [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Вопросы сходимости спектральных разложений вырожденных краевых задач Штурма-Лиувилля можно найти в монографии [14].

В данной статье исследуется задача (1), (2), (3) при $p > 1$ на предмет существования вырожденных задач. Приводятся конкретные примеры, иллюстрирующие те или иные возможные распределения собственных значений краевых задач (1), (2), (3).

## 2 Пример, когда спектр краевой задачи (1), (2), (3) при произвольном $p > 1$ заполняет всю комплексную плоскость

Пусть $p$ – фиксированное натуральное число, не равное единице. Пусть функции $q_j \in L_2[0, l_j]$ при $j = 1, 2, ..., p+1$, где $l_j$ - длина дуги $e_j \in E$. Предположим, что существует дуга $e_s \in E, \;\; 1 \le s \le p$ такая, что

1) $l_s = l_{p+1}$;
2) $q_s(l_s - x) = q_{p+1}(x)$ в $L_2(0, l_{p+1})$.

В таком случае справедливо утверждение.

**Теорема 1** *Предположим, что условия (3) заменены на следующие граничные условия*

$$\begin{cases} U_{p+1}(0) + U_s(1) = \sum\limits_{\substack{i\neq s\\ 1\leq i\leq p}} (\alpha_i U_i(1) + \beta_i U_i'(1)) \\ U_{p+1}'(0) - U_s'(1) = \sum\limits_{\substack{i\neq s\\ 1\leq i\leq p}} (\gamma_i U_i(1) + \varepsilon_i U_i'(1)) \\ \sum\limits_{\substack{i\neq s\\ 1\leq i\leq p}} (a_{ij} U_i(1) + b_{ij} U_i'(1)) = 0, \quad j = 1, ..., p-1 \end{cases} \tag{4}$$

*при произвольных числах $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varepsilon_i, a_{ij}, b_{ij}$. Тогда произвольное комплексное число $\lambda$ является собственным значением задачи (1), (2), (4).*

**Доказательство.** Фиксируем произвольное комплексное число $\lambda$. Покажем, что однородная задача (1), (2), (4) имеет нетривиальное решение. Нетривиальным решением указанной задачи является следующий набор функций.

Пусть на всех дугах $e_j \in E$, кроме $e_s$ и $e_{p+1}$, функций $U_i(x, \lambda) \equiv 0$. Теперь выберем $U_s(x, \lambda)$ и $U_{p+1}(x, \lambda)$ на дугах $e_s$ и $e_{p+1}$ соответственно. Из системы (1) вытекает, что

$$\begin{cases} -U_{p+1}''(x, \lambda) + q_{p+1}(x) U_{p+1}(x, \lambda) = \lambda U_{p+1}(x, \lambda), & 0 < x < l_{p+1}, \\ -U_s''(x, \lambda) + q_s(x) U_s(x, \lambda) = \lambda U_s(x, \lambda), & 0 < x < l_{p+1}. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь учтено, что $l_s = l_{p+1}$.

В то же время условия (2) примут вид

$$\begin{cases} U_{p+1}(1, \lambda) = 0, \quad U_s(0, \lambda) = 0, \\ U_{p+1}'(1, \lambda) = U_s'(0, \lambda). \end{cases} \tag{6}$$

Введем функцию-потенциал по формуле

$$q(x) = \begin{cases} q_{p+1}(x) & \text{при } 0 \leq x \leq l_{p+1}, \\ q_s(x - l_{p+1}) & \text{при } l_{p+1} \leq x \leq 2l_{p+1} \end{cases}$$

и рассмотрим дифференциальное уравнение на интервале

$$-V''(x, \lambda) + q(x) V(x, \lambda) = \lambda V(x, \lambda), \quad 0 < x < 2l_{p+1}. \tag{7}$$

К уравнению (7) добавим условия Коши в точке $x = l_{p+1}$.

$$V(l_{p+1}, \lambda) = 0, \quad V'(l_{p+1}, \lambda) = 1. \tag{8}$$

Потенциал $q(x)$ является симметричной функцией относительно точки $x = l_{p+1}$. Действительно, при $0 < x < l_{p+1}$ верно равенство $q(x) = q_{p+1}(x)$, а при $q(2l_{p+1} - x) =$

$q_s(l_{p+1}-x)$. По условию теоремы 1 вытекает $q(x) = q(2l_{p+1}-x)$ в $L_2(0,2l_{p+1})$. Если $q(x)$ симметрично относительно $x = l_{p+1}$, то решение задачи (7)-(8) антисимметрично относительно $x = l_{p+1}$, то есть

$$V(x,\lambda) = -V(2l_{p+1}-x,\lambda), \quad 0 < x < 2l_{p+1}. \tag{9}$$

Ясно, что $V(x,\lambda)$ не может быть тривиальной на $[0,2l_{p+1}]$ функцией. Положим

$$U_{p+1}(x,\lambda) = V(x,\lambda), \text{ при } 0 < x < l_{p+1},$$

$$U_s(x,\lambda) = -V(2l_{p+1}-x,\lambda), \text{ при } l_{p+1} < x < 2l_{p+1}.$$

Таким образом, определенные функции $U_{p+1}(x,\lambda)$ и $U_s(x,\lambda)$ представляют нетривиальные решения задачи (5), (6). С другой стороны, выполнение граничных условий (4) не вызывает сомнений, в силу свойства симметрии функции $V(x,\lambda)$ на $[0,2l_{p+1}]$. Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

**Замечание 1** *Теорема 1 остается в силе, если существует несколько дуг $e_s$ со свойствами 1) и 2).*

*В следующем пункте указан пример краевой задачи (1), (2), (4), когда нарушение на дуге $e_s$ условие 2) приводит к дискретности спектра.*

## 3 Пример невырожденной с нерегулярными по Биркгофу краевыми условиями задачи (1), (2), (3)

Напомним, что регулярность по Биркгофу граничных условий обычно не зависит от коэффициентов дифференциальной системы (1). То есть, если набор условий (3) регулярен по Биркгофу при одном наборе коэффициентов системы (1), то он остается регулярным и при всех других коэффициентах. В настоящем пункте покажем, что пример, приведенный в предыдущем пункте, соответствует невырожденной краевой задаче. То есть при некотором выборе коэффициентов системы $q_i(x_i), i = 1,2,...,p+1$ спектр задачи (1), (2), (4) дискретен. Отсюда следует, что спектральные свойства краевой задачи (1), (2), (4) сильно меняются при переходе от одних коэффициентов системы (1) к другим. Как известно, краевые задачи с регулярными по Биркгофу граничными условиями обладают устойчивыми спектральными свойствами. Следовательно, краевая задача (1), (2), (4) представляет пример невырожденной (дискретность спектра) с нерегулярными по Биркгофу граничными условиями задачи на собственные значения. Пусть $p$ - фиксированное натуральное число. Предполагаем, что $q_j \in L_2[0,l_j]$ при $j = 1,2,...,p+1$, где $l_j$ - длина дуги $e_j \in E$. Предположим, что существует дуга $e_s \in E$ такая, что
1) $l_s = l_{p+1}, \quad s \le p$;
2) $q_{p+1}(x) \equiv 0,\ q_s(x) \equiv a$ для всех $x \in L_2(0,l_{p+1})$.

Здесь и далее $a$ – фиксированное число. Предположим, что условия (3) заменены на следующие граничные условия:

$$\begin{cases} U_{p+1}(0) + U_s(l_s) = 0, \quad U'_{p+1}(0) - U'_s(l_s) = 0, \\ U_j(l_j) = 0, \quad j \ne s, \quad 1 \le j \le p. \end{cases} \tag{10}$$

**Теорема 2** *Краевая задача* (1), (2), (10) *имеет дискретный спектр при* $q_j \equiv 0, j \neq s$.

**Доказательство.** Выпишем характеристический определитель краевой задачи (1), (2), (10). При $j \neq s$ и $j \neq p+1$ решения $U_j(x,\lambda)$ ищем в виде

$$U_j(x,\lambda) = A\frac{\sin\sqrt{\lambda}(l_j - x_j)}{\sin\sqrt{\lambda}l_j}.$$

Если $j = s$, то решение $U_s(x,\lambda)$ ищем в виде

$$U_s(x,\lambda) = A\cos\sqrt{\lambda - a}x_s + B_s\frac{\sin\sqrt{\lambda - a}x_s}{\sqrt{\lambda - a}}.$$

Если $j = p+1$, то решение $U_{p+1}(x,\lambda)$ ищем в виде

$$U_{p+1}(x,\lambda) = A\cos\sqrt{\lambda}(l_{p+1} - x_{p+1}) - B_{p+1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(l_{p+1} - x_{p+1})}{\sqrt{\lambda}}.$$

Причем

$$B_{p+1} = B_s - A\sqrt{\lambda}\sum_{\substack{i\neq s\\ 1\leq i\leq p}}\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}l_j.$$

Теперь из первых двух условий (10) получим систему двух уравнений относительно $A$ и $B_s$.

$$\left(\cos\sqrt{\lambda}l_{p+1} + \operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l_{p+1}\sum_{j\neq s}\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}l_j\right)A - \frac{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l_{p+1}}{\sqrt{\lambda}}B_s +$$

$$+A\cos\sqrt{\lambda - a}l_s + B_s\frac{\sin\sqrt{\lambda - a}l_s}{\sqrt{\lambda - a}} = 0,$$

$$A\left(\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l_{p+1}) - \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l_{p+1})\sum_{j\neq s}\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}l_j)\right) + B_s\cos(\sqrt{\lambda}l_{p+1}) +$$

$$+A\sqrt{\lambda - a}\sin(\sqrt{\lambda - a}l_s) - B_s\cos(\sqrt{\lambda - a}l_s) = 0.$$

Таким образом, характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

здесь

$$a_{11} = \cos(\sqrt{\lambda}l_{p+1}) + \cos(\sqrt{\lambda - a}l_s) + \sin(\sqrt{\lambda}l_{p+1})\sum_{j\neq s}\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}l_j),$$

$$a_{12} = \frac{\sin(\sqrt{\lambda - a}l_s)}{\sqrt{\lambda - a}} - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}l_{p+1})}{\sqrt{\lambda}},$$

$$a_{21} = \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l_{p+1}) + \sqrt{\lambda - a}\sin\sqrt{\lambda - a}l_s - \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l_{p+1})\sum_{j\neq s}\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}l_s),$$

$$a_{22} = \cos(\sqrt{\lambda}l_{p+1}) - \cos(\sqrt{\lambda - a}l_s).$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Заметим, что краевая задача (1), (2), (10) частный случай задачи (1), (2), (4). Следовательно, при $a = 0$ и $l_s = l_{p+1}$ спектр этой задачи заполняет всю комплексную плоскость. Тем самым получаем, что краевая задача (1), (2), (10) не является краевой задачей с регулярными по Биркгофу граничными условиями. Другие примеры вырожденных, невырожденных краевых задач можно найти в работе [5].

## Список литературы


[1] Афанасьева Н.А., Булот Л.П. Электротехника и электроника. Учебное пособие. – СПб.: СПбГУН и П.Т., 2010. – 181 с.

[2] Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. – 382 с.

[3] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения // Киев: Наукова думка. – 1977. – С. 33-50.

[4] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы // М: Наука. – 1969. – С. 26-47.

[5] Кангужин Б.Е., Жапсарбаева Л.К., Сеитова А.А. Ассимптотика собственных значений оператора двухкратного дифференцирования с регулярными по Кирхгофу граничными условиями на графе-звезде // Математический журнал. – Том 18, № 2 (68). – 2018.

[6] Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Вырожденные краевые условия для задачи Штурма-Лиувилля на геометрическом графе // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 514-523.

[7] Садовничий В.А., Кангужин Б.Е. О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 267, № 2. – С. 310-313.

[8] Ахтямов А.М. Вырожденные краевые условия для дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 2018. — Т. 54, № 4. – С. 427.

[9] Дезин А.А. Спектральные характеристики общих граничных задач для оператора $D^2$ // Мат. Заметки. – 1985. – Т. 37, № 2. – С. 249-256.

[10] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by $D^2$. I. Spectral properties // J. of Math. Anal. and Appl. – 1989. – V. 141. – P. 538-558.

[11] Бияров Б.Н., Джумабаев С.А. Критерий вольтерровости краевых задач для уравнения Штурма-Лиувилля // Мат.заметки. – 1994. – Т. 56, № 1. – С. 143-146.

[12] Джумабаев С.А., Кангужин Б.Е. Об одной не регулярной задаче на конечном отрезке // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1988. – №1. – С. 14-18.

[13] Макин А.С. Об обратной задаче для оператора Штурма-Лиувилля с вырожденными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1408-1411.

[14] Кангужин Б.Е., Садыбеков М.А. Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных значений. – Шымкент: Ғалым, 1996. – 270 с.


## References


[1] Afanaseva N.A., Bulot L.P., "Elektrotehnika i elektronika [Electrical Engineering and Electronics]", *SPb.: SPbGUN i P.T. Uchebnoe posobie* (2010): 181.

[2] Emelichev V.A. i dr., "Lektsii po teorii grafov [Lectures on graph theory]", *M.: Nauka* (1990): 382.

[3] Marchenko V.A., "Operatoryi Shturma-Liuvillya i ih prilozheniya [Sturm-Liouville operators and their applications]", *Kiev: Naukova dumka* (1977): 33-50.

[4] Naymark M.A., "Lineynyie differentsialnyie operatoryi [Linear Differential Operators]", *M: Nauka* (1969): 26-47.

[5] Kanguzhin B.E., Zhapsarbaeva L.K., Seitova A.A., "Assimptotika sobstvennyih znacheniy operatora dvuhkratnogo differentsirovaniya s regulyarnyimi po Kirhgofu granichnyimi usloviyami na grafe-zvezde [Asymptotics of the eigenvalues of two-fold differentiation operator with Kirchhoff regular boundary conditions on a star graph]" , *Matematicheskiy zhurnal* Vol. 18, No 2 (68) (2018).

[6] Sadovnichiy V.A., Sultanaev Ya.T., Ahtyamov A.M., "Vyirozhdennyie kraevyie usloviya dlya zadachi Shturma-Liuvillya na geometricheskom grafe [Degenerate boundary conditions for the Sturm-Liouville problem on a geometric graph]" , *Differentsialnyie uravneniya* Vol. 55, No 4 (2019): 514-523.

[7] Sadovnichiy V.A., Kanguzhin B.E., "O svyazi mezhdu spektrom differentsialnogo operatora s simmetricheskimi koeffitsientami i kraevyimi usloviyami [On the connection between the spectrum of a differential operator with symmetric coefficients and boundary conditions]" , *Dokl. AN SSSR* Vol. 267, No 2 (1982): 310-313.

[8] Ahtyamov A.M., "Vyirozhdennyie kraevyie usloviya dlya differentsialnogo uravneniya tretego poryadka [Degenerate boundary conditions for a third-order differential equation]" , *Differentsialnyie uravneniya* Vol. 54, No 4 (2018): 427.

[9] Dezin A.A., "Spektralnyie harakteristiki obschih granichnyih zadach dlya operatora $D^2$ [Spectral characteristics of general boundary value problems for the operator $D^2$]" , *Mat. Zametki.* Vol. 37, No 2 (1985): 249-256.

[10] Lang P., Locker J., "Spectral theory of two-point differential operators determined by $D^2$. I. Spectral properties" , *J. of Math. Anal. and Appl.* Vol. 141 (1989): 538-558.

[11] Biyarov B.N., Dzhumabaev S.A., "Kriteriy volterrovosti kraevyih zadach dlya uravneniya Shturma-Liuvillya [Volterra criterion for boundary value problems for the Sturm-Liouville equation]" , *Mat.zametki* Vol. 56, No 1 (1994): 143-146.

[12] Dzhumabaev S.A., Kanguzhin B.E., "Ob odnoy ne regulyarnoy zadache na konechnom otrezke [On a non-regular problem on a finite interval]" , *Izv. AN KazSSR. Ser. fiz.-mat. nauk.* No 1 (1988): 14-18.

[13] Makin A.S., "Ob obratnoy zadache dlya operatora Shturma-Liuvillya s vyirozhdennyimi kraevyimi usloviyami [On the inverse problem for the Sturm-Liouville operator with degenerate boundary conditions]" , *Differents. uravneniya* Vol. 50, No 10 (2014): 1408-1411.

[14] Kanguzhin B.E., Sadybekov M.A., "Differentsialnyie operatoryi na otrezke. Raspredelenie sobstvennyih znacheniy [Differential operators on a segment. Distribution of eigenvalues]" , *Shyimkent: Galym* (1996): 270.