| 1-бөлім | Раздел 1 | Section 1 |
|---|---|---|
| Математика | Математика | Mathematics |

МРНТИ 27.29.17, 27.29.23 DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.01

**С.А. Айсагалиев, Ә.Ж. Шабенова*, С.К. Кетебаев**
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
*e-mail: Shabenova.aika@gmail.com

# РАЗРЕШИМОСТЬ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматриваются краевые задачи с фазовыми ограничениями для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены необходимое и достаточное условия существования решения краевых задач линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями из заданных множеств при наличии фазовых ограничений. Предложен метод построения решения краевой задачи с фазовыми ограничениями путем построения минимизирующих последовательностей в функциональном пространстве. Получена оценка скорости сходимости минимизирующих последовательностей. Основой предлагаемого метода решения краевых задач с фазовыми ограничениями является возможность сведения указанных задач к одному классу интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Интегральное уравнение Фредгольма первого рода относится к числу малоизученных проблем математики. Поэтому Фундаментальные исследования по интегральным уравнениям и решение на их основе краевых задач дифференциальных уравнений является основным перспективным направлением в математике. Предлагается новый метод решения краевых задач линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми ограничениями имеющий многочисленные приложения в теории динамических систем. Научной новизной полученных результатов являются: формализация общей задачи динамических систем и приведение ее к краевым задачам обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми ограничениями; найден новый критерий существования решения краевых задач в виде принципа погружения на основе теоремы существования и построение решения интегрального уравнения; создан новый метод решения краевых задач линейных обыкновенных дифференциальных уравнений путем построения минимизирующих последовательностей для специальной начальной задачи оптимального управления.

**Ключевые слова**: краевые задачи, фазовые ограничения, оптимизационная задача, минимизирующие последовательности, интегральное уравнение.

С.Ә. Айсағалиев, Ә.Ж. Шабенова*, С.К. Кетебаев
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
*e-mail: Shabenova.aika@gmail.com

**Фазалық шектеулері бар сызықтық жүйелердің шекаралық есептерінің шешімін тұрғызу және шешімінің табылатындығы**

Сызықты қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін фазалық шектеулермен шекаралық есептер қарастырылады. Фазалық шектеулер болған кезде берілген жиындардан шекаралық шарттары бар сызықты қарапайым дифференциалдық теңдеулердің шекаралық есептердің шешуінің болуы үшін қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Функционалдық кеңістіктегі минималды реттіліктер құру арқылы фазалық шектеулермен шекаралық есептердің шешімін құру әдісі ұсынылды. Минималды реттіліктің жинақталу жылдамдығының бағасы алынды. Фазалық шектеулермен шекаралық есептерді шешудің ұсынылған әдісінің негізі - берілген есептерді бірінші типтегі Фредгольм интегралдық тең-

деудің бір класына келтіру. Бірінші типтегі Фредгольм интегралдық теңдеуі - математиканың аз зерттелген мәселелерінің бірі. Сондықтан интегралдық теңдеулер бойынша іргелі зерттеулер және олардың негізінде дифференциалдық теңдеулердің шекаралық есептерін шешу математикадағы басты перспективалық бағыт болып табылады. Динамикалық жүйелер теориясында көптеген қолданысы бар фазалық шектеулері бар сызықты қарапайым дифференциалдық теңдеулердің шекаралық есептерін шешудің жаңа әдісі ұсынылған. Нәтижелердің ғылыми жаңалығы: Динамикалық жүйелердің жалпы есептерін қалыптастыру және оны фазалық шектеулермен қарапайым дифференциалдық теңдеулердің шеттік есептеріне келтіру; Шешімнің бар болу теоремасы мен интегралдық теңдеудің шешімін құруға негізделген батыру принципі түріндегі шекаралық есептердің шешімінің болуы үшін жаңа критерийі табылды; Сызықтық қарапайым дифференциалдық теңдеулердің шекаралық есептерін шешудің арнайы бастапқы оңтайлы басқару есебі үшін минимизация реттілігін құру арқылы жаңа әдіс жасалды.
**Түйін сөздер**: шекаралық есептер, фазалық шектеулер, оптимизация мәселесі, минимизациялау реті, интегралдық теңдеу.

S.A. Aisagaliev, A.Zh. Shabenova*, S.K. Ketebayev
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
*e-mail: Shabenova.aika@gmail.com

**Integral equation in the theory of optimal speed of linear systems with constraints**

Boundary-value problems with phase constraints for linear ordinary differential equations are considered. The necessary and sufficient conditions for the existence of a solution to the boundary value problems of linear ordinary differential equations with boundary conditions from given sets in the presence of phase constraints are obtained. A method is proposed for constructing a solution to a boundary value problem with phase constraints by constructing minimizing sequences in a functional space. An estimate of the convergence rate of minimizing sequences is obtained. The basis of the proposed method for solving boundary value problems with phase constraints is the ability to reduce these problems to one class of the Fredholm integral equation of the first kind. The Fredholm integral equation of the first kind is among the poorly studied problems of mathematics. Therefore, basic research on integral equations and the solution based on them of boundary value problems of differential equations is the main promising direction in mathematics. A new method is proposed for solving boundary value problems of linear ordinary differential equations with phase constraints, which has numerous applications in the theory of dynamical systems. The scientific novelty of the results is: Formalization of the general problem of dynamical systems and its reduction to boundary value problems of ordinary differential equations with phase constraints; A new criterion is found for the existence of a solution to boundary value problems in the form of the immersion principle based on the existence theorem and the construction of a solution to the integral equation; A new method has been created for solving boundary value problems of linear ordinary differential equations by constructing minimizing sequences for a special initial optimal control problem.
**Key words**: boundary value problems, phase constraints, optimization problem, minimizing sequences, integral equation.

## 1 Введение

Рассмотрим следующую краевую задачу для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)P(t)x + \mu(t), t \in I = [t_0, t_1], \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$x(t_0) = x_0 \in S_0 \subset R^n, x(t_1) = x_1 \in S_1 \subset R^n, \tag{2}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t); G(t) = x \in R^n | \omega(t) \leqslant L(t)x \leqslant \varphi(t), t \in I, \tag{3}$$

где $t_0, t_1, t_1 < t_0$ — фиксированные моменты времени, $A(t), B(t), P(t), t \in I$ — матрицы порядков $n \times n, n \times m, m \times n$ с кусочно-непрерывными элементами соответственно, $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$ — заданная функция. При заданных условиях дифференциальное уравнение (1) для любого фиксированного $x_0 \in S_0$ имеет единственное решение которое является абсолютно непрерывной функцией, $S_0, S_1$ — заданные выпуклые замкнутые множества, $L(t), t \in I$ — заданная матрица порядка $s \times n$ с непрерывными элементами, $w(t), \varphi(t), t \in I$ — заданные вектор функции $s \times 1$.

**Определение 1** *Вектор функция* $x(t) = x(t; t_0, x_0, x_1), t \in I, x_0 \in S_0$, $x_1 \in S_1$ *называется решением краевой задачи* (1)–(3), *если* $x(t_0) = x_0 \in S_0, x(t_1) = x_1 \in S_1$, *функция* $x(t; t_0, x_0, x_1) \in G(t), t \in I$.

Множества $S_0, S_1$, в частности, могут быть замкнутыми шарами, гиперплоскостями. И в общем случае $S = S_0 \times S_1 = (x_0, x_1) \in R^{2n} | H_j(x_0, x_1) \leq 0, j = \overline{1, s_1}$; $H_j(x_0, x_1) =< \alpha_j, x_0 > + < e_j, x_1 > -\alpha_j = 0, j = \overline{s_1 + 1, p_1}$ где $H_j(x_0, x_1), j = \overline{1, s_1}$ — выпуклые функции относительно переменных $x_0, x_1, x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1), \alpha_j \in R^n, e_j \in R^n, j = \overline{s_1 + 1, p_1}, \alpha_j, j = \overline{s_1 + 1, p_1}$ — заданные числа. Ставятся следующие задачи:

**Задача 1** *Найти необходимое и достаточное условия существования решения краевой задачи* (1)–(3).

*Иными словами, найти необходимое и достаточное условия существования решения уравнения* $\dot{x} = A_1(t)x + \mu(t), t \in I$ *при условиях* (2), (3), *где* $A_1(t)x = A(t)x + S(t)P(t)$.

**Задача 2** *Построить решение краевой задачи* (1)–(3).

*Следовательно, построить решение уравнения* $\dot{x} = A_1(t)x + \mu(t), t \in I$ *при условиях* (2), (3).

## 2 Обзор литературы

К краевым задачам вида (1)–(3) сводятся многие математические и физические задачи. Несмотря на актуальность решения краевых задач в настоящее время, отсутствуют методы решения краевой задачи (1)–(3). Одним из существенных результатов по исследованию краевых задач является работы С.К. Годунова и его учеников [1]. Известные результаты [2, 3] относятся к краевым задачам второго порядка и сводятся к решению однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с помощью функции Грина.

Создание общей теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнении любого порядка со сложными граничными условиями при наличии фазовых, интегральных ограничений является актуальной проблемой. В статье предлагается один из методов решения данной проблемы.

Основой предлагаемого метода решения краевой задачи (1)–(3) является принцип погружения. Принцип погружения позволяет заменить исходную краевую задачу с ограничениями на равносильную задачу оптимального управления со свободным правым концом траектории. Такой подход стал возможным благодаря нахождению общего решения одного класса интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Разрешимость и построения решения краевых задач с ограничением (1)–(3) осуществляется путем построения минимизирующих последовательности в гильбертовом пространстве для функционала специального вида. В этом заключается принципиальное отличие предлагаемого метода от известных методов исследования.

Статья является продолжением научных исследований автора по краевым задачам [4], по теории управляемости [5], интегральных уравнений и оптимального управления [6]. Ряд результатов по теории интегральных уравнений и ее приложений приведены в [7–25].

## 3 Материал и методы

### 3.1 Интегральное уравнение

Частным случаем интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$Ku = \int_b^a K(t,\tau)u(\tau)d\tau = f(t), t \in I = [t_1, t_2], \tau \in I_1 = [a, b],$$

является интегральное уравнение

$$K_1 w = \int_b^a K(t_*,\tau)w(\tau)d\tau = \beta, t_* \in I, \tag{4}$$

где $K(t_*,\tau) = K(\tau) = \|K_{ij}(\tau)\|, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$ — известная матрица с элементом из $L_2, t_* \in [t_0, t_1]$ — фиксированная точка, $K_{ij}(\tau) \in L_2(I_1, R^1), w(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$ — искомая функция, $\beta \in R^n$.

Необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения (4) следует из теоремы 1.

**Теорема 1** *Интегральное уравнение* (4) *при любом* $\beta \in R^n$ *имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(a,b) = C = \int_b^a K(\tau)k^*(\tau)d\tau \tag{5}$$

*порядка* $n \times n$ *является положительно определенной, где* $(*)$ *— знак транспонирования.*

*Доказательство* теоремы приведено в [6].

Общее решение интегрального уравнения (4) следует из теоремы 2.

**Теорема 2** *Пусть матрица $C$ из (5) положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (4) при любом $\beta \in R^n$ имеет вид*

$$w(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta + p(t) - K^*(\tau)C^{-1}\int_a^b K(\eta)p(\eta)d\eta, \tau \in I_1 = [a, b], \tag{6}$$

*где $p(\cdot) \in L_2(I_1, R^m)$ — произвольная функция, $\beta \in R^n$ — любой вектор.*

*Доказательство* теоремы можно найти в [6].

Основные свойства решений интегрального уравнения (4):
1. Функция $w(\tau), t \in I_1$ может быть представлена в виде $w(\tau) = w_1(\tau) + w_2(\tau)$, где $w_1(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta, w_2(\tau) = p(\tau) - K^*(\tau)C^{-1}\int_a^b K(\eta)p(\eta)d\eta, \tau \in I$. Функция $w_1(\tau)$ ортогональна $w_2(\tau)$ т.е. $w_1(\tau) \perp w_2(\tau)$ в $L_2(I_1, R^m)$;
2. Функция $w_1(\tau), \tau \in I_1$ — частное решение интегрального уравнения (4), функция $w_2(\tau), \tau \in I_1$ — общее решение однородного интегрального уравнения $\int\limits_a^b K(\tau)w_2(\tau)d\tau = 0$;
3. Функция $w_1(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta, \tau \in I_1$ — является решением интегрального уравнения с минимальной нормой в $L_2(I_1, R^m)$;
4. Множество решений интегрального уравнения (4) является выпуклым множеством.
В частности, $a = t_0, b = t_1, I = I_1 = (t_0, t_1)$.

### 3.2 Линейная управляемая система

Рассмотрим линейную управляемую систему следующего вида

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)u(t) + \mu(t), t \in I, \tag{7}$$

$$y(t_0) = x_0 \in R^n, y(t_1) = x_1 \in R^n, \tag{8}$$

$$u(\cdot) \in L_2(I, R^m). \tag{9}$$

Пусть $\varkappa(t), t \in I$ — фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\zeta} = A(t)\zeta$. Определим матрицу

$$W(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt, \tag{10}$$

где $\Phi(t, \tau) = \varkappa(t)\varkappa^{-1}(\tau), t \in I, \tau \in I$. Возникает вопрос: существует ли функция $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, которая переводит траекторию системы (7)–(9) из любого начального состояния $y(t_0) = x_0 \in R^n$ в любое желаемое конечное состояние $y(t_1) = x_1 \in R^n$.

Обычно функцию $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ называют управлением. Если существует такое управление $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ для которого $x(t_1) = x(t_1; t_0; x_0; u) = x_1$, то система (7)–(9) называется управляемой.

**Теорема 3** *Для того чтобы система (7)–(9) была управляемой необходимо и достаточно, чтобы матрица $W(t_0, t_1)$, определяемая по формуле (10), порядка $n \times n$ была положительно определенной.*

*Доказательство.* Решение дифференциального уравнения (7) имеет вид

$$y(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau, t \in I. \tag{11}$$

Тогда управление $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ которое переводит траекторию системы (7)–(9) из любого начального состояния $x_0 \in R^n$ в любое желаемое конечное состояние $x_1 \in R^n$ (в частности $x_0 \in S_0, x_1 \in S_1$) определяется из условия

$$y(t_1) = x_1 = \Phi(t_1,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,t)B(t)u(t)dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,t)\mu(t)dt.$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,t)B(t)u(t)dt = x_1 - \Phi(t_1,t_0)x_0 - \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,t)\mu(t)dt. \tag{12}$$

Так как $\Phi(t_1,t) = \Phi(t_1,t_0)\Phi(t_0,t), \Phi^{-1}(t_1,t_0) = \Phi(t_0,t_1)$, то соотношение (12) запишется в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)u(t)dt = \Phi(t_0,t_1)x_1 - x_0 - \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\mu(t)dt = \beta. \tag{13}$$

Таким образом, искомое управление $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ является решением интегрального уравнения (13). Интегральное уравнение (13) может быть представлено в виде

$$Ku = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)u(t)dt = \beta, K(t_0,t) = \Phi(t_0,t)B(t), t \in I.$$

Как следует из теоремы 1, интегральное уравнение (13) имеет решение тогда и только тогда, когда матрица

$$C(t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)K^*(t_0,t)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt = W(t_0,t_1)$$

порядка $n \times n$ является положительно определенной где $\beta \in R^n$ — любой вектор. Теорема доказана.

Из теоремы 3 следует, что краевая задача (7)–(9). имеет решение тогда и только тогда, когда матрица $W(t_0,t_1) > 0$, где $W(t_0,t_1)$ определяется по формуле (10).

**Теорема 4** *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ порядка $n \times n$ положительно определенная. Тогда управление $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ переводит траекторию системы (7)–(9) из любой* *начальной точки* $x_0 \in R^n$ *в любое желаемое конечное состояние* $x_1 \in R^n$ *тогда и только тогда, когда*

$$u(t) \in U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m) | u(t) = v(t) + \lambda_1(t, x_0, x_1) + N_1(t)z(t_1, v), t \in I,$$

$$\forall v(\cdot) \in L_2(I, R^m)\}, \tag{14}$$

*где* $\lambda_1(t, x_0, x_1) = B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\beta, \beta = \Phi(t_0, t_1)x_1 - x_0 - \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu(t)dt,$

$$N_1(t) = -B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1), \tag{15}$$

*функция* $z(t, v), t \in I$ *— решение дифференциального уравнения*

$$\dot{z}(t) = A(t)z + B(t)v(t), z(t_0) = 0, v(\cdot) \in L_2(I, R^m). \tag{16}$$

*Доказательство.* Как следует из теоремы 2, общее решение интегрального уравнения (13) имеет вид (см. (6))

$$u(t) = K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)\beta + p(t) - K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1) \int\limits_a^b K(t_0, t)p(t)dt, t \in I,$$

где $K(t_0, t) = \Phi(t_0, t)B(t), C(t_0, t_1) = W(t_0, t_1), p(t) = v(t), t \in I = [t_0, t_1], I_1 = I$. Отсюда имеем

$$u(t) = B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\beta +$$

$$+v(t) - B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1) \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)v(t)dt, t \in I,$$

$$\beta = \Phi(t_0, t_1)x_1 - x_0 - \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu(t)dt \tag{17}$$

Заметим, что решение дифференциального уравнения (16) имеет вид

$$z(t) = z(t, v) = \Phi(t, t_0)z(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t, \tau)B(\tau)v(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t, \tau)B(\tau)v(\tau)d\tau, \tag{18}$$

где $z(t_0) = 0$. Следовательно, $z(t_1) = z(t_1, v) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)B(t)v(t)dt =$

$$= \Phi(t_1, t_0) \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)v(t)dt$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)v(t)dt = \Phi(t_0,t_1)z(t_1,v). \tag{19}$$

Из (17)–(19) следует, что искомое управление $u(t), t \in I$ определяется по формуле (14), где $\lambda_1(t,x_0,x_1), N_1(t)$ определяются по формуле (15). Когда произвольная функция $v(t), v(\cdot) \in L_2(I,R^m)$ пробегает все элементы пространства $L_2(I,R^m)$, получим множество $U$ из (14). Теорема доказана.

**Теорема 5** *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно определенная, управление $u(t) \in U$. Тогда решение дифференциального уравнения* (7) *соответствующее управлению $u(t) \in U$ определяется по формуле*

$$y(t) = z(t,v) + \lambda_2(t,x_0,x_1) + N_2(t)z(t_1,v), t \in I, \tag{20}$$

*где $z(t,v), t \in I$ — решение дифференциального уравнения* (16)*,*

$$\lambda_2(t,x_0,x_1) = \Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)x_0 + \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)x_1 + \\ + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau - \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\mu(t)dt,$$

$$N_2(t) = -\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$W(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)d\tau, \tag{21}$$

$$W(t,t_1) = W(t_0,t_1) - W(t_0,t), t \in I.$$

*Доказательство.* Решение дифференциального уравнения (7) определяется по формуле (11). Из (11), в частности, когда $u(t) \in U$ имеем

$$y(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)[v(\tau)+\lambda_1(\tau,x_0,x_1)+N_1(\tau)z(t_1,v)]d\tau + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau, t \in I.$$

Отсюда с учетом того, что $\lambda_1(\tau,x_0,x_1), N_1(t)$ определяются по формуле (15) получим $y(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \Phi(t,\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)d\tau W^{-1}(t_0,t_1)\beta - -\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)d\tau W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)z(t_1,v) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = z(t,v) + +\lambda_2(\tau,x_0,x_1) + N_2(t)z(t_1,v), t \in I,\ z(t,v) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau,$
где $\lambda_2(\tau,x_0,x_1), N_2(t)$ определяются по формуле (21).

Заметим что $y(t_0) = z(t_0,v) + \lambda(t_0,x_0,x_1) + N_2(t_0)z(t_1,v) = x_0, y(t_1) = z(t_1,v)+$ $+\lambda(t_1,x_0,x_1)+N_2(t_1)z(t_1,v) = x_1$ в силу того, что: $z(t_0,v) = 0, \lambda_2(t_0,x_0,x_1) = x_0, N_2(t_0) =$ $= 0, N_2(t_1)z(t_1,v) = -z(t_1,v), \lambda(t_1,x_0,x_1) = x_1$. Итак, доказано соотношение (21). Теорема доказана.

Возникает вопрос: при выполнении каких условий решение краевой задачи (1)–(3) совпадает с решением линейной управляемой системой (7)–(9) т.е. $x(t) = x(t;t_0,x_0,x_1) =$ $= y(t) = y(t,t_0,x_0,x_1), t \in I$. На данный вопрос дает ответ следующая лемма.

**Лемма 1** *Пусть матрица* $W(t_0,t_1) > 0$. *Для того чтобы решение краевой задачи с фазовыми ограничениями* (1)–(3) *функция* $x(t) = x(t;t_0,x_0,x_1) = y(t) = y(t,t_0,x_0,x_1), t \in I$ *необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:*

$$u(t) = P(t)y(t), u(t) \in U, \tag{22}$$

$$y(t) \in G(t) = \{y \in R^n | \omega(t) \le L(t)y(t) \le \varphi(t), t \in I\}, \tag{23}$$

$$x_0 \in S_0 \subset R^n, x_1 \in S_1 \subset R^n, \tag{24}$$

*где функции* $u(t), y(t), t \in I$ *определяются формулами* (14), (20) *соответственно, функция* $z(t) = z(t,v), t \in I$ *— решение дифференциального уравнения* (16).

*Доказательство.* Как следует из теорем 4,5 соотношения (14), (20) верны для любых $x_0 \in R^n, x_1 \in R^n$. Тогда включение $u(t) \in U$ и соответствующее решение $y(t) = y(t,u), t \in I, u \in U$ верны для значения $x_0 \in S_0 \subset R^n, x_1 \in S_1 \subset R^n$. Из уравнения управляемой системы (7)–(9) с учетом (22)–(24), получим

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)P(t)y + \mu(t), t \in I, \tag{25}$$

$$y(t_0) = x_0 \in S_0, y(t_1) = x_1 \in S_1, \tag{26}$$

$$y(t) \in G(t), t \in I. \tag{27}$$

Отсюда следует, что краевая задача с фазовыми ограничениями (25)–(27) совпадает с краевой задачей (1)–(3). Следовательно, $x(t) = y(t), t \in I$. Лемма доказана.

Из теорем 1–5 и леммы 1 следует, что решение исходной краевой задачи (1)–(3) может быть сведено к решению задачи оптимального управления: минимизировать функционал (см.(22)-(24))

$$J(v(\cdot),x_0,x_1,w(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} [|u(t) - P(t)y(t)|^2 + |w(t) - L(t)y(t)|^2]dt \to inf \tag{28}$$

при условиях

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)v(t), z(t_0) = 0, t \in I, \tag{29}$$

$$v(\cdot) \in L_2(I,R^m), x_0 \in S_0 \subset R^n, x_1 \in S_1 \subset R^n \tag{30}$$

$$w(t) \in W = \{w(\cdot) \in L_2(I,R^s) | \omega(t) \le w(t) \le \varphi(t), t \in I\}, \tag{31}$$

где $u(t) = v(t)+\lambda_1(t,x_0,x_1)+N_1(t)z(t_1,v), y(t) = z(t,v)+\lambda_2(t,x_0,x_1)+N_2(t)z(t_1,v), t \in I, |\cdot|$ — евклидова норма.

**Лемма 2** *Пусть матрица* $W(t_0,t_1) > 0$. *Для того чтобы исходная краевая задача с фазовыми ограничениями* (1)–(3) *имела решение, необходимо и достаточно чтобы значение* $J(v_*(\cdot),x_0^*,x_1^*,w_*(\cdot)) = 0$, *где* $(v_*(\cdot),x_0^*,x_1^*,w_*(\cdot)) \in X = L_2(I,R^m)\times S_0\times S_1\times W \subset H, H = L_2(I,R^m)\times R^n \times R^n \times L_2(I,R^s)$ *— решение оптимизационной задачи* (28)–(31).

*Доказательство.* Если $(v_*(\cdot),x_0^*,x_1^*,w_*(\cdot)) \in X$ — решение оптимизационной задачи (28)–(31), значение $J(v_*(\cdot),x_0^*,x_1^*,w_*(0)) = 0$, то выполняются следующие равенства:

$$u_*(t) = v_*(t) + \lambda_1(t,x_0^*,x_1^*) + N_1(t)z(t_1,v_*) = P(t)y_*(t), t \in I, \tag{32}$$

$$w_*(t) = L(t)y_*(t), x_0^* \in S_0, x_1^* \in S_1, \tag{33}$$

где $y_*(t) = z(t,v_*) + \lambda_2(t,x_0^*,x_1^*) + N_2(t)z(t_1,v_*), t \in I$. Так как $w_*(t) \in W$, то выполняется неравенство

$$\omega(t) = w_*(t) = L(t)y_*(t) \le \varphi(t), t \in I. \tag{34}$$

Отсюда следует, что $y_*(t) \in G(t), t \in I$, где $y_*(t), t \in I$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{y}_*(t) = A(t)y_*(t) + B(t)P(t)y_*(t) + \mu(t), t \in I, y_*(t_0) = x_0^*, y_*(t_1) = x_1^*, \tag{35}$$

Функция $z(t,v_*), t \in I$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{z}(t,v_*) = A(t)z(t,v_*) + B(t)v_*(t), z(t_0,v_*) = 0, v_*(\cdot) \in L_2(I,R^m). \tag{36}$$

Из (32)–(36) следует, что выполнены все условия леммы 1. Следовательно, $y_*(t) = x_*(t) = x_*(t,t_0,x_0^*,x_1^*), t \in I$, где $x_*(t), t \in I$ — решение исходной задачи (1)–(3). Лемма доказана.

Переход от исходной задачи (1)–(3) к задаче оптимального управления (28)–(31) называется принципом погружения.

### 3.3 Построение решения краевой задачи с фазовыми ограничениями

Рассмотрим решение задачи 2, путем построения минимизирующих последовательностей для оптимизационной задачи (28)–(31).
Заметим что:

$$\begin{gathered} u(t) = v(t) + \lambda_1(t,x_0,x_1) + N_1(t)z(t_1,v) = \\ = v(t) + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + \mu_1(t) + N_1(t)z(t_1,v), t \in I, \end{gathered} \tag{37}$$

где

$$T_1(t) = -B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1), T_2(t) = B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$\mu_1(t) = -B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu(t)dt;$$

$$y(t) = z(t,v) + \lambda_2(t,x_0,x_1) + N_2(t)z(t_1,v) =$$

$$= z(t, \upsilon) + C_1(t)x_0 + C_2(t)x_1 + \mu_2(t) + N_2(t)z(t_1, \upsilon), t \in I, \tag{38}$$

где

$$C_1(t) = \Phi(t, t_0) W(t, t_1) W^{-1}(t_0, t_1), C_2(t) = \Phi(t, t_0) W(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) \Phi(t_0, t_1),$$

$$\mu_2(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) \mu(\tau) d\tau - \Phi(t, t_0) W(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) \mu(t) dt.$$

Введем следующие обозначения:

$$F(q(t), t) = |u(t) - P(t) y(t)|^2 + |w(t) - L(t) y(t)|^2, \tag{39}$$

$$\Delta_1(q, t) = u(t) - P(t) y(t), \Delta_2(q, t) = w(t) - L(t) y(t),$$

$q(t) = (\upsilon(t), x_0, x_1, w(t), z(t, \upsilon), z(t_1, \upsilon)) = (\theta(t), z(t, \upsilon), z(t_1, \upsilon)), \theta(t) = (\upsilon(t), x_0, x_1, w(t))$.

Теперь оптимизационная задача (28) – (31) запишется в виде

$$J(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F(q(t), t) dt \to \inf, \theta \in \mathrm{X} \subset H$$

где $z(t, \upsilon)$, $t \in I$ - решение дифференциального уравнения (29).

**Лемма 3** *Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$. Тогда частные производные*

$$F_\upsilon(q, t) = 2\Delta_1(q, t), F_w(q, t) = 2\Delta_2(q, t),$$

$$F_{x_0}(q, t) = [2T_1^*(t) - 2C_1^*(t) P^*(t)] \Delta_1(q, t) - 2C_1^*(t) P^*(t) L^*(t) \Delta_2(q, t),$$

$$F_{x_1}(q, t) = [2T_2^*(t) - 2C_2^*(t) P^*(t)] \Delta_1(q, t) - 2C_2^*(t) P^*(t) L^*(t) \Delta_2(q, t),$$

$$F_z(q, t) = -2P^*(t) \Delta_1(q, t) - 2P^*(t) L^*(t) \Delta_2(q, t),$$

$$F_{z(t_1)}(q, t) = [2N_1^*(t) - 2N_2^*(t) P^*(t)] \Delta_1(q, t) - 2N_2^*(t) P^*(t) L^*(t) \Delta_2(q, t). \tag{40}$$

*Доказательство* леммы непосредственно следует из (37) -(39).

**Лемма 4** *Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$, множества $S_0$, $S_1$-выпуклые. Тогда:*

*1) функционал (28) при условиях (29) -(31) является выпуклым;*

*2) производная $F_q(q, t) = \left(F_\upsilon, F_{x_0}, F_{x_1}, F_\omega, F_z, F_{z(t_1)}\right)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\|F_q(q + \Delta q, t) - F_q(q, t)\| \le K |\Delta q|, \quad \forall q, q + \Delta q \in R^N,$$

*где $K = const > 0$, $\Delta q = (\Delta\upsilon, \Delta x_0, \Delta x_1, \Delta w, \Delta z, \Delta z(t_1))$, $N = m + 4n + s$.*

*Доказательство* следует из (40), где все частные производные являются линейной функцией от $q \in R^N$, функция $F(q, t) = q^* E(t) E^*(t) q + 2q^* E^*(t) \Lambda_1(t) + \Lambda_1^*(t) \Lambda(t)$, где $E(t)$– матрица порядка $N \times N$, $\Lambda_1(t)$, $t \in I$– вектор функция $N \times 1$, $F_{q,q}(q, t) = 2E(t) E^*(t) \ge 0$, $t \in I$.

**Теорема 6** *Пусть матрица* $W(t_0, t_1) > 0$. *Тогда функционал* (28) *при условиях* (29) -(31) *непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент*

$$J'(\upsilon, x_0, x_1, w) = J'(\theta) = \left(J'_\upsilon(\theta), J'_{x_0}(\theta), J'_{x_1}(\theta), J'_w(\theta)\right) \in H,$$

*в любой точке* $\theta \in \mathrm{X} \subset H$ *вычисляется по формуле*

$$J'_\upsilon(\theta) = F_\upsilon(q(t), t) - B^*(t)\psi(t) \in L_2(I, R^m),$$

$$J'_{x_0}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{x_0}(q(t), t)\, dt \in R^n, \quad J'_{x_1}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{x_1}(q(t), t)\, dt \in R^n,$$

$$J'_\omega(\theta) = F_\omega(q(t), t) \in L_2(I, R^s), \tag{41}$$

*где частные производные определяются по формуле* (40), *функция* $z(t) = z(t, \upsilon)$, $t \in I$ *– решение дифференциального уравнения* (29), *а функция* $\psi(t)$, $t \in I$ *– решение сопряженной системы*

$$\dot{\psi} = F_z(q(t), t) - A^*(t)\psi, \quad \psi(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} F_{z(t_1)}(q(t), t)\, dt. \tag{42}$$

*Кроме того, градиент* $J'(\theta)$, $\theta \in \mathrm{X}$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\left\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\right\| \le K_1 \|\theta_1 - \theta_2\|, \quad \forall \theta_1,\ \theta_2 \in \mathrm{X}, \tag{43}$$

*где* $K = const > 0$ *– постоянная Липшица.*

*Доказательство* аналогичной теоремы имеется в [4].

Используя утверждение теоремы 6, на основе формулы (41) – (43) строим следующие последовательности

$$\upsilon_{n+1} = \upsilon_n - \alpha_n J'_\upsilon(\theta_n), x_{0n+1} = P_{S_0}\left[x_{0n} - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n)\right],$$

$$x_{1n+1} = P_{S_1}\left[x_{1n} - \alpha_n J'_{x_1}(\theta_n)\right], w_{n+1} = P_W\left[w_n - \alpha_n J'_w(\theta_n)\right], \tag{44}$$

$0 < \varepsilon_0 \le \alpha_n \le \frac{2}{K_1 + 2\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 > 0$, в частности, при $\varepsilon_1 = K_1/2$. $\alpha_n = 1/K_1 = const > 0$, $K_1 > 0$ – постоянная Липшица из (43), $\theta_n = (\upsilon_n, x_{0n}, x_{1n}, w_n) \in \mathrm{X}$, $S_0$, $S_1$, $W$ – выпуклые замкнутые множества, $P_S[\cdot]$ – проекция точки на множестве $S$.

**Теорема 7** *Пусть матрица* $W(t_0, t_1) > 0$, *множества* $S_0$, $S_1$, $W$ *– выпуклые замкнутые, последовательность* $\{\theta_n\} \subset \mathrm{X}$ *определяется по формуле* (44).
*Тогда:*

*1) числовая последовательность* $\{J(\theta_n)\}$ *строго убывает;*

*2)* $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ *при* $n \to \infty$*;*

*Если, кроме того, множество* $M(\theta_0) = \{\theta \in \mathrm{X} / J(\theta) \le J(\theta_0)\}$ *ограничено, то:*

*3) последовательность* $\{\theta_n\} \subset \mathrm{X}$ *является минимизирующей,* $\lim\limits_{n\to\infty} J(\theta_n) = J_* = \inf\limits_{\theta\in\mathrm{X}} J(\theta)$*;*

*4) множество* $X_* = \left\{\theta_* \in \mathrm{X} | J(\theta_*) = \min\limits_{\theta\in\mathrm{X}} J(\theta) = J_*\right\} \neq \phi$*,* $\phi-$ *пустое множество;*

*5) последовательность* $\{\theta_n\} \subset \mathrm{X}$ *слабо сходится к множеству* $\mathrm{X}_*$*,* $\upsilon_n \xrightarrow{c\lambda} \upsilon_* x_{0n} \to x_0^*$*,* $x_{1n} \to x_1^*$*,* $w_n \xrightarrow{c\lambda} w_*$ *при* $n \to \infty$*,* $\theta_* = (\upsilon_*, x_0^*, x_1^*, w_*) \in \mathrm{X}_*$*;*

*6) справедлива оценка скорости сходимости* $0 \leq J(\theta_n) - J_* \leq \frac{c}{n} n = 1, 2, ..., C = const > 0$*;*

*7) краевая задача* (1) *–* (3) *имеет решение тогда и только тогда, когда значение* $J(\theta_*) = 0$ *при этом* $x_*(t) = y_*(t) = z(t, \upsilon_*) + \lambda_2(t_1, x_0^*, x_1^*) + N_2(t) z(t_1, \upsilon_*)$*,* $x_*(t) \in G(t)$*,* $t \in I$*,* $w_*(t) = L(t) x_*(t)$*,* $t \in I$*.*

*Доказательство* аналогичной теоремы можно найти в [5].

## 4 Заключение

Предлагается новый метод решения краевых задач линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми ограничениями имеющий многочисленные приложения в теории динамических систем.

Научной новизной полученных результатов является:

формализация общей задачи динамических систем и приведение ее к краевым задачам обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми ограничениями;

найден новый критерий существования решения краевых задач в виде принципа погружения на основе теоремы существования и построение решения интегрального уравнения;

создан новый метод решения краевых задач линейных обыкновенных дифференциальных уравнений путем построения минимизирующих последовательностей для специальной начальной задачи оптимального управления;

## Список литературы

[1] Годунов С.К., *Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Том 1: Краевые задачи* (Издательство Новосибирского университета, 1994), 264.

[2] Тихонов В.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. *Дифференциальные уравнения* (М: Наука, 1985), 213.

[3] Смирнов В.И. *Курс высшей математики, Т.4, часть II* (М: Наука, 1981), 550.

[4] Айсагалиев С.А., Калимолдаев М.А., "Конструктивный метод решения краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений", *Дифференциальные уравнения* Т. 51, 2 (2015): 147-160.

[5] Айсагалиев С.А,. "Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений", *Дифференциальные уравнения* Т.27, 9 (1991): 1475-1486.

[6] Айсагалиев С.А., *Проблемы качественной теории дифференциальных уравнений: Избранные труды* (Алматы: Қазақ университеті, 2016), 397.

[7] Айсагалиев С.А., А.П. Белогуров, "Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением", *Сибирский математический журнал* т. 53, 1 (2011): 3-21. (англ.пер. Aisagaliev S.A., Belgorod A.P. "Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control", *Siberian Mathematical Journal* Vol. 53, 1 (2012): 13-28.

[8] Айсагалиев С.А., *Теория управляемости динамических систем* (Алматы: Қазақ университеті, 2014), 158.

[9] Aisagaliev S.A., "Controllability and Optimal Control in Nonlinear Systems", *Journal of Computer and Systems. Sciences International* 32 (1.5) (1994): 73-80.

[10] Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А., *Оптимальное управление динамических систем* (Palmarium Academic Publishing/Германия, Verlag, 2012), 288.

[11] Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А., "Об оптимальном управлении линейными системами линейным критерием качества и ограничениями", *Дифференциальные уравнения* Т. 48, 6 (2012): 826-838 [англ.пер. S.A.Aisagaliev and A.A. Kabidoldanova, "On the Optimal Control of Linear Systems with Linear Performance Criterion and Constraints", *Differential Equations* Vol. 48, 6 (2012): 832-844.]

[12] Айсагалиев С.А., Т.С. Айсагалиев, *Методы решения краевых задач* (Алматы: Қазақ университеті, 2002), 348.

[13] Колмогоров А.Н., Фомин С.В., *Элементы теории функций и функционального анализа* (М. : Наука, 1989), 624.

[14] Краснов М.Л,. *Интегральные уравнения* (М.: Наука, 1975), 304.

[15] Тихонов А.Н., В.Я. Арсенин, *Методы решения некоректных задач* (М. : Наука, 1986), 288.

[16] Лаврентьев М.М., *О некоторых некорректных задачах математической физики* (М.: Наука, 1986), 288.

[17] Иванов В.К., "Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода", *Дифференциальные уравнения* 3 (1967): 21-32.

[18] Фридман В.М., "Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода", (УМН XI, вып. I, 1956): 56-85.

[19] Морс Ф.М., Г.Фешбах, *Методы математической физики* Т.2. (М.: Издательство иностранной литературы, 1958), 932.

[20] Айсагалиев С.А., "Общее решение одного класса интегральных уравнений", *Математический журнал* Т. 5, 4 (18) (2005): 17-34.

[21] Айсагалиев С.А., *Конструктивная теория краевых задач оптимального управления* (Алматы: Қазақ университеті, 2007), 328.

[22] Айсагалиев С.А., А.П. Белогуров, И.В. Севрюгин, "К решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода для функции нескольких переменных", *Вестник КазНУ сер. мат., мех., инф.* 1 (68) (2011): 3-16.

[23] Айсагалиев С.А., *Лекции по оптимальному управлению* (Алматы: Қазақ университеті, 2007), 278.

[24] Айсагалиев С.А., Ж.Х.Жунусова, "Разрешимость и построение решения уравнения Фредгольма первого рода", *Вестник КазНУ, сер.мат., мех., инф.* 1 (88) (2016): 3-16.

[25] Aisagaliev S.A., Aisagaliev S.S., Kabidoldanova A.A., "Solvability and construction of solution of integral equation", *Bulletin math., mech., comp. science series* 2 (89) (2016): 3-18.

## References

[1] Godunov S.K., *Ordinary differential equations with constant coefficients, Vol. 1, Boundary Value Problems* (Novosibirsk University Press, 1994), 264.

[2] Tihonov V.N., Vasilieva A.B. and Sveshnikov A.G., *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], (M: Science, 1985), 213.

[3] Smirnov V.I., *Kurs vysshei matematiki* [Course of higher mathematics], Vol. 4, part II, (M: Science, 1981), 550.

[4] Aysagaliev S.A. and Kalimoldaev M.A., "Konstruktivnyi metod resheniya kraevoi zadachi obyknovennykh differentsialnykh uravnenii [A constructive method for solving the boundary value problem of ordinary differential equations]", *Differential equations* Vol. 51, 2 (2015): 147-160.

[5] Aysagaliev S.A., "Upravlyaemosst nekotoroi sistemy differentsialnykh uravnenii [Controllability of a certain system of differential equations]", *Differential Equations* Vol. 27, 9 (1991): 1475-1486.

[6] Aysagaliev S.A., *Problemy kachestvennoi teorii differentsialnykh uravnenii: Izbrannye trudy* [*Problems of the qualitative theory of differential equations: Selected works*] (Almaty: Kazakh University, 2016), 397.

[7] Aisagaliev S.A. and Belgorod A.P., "Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control", *Siberian Mathematical Journal* Vol. 53, 1 (2012): 13-28.

[8] Aysagaliev S.A., *Teoriya upravlyaemosti dinamicheskikh sistem* [*The theory of controllability of dynamic systems*] (Almaty: Kazakh University, 2014), 158.

[9] Aysagaliev S.A., "Controllability and Optimal Control in Nonlinear Systems", *Journal of Computer and Systems. - Sciences International.* 32 (1.5) (1994): 73-80.

[10] Aysagaliev S.A. and Kabidoldanova A.A., *Optimalnoe upravlenie dinamicheskikh sistem* [*Optimal control of dynamic systems*] (Palmarium Academic Publishing / Germany, Verlag, 2012), 288.

[11] S.A. Aisagaliev and A.A. Kabidoldanova, "On the Optimal Control of Linear Systems with Linear Performance Criterion and Constraints", *Differential Equations* Vol. 48, 6 (2012): 832-844.

[12] S.A. Aisagaliev and T.S. Aisagaliev, *Metody resheniya kraevykh zadach* [*Methods for solving boundary value problems*] (Almaty: Kazakh University, 2002), 348.

[13] Kolmogorov A.N. and Fomin S.V., *Elementy teorii funktsii i funktsionalnogo analiza* [*Elements of function theory and functional analysis*], (M.: Nauka, 1989), 624.

[14] Krasnov M.L., *Integralnye uravneniya* [*Integral Equations*] (M.: Nauka, 1975), 304.

[15] A.N. Tikhonov and V.Ya. Arsenin, *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [*Methods for solving ill-posed problems*] (M.: Nauka, 1986), 288.

[16] Lavrentiev M.M., *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoi fiziki* [*About some non-core problems of mathematical physics*] (M.: Nauka, 1986), 288.

[17] Ivanov V.K., "Ob integralnykh uravneniyakh Fredgolma pervogo roda [On Fredholm integral equations of the first kind]", *Differential equations* 3 (1967): 21-32.

[18] Friedman V.M., "Metod posledovatenykh priblizhenii dlya integralnogo uravneniya Fredgolma 1-go roda [The method of successive approximations for the Fredholm integral equation of the first kind]", (UMN XI., Issue I, 1956): 56-85.

[19] F.M. Morse and G. Feshbach, *Metody matematicheskoi fiziki* [*Methods of mathematical physics*] Vol. 2, (M.: Izdatelstvo inostrannoi literatury [Publishing house of foreign literature], 1958), 932.

[20] Aysagaliev S.A., "Obshee reshenie odnogo klassa integralnykh uravnenii [The general solution of a class of integral equations]", *Mathematical Journal* Vol. 5, 4 (18) (2005): 17-34.

[21] Aysagaliev S.A., *Konstruktivnaya teoriya kraevykh zadach optimalnogo upravleniya* [*Constructive theory of boundary value problems of optimal control*] (Almaty: Kazakh University, 2007), 328.

[22] S.A. Aisagaliev, A.P. Belogurov and I.V. Sevryugin, "K resheniyu integralnogo uravneniya Fredgolma pervogo roda dlya funktsii neskolkikh peremennykh [To the solution of the Fredholm integral equation of the first kind for a function of several variables]", *Vestnik KazNU. Ser. Mat., Mech., Inf.* 1 (68) (2011): 3-16.

[23] Aysagaliev S.A., *Lektsii po optimalnomu upravleniyu* [*Lectures on optimal control*] (Almaty: Kazakh University, 2007), 278.

[24] S.A. Aisagaliev and J.Kh. Zhunusova, "Razreshimosst i postroenie resheniya uravneniya Fredgolma pervogo roda [Solvability and construction of a solution of the Fredholm equation of the first kind]", *KazNU Bulletin. Math., Mech., Comp. Sci. Series* 1 (88) (2016): 3-16.

[25] Aisagaliev S.A., Aisagaliev S.S. and Kabidoldanova A.A., "Solvability and construction of solution of integral equation", *KazNU Bulletin. Math., Mech., Comp. Sci. Series* 2 (89) (2016): 3-18.