УДК 517.938

С.А. Айсагалиев*, Б.К. Абенов, А.М. Аязбаева

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
*E-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

К абсолютной устойчивости регулируемых систем в критическом случае

Предлагается новый метод исследования абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных регулируемых систем в критическом случае, путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Найдены секторы, где положение равновесия системы абсолютно устойчиво и проблема Айзермана имеет положительное решение. Эффективность метода показана на примере.
Отличительной особенностью предлагаемого подхода является получение тождеств вдоль решения системы относительно входной и выходной переменных нелинейного элемента. Эти тождества позволяют использовать сведения о свойствах нелинейной части системы для оценки несобственных интегралов. При таком подходе к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем удается получить дополнительные соотношения, связывающие фазовые переменные, что позволяет получить более эффективные условия абсолютной устойчивости.
Для системы с ограниченными ресурсами фазовые переменные ограничены и являются равномерно непрерывными функциями. Эти свойства были использованы при оценке несобственных интегралов и асимптотического свойства решения системы. Предлагаемый метод исследования абсолютной устойчивости позволяет получить более широкую область абсолютной устойчивости в пространстве параметров системы, нежели известные критерии.
Ключевые слова: абсолютная устойчивость, регулируемые системы, критический случай, неособое преобразование, несобственные интегралы.

S.A. Aisagaliev, B.K. Abenov, A.M. Ayazbayeva
To absolute stability of the regular systems in the critical case

A new method for studying of absolute stability of the equilibrium of nonlinear regular systems in the critical case is supposed by estimating improper integrals along the solutions of the system. Sectors are found, where the equilibrium position of the system is absolutely stable and Aizerman problem has a positive solution. The effectiveness of the method is demonstrated by example.
A distinctive feature of the proposed approach is to obtain the identities along the solutions of the system with respect to the input and output variables of the nonlinear element. These identities allow the use the information about the properties of the nonlinear part of the system for the evaluation of improper integrals. With this approach to the study of absolute stability regular systems the additional relations connecting the phase variables can be obtained, to provide more effective conditions for absolute stability.
For system with limited resources the phase variables are limited and are uniformly continuous functions. These properties have been used in the evaluation of improper integrals and the asymptotic properties of solutions of the system. The proposed method for studying the absolute stability allows to get a wider range of absolute stability in the parameter space of the system, rather than the known criteria.
Key words: absolute stability, regular systems, the critical case, a non-singular transformation, improper integrals.

С.Ә. Айсағалиев, Б.Қ. Әбенов, А.М. Аязбаева

Реттелетін жүйелердің қиын-қыстау жағдайдағы абсолюттік орнықтылығына

Реттелетін сызықтық емес жүйелердің тепе-теңдік күйінің абсолюттік орнықтылығын зерттеудің жүйенің шешімі бойында меншікті емес интегралдарды бағалау жолымен құрылған жаңа әдісі ұсынылады. Жүйенің тепе-теңдік күйі абсолюттік орнықты болатын және Айзерман мәселесінің оң шешімі бар секторлар табылған. Әдістің тиімділігі мысал арқылы көрсетілді.
ұсынылатын әдістің айырмашылық ерекшелігі болып жүйенің шешімдері бойында сызықтық емес элементтің енгізілетін (бастапқы) және шығарылатын (нәтижелік) айнымалыларына қатысты тепе-теңдіктер алу табылады. Бұл тепе-теңдіктер жүйенің сызықтық емес бөлігінің қасиеттері туралы мәліметтерді меншікті емес интегралдарды бағалау үшін қолдануға мүмкіндік береді. Реттелетін жүйелердің абсолюттік орнықтылығын осындай жолмен зерттегенде фазалық айнымалыларды байланыстыратын қосымша қатынастар алуға болады.
Шектеулі ресурстары бар жүйелер үшін фазалық айнымалылар шектеулі және бірқалыпты үздіксіз функциялар екені белгілі. Осы қасиеттер меншікті емес интегралдар мен жүйе шешімінің абсолюттік қасиеттерін бағалағанда пайдаланылды.
Абсолюттік орнықтылықты зерттеудің ұсынылған әдісі жүйенің параметрлері кеңістігіндегі абсолюттік орнықтылықтың белгілі критерийлерге қарағанда кеңірек аймағын алуға мүмкіндік береді.
Түйін сөздер: абсолюттік орнықтылық, реттелетін жүйелер, қиын-қыстау жағдай, ерекше емес түрлендіру, меншікті емес интегралдар.

Постановка задачи

Уравнение движения нелинейных систем автоматического управления в критическом случае имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma),\ \frac{d\xi}{dt} = \eta,\ \frac{d\eta}{dt} = \varphi(\sigma),\ \sigma = Dx + E\eta + F\xi, \\ &x(0) = x_0,\ \xi(0) = \xi_0,\ \eta(0) = \eta_0, t \in I = [0, \infty), \end{aligned} \tag{1}$$

где A, B, D, E, F – постоянные матрицы порядков $n{\times}n$, $n{\times}1$, $1{\times}n$, $1{\times}1$, $1{\times}1$, соответственно, матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A){<}0$, $j{=}\overline{1,n}$, $\lambda_j(A)$ – собственные значения матрицы A.

Функция

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1)/\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \overline{\varphi}(\sigma),\ 0 \leq \overline{\varphi}(\sigma)\sigma {\leq} \mu_0\sigma^2, \\ \overline{\varphi}(0) = 0,\ |\overline{\varphi}(\sigma)| \leq \overline{\varphi}_*,\ 0 < \overline{\varphi}_* < \infty, \forall\sigma, \sigma \in R^1\}. \end{aligned} \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число.

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1 = \{\overline{\varphi}(\sigma) \in C(R^1, R^1) \mid 0 \leq \overline{\varphi}(\sigma)\sigma < \mu_0\sigma^2,\ \overline{\varphi}(0) = 0, \\ |\overline{\varphi}(\sigma)| \leq \overline{\varphi}_*,\ 0 < \overline{\varphi}_* < \infty,\ \forall\sigma,\ \ \sigma \in R^1\} \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку величина φ_*, $0 < \overline{\varphi}_* < \infty$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, то включения (2), (3) содержат все нелинейности из сектора $[0, \mu_0]$. Встречающиеся на практике системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами, для таких систем функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условиям (2), (3).

Положения равновесия системы (1), (2) определяются из решения алгебраических уравнений

$$Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0,\ \eta_* = 0\,; \varphi(\sigma_*) = 0,\ \sigma_* = Dx_* + E\eta_* + F\xi_*.$$

Так как матрица A – гурвицева, $detA \neq 0$, $\varphi(\sigma_*) = 0$ только при $\sigma_* = 0$, то система (1), (2) имеет единственное положение равновесия ($x_* = 0$, $\eta_* = 0$, $\xi_* = 0$) при $F \neq 0$.

Полагаем, что в достаточно малой окрестности точки $\sigma = 0$ функцию $\varphi(\sigma)$ можно аппроксимировать линейной функцией $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$. Иными словами, при $|\sigma| < \delta$, где $\delta > 0$ – достаточно малое число, функция $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, $\varepsilon \leq \mu$, $\varepsilon > 0$. Тогда тривиальное решение системы (1), (2), равное $x_* = 0$, $\eta_* = 0$, $\xi_* = 0$, асимптотически устойчиво в малом, если матрица

$$A,\ A_1(\mu) = \begin{pmatrix} A + B\mu D & B\mu F & B\mu E \\ 0 & 0 & 1 \\ \mu D & \mu F & \mu E \end{pmatrix},\ \ 0 < \varepsilon \leq \mu < \overline{\mu}_0,\ \ \mu_0 \leq \overline{\mu}_0$$

– гурвицевы, где $\overline{\mu}_0$ – предельное значение $\mu \in [\varepsilon, \overline{\mu}_0)$.

Определение 1 *Положение равновесия* $x_* = 0$, $\eta_* = 0$, $\xi_* = 0$ *системы* (1), (2) *называется абсолютно устойчивым, если матрицы* A, $A_1(\mu)$, $\mu \in [\varepsilon, \overline{\mu}_0)$ *– гурвицевы и для всех* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *– решение дифференциального уравнения* (1) *обладает свойством* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; 0, x_0, \eta_0, \xi_0, \varphi) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t; 0, x_0, \eta_0, \xi_0, \varphi) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(t; 0, x_0, \eta_0, \xi_0, \varphi) = 0$ *для любых* x_0, η_0, ξ_0, $|x_0| < \infty$, $|\eta_0| < \infty$, $|\xi_0| < \infty$.

Заметим что:

1) исследуются свойства решений системы с дифференциальным включением

$$\dot{x} \in Ax + B\varphi(\sigma),\ \dot{\xi} \in \eta,\ \dot{\eta} \in \varphi(\sigma),\ \ \sigma = Dx + E\eta + F\xi,\ \ t \in I;$$

2) Поскольку $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, то уравнение (1) имеет неединственное решение, исходящее из начальной точки (x_0, η_0, ξ_0);

3) Из определения абсолютной устойчивости следует, что все решения системы, исходящие из любой начальной точки (x_0, η_0, ξ_0), $|x_0| < \infty$, $|\eta_0| < \infty$, $|\xi_0| < \infty$, стремятся к положению равновесия $x_* = 0$, $\eta_* = 0$, $\xi_* = 0$ при $t \to \infty$.

Определение 2 *Условиями абсолютной устойчивости системы* (1), (2) *называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы* (A, B, D, E, F, μ_0), *при выполнении которых положение равновесия* $(x_* = 0, \eta_* = 0, \xi_* = 0)$ *абсолютно устойчиво.*

Определение 3 *Будем говорить, что в секторе* $[\overline{\alpha}, \overline{\beta}]$, $\overline{\alpha} > 0$, $\overline{\beta} > 0$, $\overline{\alpha} > \overline{\beta}$ *– проблема Айзермана имеет положительное решение, если:*

1) величина $\overline{\beta} = \overline{\mu}_0 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$ *– достаточно малое число;*

2) для любого $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, $\overline{\alpha} \leq \mu \leq \overline{\beta})$ *– решение системы* (1) *асимптотически устойчиво;*

3) для любого

$$\overline{\varphi}(\sigma) \in \overline{\Phi}_1 = \{\overline{\varphi}(\sigma) \in C(R^1, R^1)\ /\ \overline{\alpha} = \frac{\overline{\varphi}(\sigma)}{\sigma} \leq \overline{\beta},\ \overline{\varphi}(0) = 0,$$

$$|\overline{\varphi}(\sigma)| \leq \overline{\varphi}_*,\ 0 < \varphi_* < \infty,\ \forall\sigma,\ \sigma \in R^1\}$$

положение равновесия системы (1) *абсолютно устойчиво;*

4) пара $(\overline{\varphi}, \sigma) \in H = \{(\overline{\varphi}, \sigma) \in R^2\ /\ |\overline{\varphi}| \leq \varphi_*,\ 0 < \varphi_* < \infty,\ |\sigma| \leq \sigma_*,\ < \sigma_* < \infty\}$.

Включение $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$ может быть представлено в виде

$$\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1 = \{\overline{\varphi}(\sigma) \in C(R^1, R^1) \ / \ 0 \leq \frac{\overline{\varphi}}{\sigma} \leq \mu_0, \ |\overline{\varphi}(\sigma)| \leq \overline{\varphi}_*, \ \forall \sigma, \ \sigma \in R^1,$$

$$\overline{\varphi} = 0, \ \ 0 < \overline{\varphi}_* < \infty\}.$$

Наряду (3) рассмотрим следующие включения

$$\begin{gathered}\varphi(\sigma) \in \Phi_2 = \{\overline{\varphi}(\sigma) \in C(R^1, R^1) \ / \ \alpha \leq \frac{\overline{\varphi}}{\sigma} \leq \mu_1, \ |\overline{\varphi}(\sigma)| \leq \overline{\varphi}_*, \ \forall \sigma, \ \sigma \in R^1, \\ \overline{\varphi}(0) = 0, \ 0 < \overline{\varphi}_* < \infty, \ \alpha > 0\}\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\varphi(\sigma) \in \Phi_3 = \{\overline{\varphi}(\sigma) \in C(R^1, R^1) \ / \ \beta \leq \frac{\overline{\varphi}}{\sigma + \mu_2^{-1}\overline{\varphi}} < \frac{\overline{\varphi}}{\sigma} \leq \mu_2, \ |\overline{\varphi}(\sigma)| \leq \overline{\varphi}_* \\ \forall \sigma, \ \sigma \in R^1, \ \overline{\varphi}(0) = 0, \ 0 < \overline{\varphi}_* < \infty, \ \beta > 0\}\end{gathered} \tag{5}$$

Включение $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_2$ содержит все нелинейности из сектора $[\alpha, \mu_1]$, а $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_3$ содержит нелинейности из $[\frac{\beta}{1-\beta\mu_2^{-1}}, \mu_2]$.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1 *Найти условие абсолютной устойчивости положения равновесия системы* (1), (2), (3).

Задача 2 *Найти сектор* $[\alpha, \mu_1]$, *где положения равновесия* $x_* = 0$, $\eta_* = 0$, $\xi_* = 0$ *системы* (1), (2), (4) *абсолютно устойчиво и проблема Айзермана имеет положительное решение.*

Задача 3 *Найти сектор* $[\frac{\beta}{1-\beta\mu_2^{-1}}, \mu_2]$, *где положения равновесия* $x_* = 0$, $\eta_* = 0$, $\xi_* = 0$ *системы* (1), (2), (5) *абсолютно устойчиво и проблема Айзермана имеет положительное решение.*

Отметим, что:

1) постановка задачи абсолютной устойчивости решений уравнений с дифференциальным включением отличается от постановки задачи на устойчивость по Ляпунову;

2) целесообразно для исследования абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2) разработать совершенно новый метод, отличный от второго метода Ляпунова.

Ниже приведен совершенно новый подход к исследованию абсолютной устойчивости положения равновесия и эти результаты являются продолжением научных исследований из [6-9].

Неособое преобразование

Как следует из включения (2), уравнение движения (1) может быть представлено в виде

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 \overline{\varphi}(\sigma), \sigma = Sz, z(0) = z_0, t \in I = [0, \infty) \tag{6}$$

где

$$z=\begin{pmatrix} x\\ \xi\\ \eta\end{pmatrix},\ A_1=A_1(\varepsilon)=\begin{pmatrix} A+B\varepsilon D & B\varepsilon F & B\varepsilon E\\ 0 & 0 & 1\\ \varepsilon D & \varepsilon F & \varepsilon E\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\ S=\big(D,F,E\big),$$

$\overline{\varphi}(\sigma)\in\Phi_1$, $\varepsilon>0$ – сколь угодно малое число, матрица $A_1=A_1(\varepsilon)$ порядка $(n+2)\times(n+2)$ – гурвицева.

Характеристический полином матрицы A_1 равен

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I_{n+2}-A_1|=\det(\lambda I_{n+2}-A_1)=\lambda^{n+2}+a_{n+1}\lambda^{n+1}+a_n\lambda^n+\ldots+a_1\lambda+a_0,$$

где I_{n+2} – единичная матрица порядка $(n+2)\times(n+2)$. Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли, матрица $\Delta(A_1)=0$. Тогда

$$A_1^{n+2}=-a_{n+1}A_1^{n+1}-a_nA_1^n-\ldots-a_1A_1-a_0I_{n+2},$$

где $a_i=a_i(\varepsilon), i=\overline{0,n+1}$.

Лемма 1 *Пусть вектор-строка* $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_{n+2})\in R^{n+2}$ *такая, что*

$$\theta B_1=0,\ \theta A_1B_1=0,\ldots,\theta A_1^nB_1=0,\theta A_1^{n+1}B_1\neq 0. \tag{7}$$

Тогда уравнение (6) *может быть представлено в виде*

$$\begin{aligned}&\dot y_1=y_2,\dot y_2=y_3,\ldots,\dot y_{n+1}=y_{n+2},\\ &\dot y_{n+2}=-a_0y_1-a_1y_2-\ldots-a_{n+1}y_{n+2}+\theta A_1^{n+1}B_1\overline{\varphi}(\sigma),\end{aligned} \tag{8}$$

где $y_1=\theta z, y_2=\theta A_1z,\ldots,y_{n+1}=\theta A_1^nz, y_{n+2}=\theta A_1^{n+1}z,\ z=z(t),\ y_i=y_i(t),\ i=\overline{1,n+2}$, $t\in I$.

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение из (6). Умножая его слева на θ, имеем

$$\theta\dot z=\theta A_1z+\theta B_1\overline{\varphi}(\sigma)=\theta A_1z,\ \ \theta z(0)=\theta z_0,\ \ t\in I, \tag{9}$$

в силу равенства $\theta B_1=0$, где $\theta z=y_1$, $\theta A_1z=y_2$. Следовательно, $\dot y_1(t)=y_2(t)$, $t\in I$.

Дифференцируя по t тождество (9), получим

$$\dot y_2=\theta\ddot z=\theta A_1\dot z=\theta A_1[A_1z+B_1\overline{\varphi}(\sigma)]=\theta A_1^2z=y_3,\ \ y_2(0)=\theta A_1z_0,\ \ t\in I,$$

где $\theta A_1B_1=0$. Аналогичным путем получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot y_3=\theta\ddot z=\theta A_1^2\dot z=\theta A_1^3z=y_4,\ \ y_3(0)=\theta A_1^2z_0,\ldots,$$

$$\dot y_{n+1}=y_{n+2},\ \ \dot y_{n+2}=-a_0y_1-a_1y_2-\ldots-\theta A_1^{n+1}B_1\overline{\varphi}(\sigma),$$

где $y_{n+1}(0)=\theta A_1^nz_0$. Лемма доказана.

Лемма 2 *Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того, ранг матрицы*

$$R = \|\theta^*, A_1^*\theta^*, \dots, A_1^{*n+1}\theta^*\| \tag{10}$$

порядка $(n+2)\times(n+2)$ *равен* $(n+2)$, *где* $(*)$ – *знак транспонирования. Тогда:*

1) существует вектор-строка $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n+1}) \in R^{n+2}$ *такая, что*

$$\sigma = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 + \ldots + \beta_n y_{n+1} + \beta_{n+1} y_{n+2}; \tag{11}$$

2) если $y_1 = \theta z = 0, y_2 = \theta A_1 z = 0, \dots, y_{n+2} = \theta A_1^{n+1} z = 0$, *то* $z = 0$.

Доказательство. Заметим, что ранг $R = n+2$ тогда и только тогда, когда векторы $\theta^*, A_1^*\theta^*, \dots, A_1^{*n+1}\theta^*$ – линейно независимы. Поскольку векторы $\theta^*, A_1^*\theta^*, \dots, A_1^{*n+1}\theta^*$ образуют базис в R^{n+2}, то вектор $S^* \in R^{n+2}$ может быть представлен однозначно в виде $S^* = \beta_0\theta^* + \beta_1 A_1^*\theta^* + \ldots + \beta_{n+1}A_1^{*n+1}\theta^*$. Тогда

$$\sigma = Sz = \beta_0\theta z + \beta_1 A_1^*\theta^* z + \ldots + \beta_n A_1^{*n+1}\theta^* z = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 + \ldots + \beta_{n+1} y_{n+2}.$$

Теперь второе уравнение из (6) запишется в виде (11).

С другой стороны, из (10) следует, что пара (θ^*, A_1^*) управляема. Из управляемости пары (θ^*, A_1^*) следует, что равенства $\theta z = 0, \theta A_1 z = 0, \dots, \theta A_1^{n+1} z = 0$, которые влекут за собой $z = 0$. Следовательно, из $y_i = 0$, $i = \overline{1, n+2}$ следует, что $z = 0$. Лемма доказана.

Из лемм 1, 2 следует, что если выполнены равенства (7) и ранг $R = n+2$, то система (1), (2), (3) равносильна системе (8), (11). Более того, из $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t) = 0$, $i = \overline{1, n+2}$ следует $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$, где $z(t) = (x(t), \eta(t), \xi(t))$, $t \in I$.

Вводя обозначения

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \theta A^{n+1} B_1 \end{pmatrix}, \quad \overline{S} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n+1}),$$

уравнения движения системы (8), (11) представим в виде

$$\dot{y} = \overline{A}y + \overline{B}\varphi(\sigma), \quad \sigma = \overline{S}y, \quad \varphi(\sigma) \in \Phi_0. \tag{12}$$

Аналогичным путем уравнения движения (1), (2), (4) и (1), (2), (5) могут быть представлены в виде

$$\dot{y} = \overline{A}y + \overline{B}\varphi(\sigma), \quad \sigma = \overline{S}y, \quad \varphi(\sigma) \in \Phi_2, \tag{13}$$

$$\dot{y} = \overline{A}y + \overline{B}\varphi(\sigma), \quad \sigma = \overline{S}y, \quad \varphi(\sigma) \in \Phi_3. \tag{14}$$

Свойства решений

Можно показать, что решение системы (1), (2), а также (13), (14) ограничены.

Теорема 1 *Пусть матрицы* $A = A_1(\varepsilon)$ *– гурвицевы, т.е.* $Re\lambda_j(A_1) < 0$, $j = \overline{1, n+2}$, *функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$, *и пусть, кроме того, выполнены равенства* (7) *и ранг* $R = n+2$. *Тогда верны оценки*

$$|z(t)| \le c_0, \ \ |\dot{z}(t)| \le c_1, \ \ t \in I, \tag{15}$$

$$|y_i(t)| \le m_{i1}, \ \ |\dot{y}_i(t)| \le m_{i2}, \ \ i = \overline{1, n+2}, \ t \in I, \tag{16}$$

$$|\sigma(t)| \le c_2, \ |\dot{\sigma}(t)| \le c_3 \ \ \forall t, \ t \in I, \tag{17}$$

где $m_{i1} = const < \infty$, $m_{i2} = const < \infty$, $c_i = const < \infty$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Кроме того, функции $z(t)$, $y_i(t)$, $i = \overline{1, n+2}$, $\sigma(t)$, $t \in I$ *– равномерно непрерывны.*

Доказательство. Из включения $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$ следует, что $|\overline{\varphi}(\sigma(t))| \le \overline{\varphi}_*$, $0 < \overline{\varphi}_* < \infty$, $\forall t$, $t \in I$. Так как матрица $A_1 = A_1(\varepsilon)$ – гурвицева, т.е. $a = \max\limits_{1 \le j \le n+1} Re\lambda_j(A_1) < 0$, то $\|e^{A_1 t}\| \le ce^{(a+\delta)t}$ $\forall t$, $t \in I$, $c = c(\delta) > 0$, $\delta > 0$ – сколь угодно малое число.

Решение дифференциального уравнения (6) запишется так:

$$z(t) = e^{A_1 t} z_0 + \int\limits_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 \overline{\varphi}(\sigma(\tau)) d\tau, \ \ t \in I.$$

Тогда

$$|z(t)| \le \|e^{A_1 t}\| |z_0| + \int\limits_0^t \|e^{A_1(t-\tau)}\| \|B_1\| |\overline{\varphi}(\sigma(\tau))| d\tau \le c|z_0| e^{(a+\delta)t} +$$

$$+ce^{(a+\delta)t} |B_1| \overline{\varphi}_* \int\limits_0^t e^{-(a+\delta)\tau} d\tau = c|z_0| e^{(a+\delta)t} + ce^{(a+\delta)t} |B_1| \overline{\varphi}_* \left[-\frac{1}{a+\delta} e^{-(a+\delta)t} + \frac{1}{a+\delta} \right] =$$

$$= c|z_0| e^{(a+\delta)t} + \frac{1}{a+\delta} c|B_1| \overline{\varphi}_* (-1 + e^{(a+\delta)t}) \le c_0, \ \ \forall t, \ \ t \in I,$$

где $e^{(a+\delta)t} \le 1$, $\forall t$, $t \in I$, $a + \delta < 0$. Отсюда следует ограниченность решения (6). Следовательно, ограничено решение системы (8), (11). Из (6) следует, что

$$|\dot{z}(t)| \le \|A\| |z(t)| + |B_1| \|\overline{\varphi}(\sigma(t))\| \le \|A_1\| c_0 + |B_1| \overline{\varphi}_* = c_1, \ \ \forall t, \ \ t \in I,$$

$$|\sigma(t)| \le \|S\| |z(t)| \le c_2, \ \ |\dot{\sigma}(t)| \le \|S\| |\dot{z}(t)| \le c_3, \ \ \forall t, \ \ t \in I.$$

Из ограниченности $\dot{z}(t), \dot{\sigma}(t)$, $t \in I$ следуют их равномерные непрерывности, так как $y_1(t) = \theta z(t), \ \ y_2(t) = \theta A_1 z(t), \ldots, y_{n+1}(t) = \theta A_1^n z(t)$, $t \in I$, то

$$|y_1(t)| \le |\theta| |z(t)| \le |\theta| c_0 = m_{11}, \ |y_2(t)| \le |\theta| \ \|A_1\| \ |z(t)| \le m_{21}, \ldots,$$

$$|y_{n+1}(t)| \le |\theta| \ \|A_1^n\| \ |z(t)| \le m_{n+1,1}, \ \ \forall t, \ \ t \in I.$$

Из (8) следует, что $|\dot{y}_i(t)| \le |y_{i+1}(t)| \le m_{i2}$, $i = \overline{1, n}$, $\forall t$, $t \in I$,

$$|\dot{y}_{n+1}(t)| \le |a_0| |y_1(t)| + \ldots + |a_n| |y_{n+1}(t)| + \|\theta A_1^n B\| \overline{\varphi}_* \le m_{n+1,2}, \ \ \forall t, \ \ t \in I.$$

Из ограниченности производных $\dot{y}_i(t)$, $i = \overline{1, n+2}$ следуют равномерные непрерывности функции $y_i(t)$, $i = \overline{1, n+2}$, $t \in I$. Теорема доказана.

Теорема 2 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, величина* $\kappa = \theta A_1^{n+1} B_1 \neq 0$. *Тогда вдоль решения системы* (12) – (14) *верны тождества:*

$$\overline{\varphi}(\sigma(t)) = \kappa^{-1}\omega(t) + \kappa^{-1}a_0 y_1(t) + \ldots + \kappa^{-1}a_{n+1}y_{n+2}(t),\ t \in I, \tag{18}$$

$$\sigma(t) = \beta_0 y_1(t) + \beta_1 y_2(t) + \ldots + \beta_n y_{n+1}(t) + \beta_{n+1}y_{n+2}(t),\ t \in I, \tag{19}$$

$$\dot{\sigma}(t) = \beta_0 y_2(t) + \beta_1 y_3(t) + \ldots + \beta_n y_{n+2}(t) + \beta_{n+1}\omega(t),\ t \in I, \tag{20}$$

где $\omega = \omega(t) = \dot{y}_{n+2}(t)$, $t \in I$.

Доказательство. Вдоль решения системы (12) (см. (8), (11)) верно тождество

$$\dot{y}_{n+2}(t) = \omega(t) = -a_0 y_1(t) - a_1 y_2(t) - \ldots - a_{n+1}y_{n+2}(t) + \chi\overline{\varphi}(\sigma(t)),\ \ t \in I,$$

где $\chi = \theta A_1^n B_1 \neq 0$. Отсюда следует тождество (18). Тождество (19) следует из (11). Так как $\dot{\sigma}(t) = \beta_0\dot{y}_1(t) + \beta_1\dot{y}_2(t) + \ldots + \beta_{n+1}\dot{y}_{n+2}(t)$, $t \in I$, то верно и тождество (20). Теорема доказана.

Лемма 3 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица* A_1 *– гурвицева, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. *Тогда для любой постоянной матрицы* Q *порядка* $(n+3) \times (n+3)$ *квадратичная форма* $\xi^*(t)Q\xi(t)$, $\xi(t) = (\omega(t), y_1(t), \ldots, y_{n+2}(t))$, $t \in I$ *представима в виде*

$$\begin{aligned}\xi^*(t)Q\xi(t) = q_0\omega^2(t) + q_1 y_1^2 + \ldots + q_{n+1}y_{n+1}^2(t) + q_{n+2}y_{n+2}^2(t) + \\ + \frac{d}{dt}[\xi^*(t)F\xi(t)],\ \ t \in I = [0, \infty),\end{aligned} \tag{21}$$

где F *– постоянная матрица порядка* $(n+2) \times (n+2)$.

Доказательство. Пусть $n+2 = n_1$. Легко убедиться в том, что:
а) если n_2, k – нечетные числа, $k \leq n_2$, то

$$\omega y_k = \frac{d}{dt}(y_k y_{n_1} - y_{k+1}y_{n_1-1} + \ldots - \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n_1+k}{2}} y^2_{\frac{n_1+k}{2}});$$

б) если n_1 – нечетное, k – четное число, $k < n_1$, то

$$\omega y_k = \frac{d}{dt}(y_k y_{n_1} - y_{k+1}y_{n_1-1} + \ldots - (-1)^{\frac{n_1+k+1}{2}} y_{\frac{n_1+k-1}{2}} y_{\frac{n_1+k+1}{2}}) + (-1)^{\frac{n_1+k+1}{2}} y^2_{\frac{n_1+k+1}{2}};$$

в) если n_1 – четное, k – нечетное число, $k < n_1$, то

$$\omega y_k = \frac{d}{dt}(y_k y_{n_1} - y_{k+1}y_{n_1-1} + \ldots - (-1)^{\frac{n_1+k-1}{2}} y_{\frac{n_1+k-1}{2}} y_{\frac{n_1+k+1}{2}}) - (-1)^{\frac{n_1+k+1}{2}} y^2_{\frac{n_1+k+1}{2}};$$

г) если n_1 – нечетное, k – нечетное число, $k \leq n_1$, то

$$\omega y_k = \frac{d}{dt}(y_k y_{n_1} - y_{k+1}y_{n_1-1} + \ldots + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n_1+k}{2}} y^2_{\frac{n_1+k}{2}});$$

д) если k – нечетное, s – нечетное число, $s > k$, то

$$y_k y_s = \frac{d}{dt}(y_k y_{s-1} - y_{k+1}y_{s-2} + \ldots - (-1)^{\frac{k+s}{2}+1} y^2_{\frac{k+s}{2}-1} y_{\frac{k+s}{2}}) + (-1)^{\frac{k+s}{2}+1} y^2_{\frac{k+s}{2}};$$

е) если k – нечетное, s – четное число, $s > k$, то

$$y_k y_s = \frac{d}{dt}(y_k y_{s-1} - y_{k+1} y_{s-2} + \ldots + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{s}{2}+1} y^2_{\frac{s}{2}});$$

ж) если k – четное, s – нечетное число, $s > k$, то

$$y_k y_s = \frac{d}{dt}(y_k y_{s-1} - y_{k+1} y_{s-2} + \ldots + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{k+s-1}{2}} y^2_{\frac{k+s-1}{2}});$$

з) если k – четное, s – четное число, $s > k$, то

$$y_k y_s = \frac{d}{dt}(y_k y_{s-1} - y_{k+1} y_{s-2} + \ldots + (-1)^{\frac{k+s}{2}-1} y_{\frac{s+k}{2}-1} y_{\frac{k+s}{2}}).$$

В частности, при $n_1 = 3$ имеем:

$$\omega y_1 = \frac{d}{dt}(y_1 y_3 - \frac{1}{2} y_2^2); \;\; \omega y_2 = \frac{d}{dt}(y_2 y_3) - y_3^2; \;\; \omega y_3 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_3^2);$$

$$y_1 y_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_1^2), \;\; y_1 y_3 = \frac{d}{dt}(y_1 y_2) - y_2^2, \;\; y_2 y_3 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_2^2);$$

при $n_1 = 4$ имеем:

$$\omega y_1 = \frac{d}{dt}(y_1 y_4 - y_2 y_3) + y_3^2; \;\; \omega y_2 = \frac{d}{dt}(y_2 y_4 - \frac{1}{2} y_3^2);$$

$$\omega y_3 = \frac{d}{dt}(y_3 y_4) - y_4^2; \;\; \omega y_4 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_4^2); \;\; y_1 y_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_1^2);$$

$$y_1 y_3 = \frac{d}{dt}(y_1 y_2) - y_2^2, \;\; y_1 y_4 = \frac{d}{dt}(y_1 y_3 - \frac{1}{2} y_2^2),$$

$$y_2 y_4 = \frac{d}{dt}(y_2 y_3) - y_3^2; \;\; y_3 y_4 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_3^2).$$

Поскольку квадратичная форма $\xi^*(t)Q\xi(t)$ содержит слагаемые с постоянными коэффициентами произведения компонентов вектора $\xi(t)$, то верно представление вида (21). Лемма доказана.

Лемма 4 *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда несобственный интеграл*

$$\int_0^\infty \xi^*(t)Q\xi(t)dt = \int_0^\infty [q_0\omega^2(t) + q_1 y_1^2 + \ldots + q_{n+1} y_{n+1}^2(t) + q_{n+2} y_{n+2}^2(t)]dt + l_0, \;\; |l_0| < \infty, \quad (22)$$

$$l_0 = \int_0^\infty \frac{d}{dt}[y^*(t)Fy(t)]dt = y^*(t)Fy(t)\Big|_0^\infty = y^*(\infty)Fy(\infty) - y^*(0)Fy(0). \quad (23)$$

Доказательство. Интегрируя тождество (21) с учетом оценки (16), где $|y_i(0)| \le m_{i1}$, $|y_i(\infty)| \le m_{i1}$, $i = \overline{1, n+2}$, получим соотношения (22), (23). Лемма доказана.

Лемма 5 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) вектор функция $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_{n+2}(t))$, $t \in I = [0, \infty)$ ограничена, $|y(t)| \le a$, $t \in I$ и непрерывно дифференцируема, причем $|\dot{y}(t)| < c$, $t \in I$, $a < \infty$, $c < \infty$;

2) скалярная непрерывная функция $V(x) > 0$ при любом $x \in R^{n+2}$, $x \neq 0$, $V(0) = 0$;

3) несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty V(y(t))dt < \infty$.

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Доказательство. Пусть выполнены условия 1) – 3) леммы. Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=0$. Предположим противное, т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) \neq 0$. Тогда существует последовательность $\{t_k\} \subset I = [0, \infty)$ такая, что $|y(t_k)| \ge \varepsilon > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Выберем $t_{k+1} - t_k \ge m > 0$. Поскольку $y(t)$, $t \in I$ непрерывно дифференцируема и $|\dot{y}(t)| < c$, $\forall t$, $t \in I$, то $|y(t) - y(t_k)| \le c|t - t_k|$, $t \in [t_k - \frac{m}{2}, t_k + \frac{m}{2}]$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\int\limits_0^\infty V(y(t))dt \ge \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{t_k-\frac{m}{2}}^{t_k+\frac{m}{2}} V(y(t))dt,$$

где $|y(t)| = |y(t_k) + y(t) - y(t_k)| \ge |y(t_k)| - |y(t) - y(t_k)| \ge \varepsilon - c\frac{m}{2} = \varepsilon_0 > 0$.

Поскольку $\int\limits_{t_k-\dfrac{m}{2}}^{t_k+\dfrac{m}{2}} V(y(t))dt \ge V_{\min} \cdot m, \quad V_{\min} = \min\limits_{\varepsilon_0 \le |x| \le a} V(x)$, то $\int\limits_0^\infty V(y(t))dt = \infty$.

Это противоречит третьему условию леммы. Лемма доказана.

Несобственные интегралы

На основе тождеств (18) – (20), оценок (15) – (17), с учетом (21) – (23), могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (12). Заметим, что леммы 1 – 5 и теоремы 1, 2 остаются верными и для системы (13), (14), так как предпосылки указанных лемм и теорем выполнены.

Теорема 3 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрицы $A, A_1(\varepsilon)$ – гурвицевы, функция $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. Тогда вдоль решения системы* (12) *несобственный интеграл*

$$\begin{aligned} I_1 = \int\limits_0^\infty [\overline{\varphi}(\sigma(t))\dot{\sigma}(t)dt = \int\limits_0^\infty [N_0\omega^2(t) + N_1 y_1^2(t) + \ldots + N_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt + l_1 = \\ = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \overline{\varphi}(\sigma)d\sigma = \overline{c}_1, \quad |\overline{c}_1| < \infty, \end{aligned} \tag{24}$$

$$l_1 = y^*(t)F_1 y(t)\Big|_0^\infty = y^*(\infty)F_1 y(\infty) - y^*(0)F_1 y(0), \quad |l_1| < \infty, \tag{25}$$

$$\int\limits_0^\infty \omega^2(t)dt = \int\limits_0^\infty \left[-\frac{N_1}{N_0}y_1^2(t) - \ldots - \frac{N_{n+2}}{N_0}y_{n+2}^2(t)\right]dt + \overline{c}_0, \tag{26}$$

$$\overline{c}_0 = N_0^{-1}(\overline{c}_1 - l_1), \quad |\overline{c}_0| < \infty, \tag{27}$$

где $N_0 \neq 0$, F_1 *– постоянная матрица порядка* $(n+2) \times (n+2)$.

Доказательство. Произведения $\overline{\varphi}(\sigma(t))\dot{\sigma}(t) = \xi^*(t)N\xi(t)$, $t \in I$, где $\overline{\varphi}(\sigma(t))$, $\dot{\sigma}(t)$, $t \in I$ определяются формулами (18), (20) соответственно. Тогда несобственный интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \xi^*(t)N\xi(t)dt = \int\limits_0^\infty \overline{\varphi}(\sigma(t))\dot{\sigma}(t)dt = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \overline{\varphi}(\sigma)d\sigma = \overline{c}_1, \quad |\overline{c}_1| < \infty$$

в силу ограниченности $\sigma(t)$, $t \in I$, где N – постоянная матрица порядка $(n+3) \times (n+3)$. Как следует из леммы 3 ($Q = N$) верно равенство

$$\xi^*(t)N\xi(t) = N_0\omega^2(t) + N_1 y_1^2(t) + \ldots + N_{n+2}y_{n+2}^2(t) + \frac{d}{dt}[y^*(t)F_1 y(t)], \quad t \in I.$$

Теперь соотношения (24), (25) следуют из (22), (23). Соотношения (26), (27) следуют из (24), (25), при $N_0 \neq 0$. Теорема доказана.

Теорема 3 остается верной и для систем (13), (14), где $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_2$ и $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_3$.

Теорема 4 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрицы* A, $A_1(\varepsilon)$ *– гурвицевы, функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любой величины* $\tau_1 > 0$, *вдоль решения системы* (12) *несобственный интеграл*

$$\begin{aligned} I_2 = \int\limits_0^\infty [\overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \tau_1\mu_0^{-1}\varphi^2(\sigma(t))]dt = \int\limits_0^\infty [M_0\omega^2(t) + \\ + M_1 y_1^2(t) + \ldots + M_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt + l_2 \geq 0, \end{aligned} \tag{28}$$

$$l_2 = y^*(t)F_2 y(t)\Big|_0^\infty = y^*(\infty)F_2 y(\infty) - y^*(0)F_2 y(0), \quad |l_2| < \infty, \tag{29}$$

$$I_2 = \int\limits_0^\infty [(M_1 - M_0\frac{N_1}{N_0})y_1^2(t) + \ldots + (M_{n+2} - M_0\frac{N_{n+2}}{N_0})y_{n+2}^2(t)]dt + \overline{c}_2 \geq 0, \tag{30}$$

$$\overline{c}_2 = M_0\overline{c}_0 + l_2, \quad |\overline{c}_2| < \infty, \tag{31}$$

где $M_i = M_i(\tau_1)$, $\tau_1 > 0$, $i = \overline{0, n+2}$, F_2 *– постоянная матрица порядка* $(n+2) \times (n+2)$, $N_0 \neq 0$.

Доказательство. Так как $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$, то $\dfrac{\sigma}{\overline{\varphi}(\sigma)} \geq \mu_0^{-1}, \forall\sigma, \sigma \in R^1$. Тогда $\overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) \geq 0$, $\forall t$, $t \in I$. Вдоль решения системы (12), $\xi^*(t)M\xi(t) = \overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \tau_1\mu_0^{-1}\varphi^2(\sigma(t))$, $t \in I$, где $\overline{\varphi}(\sigma(t))$, $\sigma(t)$ $t \in I$ определяются формулами (18), (19) соответственно. Далее, аналогичным путем, как в доказательстве теоремы 3, получим соотношения (28), (29). Соотношения (30), (31) следуют из (28), (29) при $N_0 \neq 0$.

Теорема 5 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрицы* A, $A_1(\varepsilon)$ *– гурвицевы, функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любых величин* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, *вдоль решения системы (1) несобственный интеграл*

$$I_3 = \int\limits_0^\infty [\gamma_0\omega(t) + \gamma_1 y_1(t) + \ldots + \gamma_{n+2}y_{n+2}(t)]^2 dt = \\ = \int\limits_0^\infty [\Gamma_0\omega^2(t) + \Gamma_1 y_1^2(t) + \ldots + \Gamma_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt + l_3 \geq 0, \tag{32}$$

$$l_3 = y^*(t)F_3y(t)\Big|_0^\infty = y^*(\infty)F_3y(\infty) - y^*(0)F_3y(0), \quad |l_3| < \infty, \tag{33}$$

$$I_3 = \int\limits_0^\infty [(\Gamma_1 - \Gamma_0\frac{N_1}{N_0})y_1^2(t) + \ldots + (\Gamma_{n+2} - \Gamma_0\frac{N_{n+2}}{N_0})y_{n+2}^2(t)]dt + \overline{c}_3 \geq 0, \tag{34}$$

$$\overline{c}_3 = \Gamma_0\overline{c}_0 + l_3, \quad |\overline{c}_3| < \infty, \tag{35}$$

где $\Gamma_i = \Gamma_i(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+2})$, $i = \overline{0, n+2}$, F_3 *– постоянная матрица порядка* $(n+2) \times (n+2)$, $N_0 \neq 0$.

Доказательство. Произведение $[\gamma_0\omega + \gamma_1 y_1 + \ldots + \gamma_{n+2}y_{n+2}]^2 = \xi^*(t)\Gamma\xi(t)$, где Γ – постоянная матрица порядка $(n+3)\times(n+3)$. Далее, по аналогии, как в доказательстве теоремы 4, получим (32), (33). При $N_0 \neq 0$ соотношения (34), (35) следуют из (32), (33). Теорема доказана.

Отметим, что теорема 5 верна и вдоль решения системы (13), (14).

Теорема 6 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрицы* A, $A_1(\varepsilon)$ *– гурвицевы, функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_2$. *Тогда для любой величины* $\tau_2 > 0$, *вдоль решения системы* (13) *несобственный интеграл*

$$I_4 = \int\limits_0^\infty \{[\overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_2\sigma(t) - \tau_2\mu_0^{-1}\overline{\varphi}^2(\sigma(t))] - \alpha\tau_2[(\sigma(t) - \mu_1^{-1}\overline{\varphi}(\sigma(t))\sigma(t)]\}dt = \\ = \int\limits_0^\infty [P_0\omega^2(t) + P_1 y_1^2(t) + \ldots + P_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt + l_4 \geq 0, \tag{36}$$

$$l_4 = y^*(t)F_4y(t)\Big|_0^\infty = y^*(\infty)F_4y(\infty) - y^*(0)F_4y(0), \quad |l_4| < \infty, \tag{37}$$

$$I_4 = \int\limits_0^\infty [(P_1 - P_0\frac{N_1}{N_0})y_1^2(t) + \ldots + (P_{n+2} - P_0\frac{N_{n+2}}{N_0})y_{n+2}^2(t)]dt + c_4 \geq 0, \tag{38}$$

$$c_4 = P_0\overline{c}_0 + l_4, \quad |c_4| < \infty, \tag{39}$$

где $P_i = P_i(\tau_2)$, $i = \overline{0, n+2}$, F_4 *– постоянная матрица порядка* $(n+2)\times(n+2)$, $N_0 \neq 0$.

Доказательство. Из включения $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_2$ следует, что

$$\alpha \leq \frac{\overline{\varphi}}{\sigma} = \frac{(\sigma - \mu_1^{-1}\overline{\varphi})\overline{\varphi}}{(\sigma - \mu_1^{-1}\overline{\varphi})\sigma} \leq \mu_1, \ \alpha > 0, \ \mu_1 > 0, \ \alpha < \mu_1(\alpha).$$

Тогда

$$\xi^*(t)P\xi(t) = \overline{\varphi}\tau_2\sigma - \tau_2\mu_1^{-1}\varphi^2 - \alpha\tau_2(\sigma^2 - \mu_1^{-1}\overline{\varphi}\sigma) \geq 0, \ \forall t, \ t \in I,$$

где $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(\sigma(t))$, $\sigma = \sigma(t)$, $t \in I$. Далее, применяя лемму 3, где $Q = P$, получим

$$\xi^*(t)P\xi(t) = P_0\omega^2(t) + P_1y_1^2(t) + \ldots + P_{n+2}y_{n+2}^2(t) + \frac{d}{dt}[y^*(t)F_4y(t)], \ t \in I.$$

Тогда соотношения (36), (37) следуют из (21) – (23), (26). Соотношения (38), (39) следуют из (36), (37) при $N_0 \neq 0$. Теорема доказана.

Теорема 7 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрицы A, $A_1(\varepsilon)$ – гурвицевы, функция $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_3$. Тогда для любой величины $\tau_3 > 0$, вдоль решения системы* (14) *несобственный интеграл*

$$I_5 = \int\limits_0^\infty \{[\overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_3\sigma(t) - \tau_3\mu_2^{-1}\overline{\varphi}^2(\sigma(t))] - \beta\tau_3[\sigma^2(t) - \mu_2^{-2}\overline{\varphi}^2(\sigma(t))]\}dt =$$
$$= \int\limits_0^\infty [\Lambda_0\omega^2(t) + \Lambda_1y_1^2(t) + \ldots + \Lambda_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt + l_5 \geq 0, \tag{40}$$

$$l_5 = y^*(t)F_5y(t)\Big|_0^\infty = y^*(\infty)F_5y(\infty) - y^*(0)F_5y(0), \ \ |l_5| < \infty, \tag{41}$$

$$I_5 = \int\limits_0^\infty [(\Lambda_1 - \Lambda_0\frac{N_1}{N_0})y_1^2(t) + \ldots + (\Lambda_{n+2} - \Lambda_0\frac{N_{n+2}}{N_0})y_{n+2}^2(t)]dt + c_5 \geq 0, \tag{42}$$

$$c_5 = \Lambda_0\overline{c}_0 + l_5, \ \ |c_5| < \infty, \tag{43}$$

где $\Lambda_i = \Lambda_i(\tau_3)$, $i = \overline{0, n+2}$, F_5 – постоянная матрица порядка $(n+2) \times (n+2)$, $N_0 \neq 0$.

Доказательство. Так как

$$\beta \leq \frac{\overline{\varphi}}{\sigma + \mu_2^{-1}\overline{\varphi}} = \frac{(\sigma - \mu_2^{-1}\overline{\varphi})\overline{\varphi}}{(\sigma - \mu_2^{-1}\overline{\varphi})(\sigma + \mu_2^{-1}\overline{\varphi})} = \frac{(\sigma - \mu_2^{-1}\overline{\varphi})\overline{\varphi}}{\sigma^2 - \mu_2^{-2}\overline{\varphi}^2} \leq \frac{\overline{\varphi}}{\sigma} \leq \mu_2, \ \mu_2(\beta) > 0, \ \beta > 0,$$

то

$$\xi^*(t)\Lambda\xi(t) = \overline{\varphi}\tau_3(\sigma - \mu_2^{-1}\overline{\varphi}) - \beta\tau_3(\sigma^2 - \mu_2^{-2}\overline{\varphi}^2) = \Lambda_0\omega^2(t) + \Lambda_1y_1^2(t) + \ldots$$
$$\ldots + \Lambda_{n+2}y_{n+2}^2(t) + \frac{d}{dt}[y^*(t)F_5y(t)] \geq 0, \ \forall t, \ t \in I,$$

где $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(\sigma(t))$, $\sigma = \sigma(t)$, $t \in I$ определяются формулами (18), (19).

Отсюда следуют соотношения (40), (41). Соотношения (42), (43) следуют из (40), (41) при $N_0 \neq 0$. Теорема доказана.

Абсолютная устойчивость

На основе результатов, изложенных выше, могут быть сформулированы условия абсолютной устойчивости положения равновесия системы (12) – (14).

Теорема 8 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2 теорем 3 – 5, и пусть, кроме того:*

$$
\begin{aligned}
&(-M_1-\Gamma_1)-\frac{N_1}{N_0}(-M_0-\Gamma_0)>0,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&(-M_{n+2}-\Gamma_{n+2})-\frac{N_n}{N_0}(-M_0-\Gamma_0)>0.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Тогда положение равновесия системы (1), (2) *(либо* (12)*) абсолютно устойчиво. Если, величина* $\mu_0=\overline{\mu}_0-\varepsilon_1$, $\varepsilon_1>0$ *– достаточно малое число, то в секторе* $[0,\mu_0]$ *– проблема Айзермана имеет положительное решение.*

Доказательство. При выполнении условий лемм 1, 2, а также условий теорем 3 – 5, несобственные интегралы (см. (28) – (35))

$$-I_2=\int\limits_0^\infty[(-M_1+M_0\frac{N_1}{N_0})y_1^2(t)+\ldots+(-M_{n+2}+M_0\frac{N_{n+2}}{N_0})y_{n+2}^2(t)]dt-\overline{A}_2\le 0,$$

$$-I_3=\int\limits_0^\infty[(-\Gamma_1+\Gamma_0\frac{N_1}{N_0})y_1^2(t)+\ldots+(-\Gamma_{n+2}+\Gamma_0\frac{N_{n+2}}{N_0})y_{n+2}^2(t)]dt-\overline{A}_3\le 0.$$

Отсюда следует, что

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty\{[(-M_1-\Gamma_1-\frac{N_1}{N_0}(-M_0-\Gamma_0)]y_1^2(t)+\ldots+[-M_{n+2}-\Gamma_{n+2}-\\
&-\frac{N_{n+2}}{N_0}(-M_0-\Gamma_0)]y_{n+2}^2(t)\}dt\le\overline{c}_2+\overline{c}_3,\quad|\overline{c}_2-\overline{c}_3|\le\,|\overline{c}_2|+|\overline{c}_3|<\infty.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Далее, применяя лемму 5 к неравенству (45), с учетом оценки (44), получим $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$. Легко убедиться в том, что вдоль решения системы (1), (2) (либо (12)) выполнены все условия леммы 5. Тогда согласно утверждению леммы 2, $\lim\limits_{t\to\infty}x(t;0,x_0,\eta_0,\xi_0,\varphi)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t;0,x_0,\eta_0,\xi_0,\varphi)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t;0,x_0,\eta_0,\xi_0,\varphi)=0$, $\forall\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi}\in\Phi_0$. Так как решение системы (1), (2) при любом $x(t)\to 0$, $\eta(t)\to 0$, $\xi(t)\to 0$ при $t\to\infty$, $\forall\overline{\varphi}\in\Phi_1$, то в секторе $[0,\mu_0]$, $\mu_0=\overline{\mu}_0-\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 0$ – проблема Айзермана имеет положительное решение.

Теорема 9 *Пусть выполнены следующие условия лемм 1, 2 и теорем 5, 6, и пусть, кроме того:*

$$
\begin{aligned}
&(-P_1-\Gamma_1)-\frac{N_1}{N_0}(-P_0-\Gamma_0)>0,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&(-P_{n+2}-\Gamma_{n+2})-\frac{N_{n+2}}{N_0}(-P_0-\Gamma_0)>0.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Тогда положение равновесия системы (1), (2), (4) *(либо* (13)*) в секторе* $[\alpha,\mu_1]$ *абсолютно устойчиво. Если, кроме того, для значений* $\alpha=\alpha_*$, *величина* $\mu_1=\mu_1(\alpha_*)=\overline{\mu}_0-\varepsilon_1$, ε_1 *– достаточно малое число, то в секторе* $[\alpha_*,\mu_1(\alpha_*)]$ *– проблема Айзермана имеет положительное решение.*

Доказательство. Легко убедиться в том, что из неравенств $-I_3 \le 0$, $-I_4 \le 0$ следует, что

$$\int_0^\infty \{[(-P_1-\Gamma_1)-\frac{N_1}{N_0}(-P_0-\Gamma_0)]y_1^2(t)+[(-P_{n+2}-\Gamma_{n+2})-\frac{N_{n+2}}{N_0}(-P_0-\Gamma_0)]y_{n+2}^2(t)\}dt < \infty. \quad (47)$$

Далее, применяя лемму 5 к оценке (47), с учетом (46), получим $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$, $\forall\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi} \in \Phi_2$. Так как при любом $\overline{\varphi}(\sigma) = \mu(\sigma)$, $\mu \in [\alpha_*, \mu_1(\alpha_*)]$, $\mu_1(\alpha_*) = \overline{\mu}_0 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$ – достаточное малое число решение системы (1), (2), (4) асимптотически устойчиво и $x(t) \to 0$, $\eta(t) \to 0$, $\xi(t) \to 0$ при $t \to \infty$ то проблема Айзермана имеет положительное решение в указанном секторе $[\alpha_*, \mu_1(\alpha_*)]$, $\mu_1(\alpha_*) = \overline{\mu}_0 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$. Теорема доказана.

Теорема 10 *Пусть выполнены следующие условия лемм 1, 2 и теорем 5, 7, и пусть, кроме того:*

$$\begin{array}{l} (-\Lambda_1 - \Gamma_1) - \dfrac{N_1}{N_0}(-\Lambda_0 - \Gamma_0) > 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ (-\Lambda_{n+2} - \Gamma_{n+2}) - \dfrac{N_{n+2}}{N_0}(-\Lambda_0 - \Gamma_0) > 0. \end{array} \quad (48)$$

Тогда положение равновесия системы (1), (2), (5) *(либо* (14)*) в секторе* $[\frac{\beta}{1-\beta\mu_2^{-1}}, \mu_2]$ *абсолютно устойчиво. Если* $\beta = \beta_*$, *величина* $\mu_2 = \mu_2(\beta_*) = \overline{\mu}_0 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$ *– достаточно малое число, то в секторе* $[\frac{\beta_*}{1-\beta_*\mu_2^{-1}(\beta_*)}, \mu_2(\beta_*)]$ *– проблема Айзермана имеет положительное решение.*

Доказательство. Из $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_3$ следует, что $\varphi \ge \beta\sigma + \beta\mu_2^{-1}\varphi$. Следовательно, $(1 - \beta\mu_2^{-1})\overline{\varphi} \ge \beta\sigma$, $\overline{\varphi} \ge \beta\sigma \ / \ (1 - \beta\mu_2^{-1})$. Из неравенства $\overline{\varphi}/\sigma \le \mu_2$ имеем $\sigma/\overline{\varphi} \ge \mu_2^{-1}$. Тогда $\sigma\overline{\varphi} - \mu_2^{-1}\overline{\varphi}^2 \ge 0$, $(\sigma - \mu_2^{-1}\overline{\varphi})\overline{\varphi} - \beta(\sigma^2 - \mu_2^{-2}\overline{\varphi}^2) \ge 0$, $\forall\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi} \in \Phi_3$. Из неравенств $-I_3 \le 0$, $-I_5 \le 0$ следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \{[(-\Lambda_1 - \Gamma_1) - \frac{N_1}{N_0}(-\Lambda_0 - \Gamma_0)]y_1^2 + \ldots + [(-\Lambda_{n+2} - \Gamma_{n+2}) - \\ - \frac{N_{n+2}}{N_0}(-\Lambda_0 - \Gamma_0)]y_{n+2}^2(t)\}dt < \infty. \end{aligned} \quad (49)$$

Далее, применяя лемму 5 к оценке (49), с учетом (48), получим $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$, $\forall\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi} \in \Phi_3$. Тогда $x(t) \to 0$, $\eta(t) \to 0$, $\xi(t) \to 0$ при $n \to \infty$, $\forall\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi} \in \Phi_3$. Так как решение системы (1) при любом $\overline{\varphi}(\sigma) = \mu(\sigma)$, $\mu \in [\frac{\beta_*}{1-\beta_*\mu_2^{-1}(\beta_*)}, \mu_2(\beta_*)]$ асимптотически устойчиво, а также в секторе $[\frac{\beta_*}{1-\beta_*\mu_2^{-1}(\beta_*)}, \mu_2(\beta_*)]$ – решение системы (1), (2), (5) абсолютно устойчиво, то проблема Айзермана имеет положительное решение. Теорема доказана.

Пример

Уравнения движения регулируемой системы имеют вид

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = -x_1 + \varphi(\sigma), \ \frac{d\xi}{dt} = \eta, \ \frac{d\eta}{dt} = \varphi(\sigma), \ \sigma = 0,9x_1 - 0,8\eta - 0,1\xi, \\ x_1(0) = x_0, \ \xi(0) = \xi_0, \ \eta(0) = \eta_0, \ t \in I = [0, \infty), \end{gathered} \quad (50)$$

где $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \overline{\varphi}(\sigma)$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число. Для данного примера: $A = -1$, $B = 1$, $D = 0,9$, $E = -0,8$, $F = -0,1$, $n = 1$.

Поскольку функция $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \overline{\varphi}(\sigma)$, то относительно z получим следующее уравнение

$$\dot{z} = A_1 z + B_1\overline{\varphi}(\sigma),\ \sigma = Sz,\ z(0) = z_0, t \in I = [0, \infty),$$

где

$$A_1 = A_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -1+0,9\varepsilon & -0,1\varepsilon & -0,8\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,9\varepsilon & -0,1\varepsilon & -0,8\varepsilon \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$S = \big(0,9,\ \ -0,1,\ \ -0,8\big),\ \ z(0) = z_0 = (x_0, \xi_0, \eta_0).$$

1. Неособое преобразование. Вектор $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Произведение $\theta B_1 = \theta_1 + \theta_3 = 0$. Следовательно, $\theta_3 = -\theta_1$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, -\theta_1)$. Произведение $\theta A_1 B_1 = -\theta_1 + \theta_2 = 0$. Тогда $\theta_2 = \theta_1$ и вектор $\theta = (1, 1, -1)\theta_1$. Пусть $\theta_1 = 1$. Тогда $\theta = (1, 1, -1)$, $\theta B_1 = 0$, $\theta A_1 B_1 = 0$, $\theta A_1^2 B_1 = 1$.

Характеристический полином матрицы A_1 имеет вид

$$\Delta(\lambda) = det(\lambda I_3 - A_1) = \lambda^3 + (1 - 0,1\varepsilon)\lambda^2 + 0,9\lambda\varepsilon + 0,1\varepsilon.$$

Для гурвицевости матрицы $A_1(\varepsilon)$ необходимо и достаточно, чтобы $(1 - 0,1\varepsilon) > 0$, $0,9\varepsilon > 0$, $0,1\varepsilon > 0$, $(1 - 0,1\varepsilon)0,9\varepsilon - 0,1\varepsilon > 0$. Эти условия выполнены для сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$. Поскольку $A_1^3 = -A_1^2(1 - 0,1\varepsilon) - A_1 \cdot 0,9\varepsilon - 0,1\varepsilon I_3$, то величины $a_0 = 0,1\varepsilon$, $a_1 = 0,9\varepsilon$, $a_2 = 1 - 0,1\varepsilon$. Дифференциальное уравнение (8) запишется в виде

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = y_3, \quad \dot{y}_3 = -\varepsilon\alpha y_1 - \varepsilon(1 + r)y_2 - (1 + \varepsilon r)y_3 + \overline{\varphi}(\sigma).$$

Матрица

$$R = \|\theta^*, A_1^*\theta^*, A_1^{*2}\theta^*\| = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \det R = 1 \neq 0,$$

ранг $R = 3$, матрица R – неособая.

2. Тождества. Так как $S^* = (0,9,\ -0,1,\ -0,8)$, то

$$\overline{\varphi}(\sigma(t)) = \omega + 0,1\varepsilon y_1(t) + 0,9\varepsilon y_2(t) + (1 - 0,1\varepsilon)y_2(t),\ \ t \in I,$$

$$\sigma(t) = -0,1y_1(t) - 0,9y_2(t) + 0,1y_3(t),\ \ t \in I,$$

$$\dot{\sigma}(t) = 0,1\omega(t) - 0,1y_1(t) - 0,9y_3(t),\ \ t \in I.$$

3. Несобственные интегралы. Несобственный интеграл

$$I_1 = \int_0^\infty \overline{\varphi}(\sigma(t))\dot{\sigma}(t)dt = \int_0^\infty [N_0\omega^2(t) + N_1 y_1^2(t) + N_2 y_2^2(t) + N_3 y_3^2(t)]dt +$$

$$+l_1 = \overline{c}_1,\ \ |\overline{c}_1| < \infty,$$

где $N_0 = 0,1,\ \ N_1 = 0,\ \ N_2 = 0,\ \ N_3 = -0,8.$

Несобственный интеграл

$$I_3 = \int\limits_0^\infty [\gamma_0\omega(t) + \gamma_1 y_1(t) + \gamma_2 y_2(t) + \gamma_3 y_3(t)]^2 dt = \int\limits_0^\infty [\Gamma_0\omega^2(t) +$$

$$+\Gamma_1 y_1^2(t) + \Gamma_2 y_2^2(t) + \Gamma_3 y_3^2]dt + l_3 \geq 0,$$

где $\Gamma_0 = \gamma_0^2$, $\Gamma_1 = \gamma_1^2$, $\Gamma_2 = \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3$, $\Gamma_3 = \gamma_3^2 - 2\gamma_0\gamma_2$.

Рассмотрим сектор $[\alpha, \mu_1]$, $\alpha > \varepsilon > 0$. Несобственный интеграл

$$I_4 = \int\limits_0^\infty \{[\overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_2\sigma(t) - \tau_2\mu_0^{-1}\overline{\varphi}^2(\sigma(t))] - \alpha\tau_2[(\sigma(t) - \mu_1^{-1}\overline{\varphi}(\sigma(t))\sigma(t)]\}dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty [P_0\omega^2(t) + P_1 y_1^2(t) + P_2 y_2^2(t) + P_3 y_3^2(t)]dt + l_4 \geq 0,$$

где $P_0 = -\tau_2\mu_1^{-1}$, $P_1 = -0,01\alpha\tau_2$, $P_2 = 0,01\tau_2 - \alpha\tau_2(0,83 - 0,1\mu_1^{-1})$, $P_3 = \tau_2(1 - \mu_1^{-1}) - \alpha\tau_2(0,01 - \mu_1^{-1})$.

Отметим, что:

$$\int\limits_0^\infty \overline{\varphi}(\sigma(t))\sigma(t)dt = \int\limits_0^\infty [0,1y_2^2(t) + y_3^2(t)]dt + c_{11}, \quad |c_{11}| < \infty;$$

$$\int\limits_0^\infty \sigma^2(t)dt = \int\limits_0^\infty [0,01y_2^2(t) + 0,83y_2^2(t) + 0,01y_3^2(t)]dt + c_{12}, \quad |c_{12}| < \infty;$$

$$\int\limits_0^\infty \overline{\varphi}^2(\sigma(t))dt = \int\limits_0^\infty [\omega^2(t) + y_3^2(t)]dt + c_{13}, \quad |c_{13}| < \infty;$$

$$\int\limits_0^\infty \overline{\varphi}(\sigma(t))\dot{\sigma}(t)dt = \int\limits_0^\infty [0,1\omega^2(t) - 0,8y_3^2(t)]dt + c_{14}, \quad |c_{14}| < \infty;$$

$$\int\limits_0^\infty [\overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_2\sigma(t) - \tau_2\mu_1^{-1}\overline{\varphi}^2(\sigma(t))]dt = \int\limits_0^\infty [-\tau_2\mu_1^{-1}\omega^2(t) + 0,01\tau_2 y_2^2(t) +$$

$$+\tau_2(1 - \mu_1^{-1})y_3^2(t)]dt + c_{15}, \quad |c_{15}| < \infty;$$

$$\int\limits_0^\infty -\alpha\tau_2[\sigma^2(t) - \mu_1^{-1}\overline{\varphi}^2(\sigma(t))\sigma(t)]dt = \int\limits_0^\infty [-\alpha\tau_2[0,01y_1^2(t) + (0,86 - 0,1\mu_1^{-1})y_2^2(t) +$$

$$+(0,01 - \mu_1^{-1})y_3^2(t)]dt + c_{16}, \quad |c_{16}| < \infty;$$

4. Предельное значение $\overline{\mu}_0$ определяется из гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$. Характеристическое уравнение матрицы $A_1(\mu)$ равно

$$\Delta_1(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A_1) = \lambda^3 + (1 - 0,1\mu)\lambda^2 + 0,9\mu\lambda + 0,1\mu, \quad 0 < \varepsilon \leq \mu < \overline{\mu}_0.$$

Для гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$ необходимо и достаточно, чтобы $(1 - 0,1\mu) > 0$, $0,9\mu > 0$, $0,1\mu > 0$, $(1 - 0,1\mu) \cdot 0,9\mu > 0,1\mu$. Отсюда находим значение $\overline{\mu}_0 = 80/9 = 8,888....$

5. Абсолютная устойчивость. Из условия теоремы 9 имеем

$$(-P_1 - \Gamma_1) - \frac{N_1}{N_0}(-P_0 - \Gamma_0) > 0: \qquad 0,01\alpha\tau_2 - \gamma_1^2 > 0;$$

$$(-P_2 - \Gamma_2) - \frac{N_2}{N_0}(-P_0 - \Gamma_0) > 0: \qquad -0,01\tau_2 + \alpha\tau_2(0,83 - 0,1\mu_1^{-1}) - \gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_3 > 0;$$

$$(-P_3 - \Gamma_3) - \frac{N_3}{N_0}(-P_0 - \Gamma_0) > 0: \qquad \tau_2(1 - \mu_1^{-1}) + \alpha\tau_2(0,01 - \mu_1^{-1}) + 8(\tau_2\mu_1^{-1} - \gamma_0^2) > 0.$$

Эти неравенства выполнены при значениях: $\alpha = 0,01$, $\tau_2 = 10001\gamma_1^2$, $\gamma_2 = 2\gamma_1$, $\gamma_0 = 0,25\gamma_1$, $\gamma_3 = 11,124\gamma_1$, $\mu_1^{-1} = 0,1126$, $\mu_1 = 8,881 = \overline{\mu}_0 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 = 0,007$.

Следовательно, в секторе $[\alpha_* = 0,01,\ \mu_1(\alpha_*) = 8,881]$ проблема Айзермана имеет положительное решение.

Литература

[1] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5. – 1969. – С. 38-48.

[2] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости системы управления с несколькими нелинейными элементами // АН СССР. Автоматика и телемеханика, № 12. – 1970.– С. 83-94.

[3] *Айсагалиев С.А.* К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем // Дифференциальные уравнения, Т. 30, № 5. – 1994. – С. 748-757.

[4] *Айсагалиев С.А.* Теория регулируемых систем. – Алматы: Қазақ университетi, 2000. – 234 с.

[5] *Айсагалиев С.А.* Теория устойчивости динамических систем. – Алматы: Қазақ университетi, 2012. – 216 с.

[6] *Айсагалиев С.А., Айпанов Ш.А.* К теории глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем // Дифференциальные уравнения, Т. 35, № 8. – 1999. – С. 1-7.

[7] *Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N.* Certain problems of synchronization theory // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. Volume 21, Issue 1. – 2013. – Pages 159-175.

References

[1] *Aisagaliev S.A.* Ob opredelenii oblasti absolyutnoy ustoychivosti vyinuzhdennyih dvizheniy v nelineynyih sistemah // Izv. AN SSSR, Tehnicheskaya kibernetika, No 5. – 1969. – S. 38-48.

[2] *Aisagaliev S.A.* Ob opredelenii oblasti absolyutnoy ustoychivosti sistemyi upravleniya s neskolkimi nelineynyimi elementami // AN SSSR. Avtomatika i telemehanika, No 12. – 1970.– S. 83-94.

[3] *Aisagaliev S.A.* K teorii absolyutnoy ustoychivosti reguliruemyih sistem // Differentsialnyie uravneniya, T. 30, No 5. – 1994. – S. 748-757.

[4] *Aisagaliev S.A.* Teoriya reguliruemyih sistem. – Almatyi: Qazaq universitetı, 2000. – 234 s.

[5] *Aisagaliev S.A.* Teoriya ustoychivosti dinamicheskih sistem. – Almatyi: Qazaq universitetı, 2012. – 216 s.

[6] *Aisagaliev S.A., Aipanov Sh.A.* K teorii globalnoy asimptoticheskoy ustoychivosti fazovyih sistem // Differentsialnyie uravneniya, T. 35, No 8. – 1999. – S. 1-7.

[7] *Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N.* Certain problems of synchronization theory // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. Volume 21, Issue 1. – 2013. – Pages 159-175.