МРНТИ 27.29.23 DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.04

М.К. Дауылбаев[1,2,3], Н. Авилтай[1*], Б.Б. Кадирбеков[1]

[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

[2]Институт информационных и вычислительных технологий, г. Алматы, Казахстан

[3]Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

[*]e-mail: avyltay.nauryzbay@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Математическими моделями многих процессов в физике, астрофизике, химии, биологии, механики и технике часто служат дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения, содержащие малые параметры при старших производных. Такие уравнения в настоящее время принято называть сингулярно возмущенными. В статье рассматривается двухточечная краевая задача для линейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с малым параметром при двух старших производных при условии, когда корни «дополнительного характеристического уравнения» отрицательны и краевые условия содержат члены с малыми возмущениями. Целью исследования является получение асимптотических оценок решения и выяснение асимптотического поведения решений в окрестности точек, в которых заданы дополнительные условия, теряющиеся при вырождении. В работе построены граничные функции краевой задачи для сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения, получены их асимптотические оценки. С помощью граничных функции и функций Коши получена аналитическая формула решений краевой задачи. Доказана теорема об асимптотической оценке решения рассматриваемой краевой задачи. Установлены асимптотическое по малому параметру поведение решения и порядок роста его производных. Показано, что решение рассматриваемой краевой задачи на левом конце данного отрезка обладает явлением начального скачка первого порядка. Показаны отличительные особенности в асимптотических свойствах решений данной краевой задачи по сравнению с аналогичными работами в области сингулярно возмущенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, обладающих начальными скачками. Полученные результаты позволяют построить равномерное асимптотическое разложение решений краевых задач для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений с любой степенью точности по малому параметру.

Ключевые слова: Сингулярное возмущение, малый параметр, начальный скачок, асимптотические оценки.

М.Қ. Дауылбаев[1,2,3], Н. Авилтай[1*], Б.Б. Кадирбеков[1]

[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

[2]Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты, Алматы қ., Қазақстан

[3]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

[*]e-mail: avyltay.nauryzbay@mail.ru

Сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеулерге арналған шеттік есеп шешімінің асимптотикалық бағалауы

Үлкен туындыларының алдында кіші параметрлері бар дифференциалдық және интегралды-дифференциалдық теңдеулер физика, астрофизика, химия, биология, механика және техникадағы көптеген үрдістердің математикалық модельдері болып табылады. Қазіргі уақытта мұндай теңдеулерді сингулярлы ауытқыған деп атау қабылданған. Мақалада

«қосымша сипаттауыш теңдеуінің» түберлері теріс, ал шекаралық шарттарында кіші ауытқымалы мүшелері бар ең үлкен екі туындыларының алдында кіші параметрлері бар үшінші ретті сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін екі нүктелі шеттік есеп қарастырылады. Зерттеудің мақсаты шешімнің асимптотиқалық бағалауын алу және тозғындалған кезде түсіп қалатын қосымша шарттар берілген нүктелердің маңайында шешімнің асимптотикалық сипатын анықтау болып табылады. Жұмыс барысында сингулярлы ауытқыған біртекті дифференциалдық теңдеу үшін қойылған шеттік есептің шекаралық функциялары құрылды және олардың асимптотикалық бағалауы алынды. Шекаралық функциялардың және Коши функциясының көмегімен шеттік есеп шешімнің аналитикалық формуласы алынды. Қарастырылып отырған шеттік есеп шешімінің асимптотикалық бағалауы туралы теорема дәлелденді. Кіші параметр бойынша шешімнің асимптотикалық сипаты және туындыларының өсу реті анықталды. Қарастырылып отырған шеттік есеп шешімінің берілген аралықтың сол жақ шетінде бірінші ретті бастапқы секірісінің бар екені көрсетілді. Бастапқы секірісті дифференциалдық және интегралды-дифференциалдық теңдеулер саласындағы басқа ұқсас жұмыстармен салыстырғанда берілген шеттік есеп шешімінің асимптотикалық қасиеттеріндегі ерекшеліктер көрсетілді. Алынған нәтижелер сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеулерге арналған шеттік есептер шешімінің кіші параметрдің кез-келген дәрежесі бойынша дәлдікпен бірқалыпты асимптотикалық жіктелуін құруға мүмкіндік береді.
Түйін сөздер: сингулярлы ауытқу, кіші параметр, бастапқы секіріс, асимптотикалық бағалау.

M. Dauylbayev[1,2,3], **N. Aviltay**[1*], **B. Kadirbekov**[1]
[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[2]Institute of Information and Computational Technologies, Almaty, Kazakhstan
[3]Institute of mathematics and mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan
*e-mail: avyltay.nauryzbay@mail.ru

Asymptotic estimates of the solution of the boundary value problem for singularly perturbed integro-differential equations

The mathematical models of many processes in physics, astrophysics, chemistry, biology, mechanics and technology are differential and integro-differential equations containing small parameters at the highest derivatives. Such equations currently are called singularly perturbed equations. The paper considers a two-point boundary value problem for a third-order linear integro-differential equation with a small parameter at the two highest derivatives, when the roots of the «additional characteristic equation» are negative and the boundary conditions contain terms with small perturbations. The aim of the study is to obtain asymptotic estimates of the solution and to obtain the asymptotic behavior of the solution in a neighborhood of points where additional conditions are given that are lost during degeneracy. The boundary functions of the boundary value problem for a singularly perturbed homogeneous differential equation are constructed, and their asymptotic estimates are obtained. Using boundary functions and Cauchy function an analytical formula for the solutions of the boundary value problem is obtained. A theorem on the asymptotic estimate of the solution of the considered boundary value problem is proved. The asymptotic behavior of the solution and the growth order of its derivatives with respect to a small parameter are established. It is shown that the solution of the boundary value problem at the left point of given segment has the phenomenon of an initial first-order jump. Distinctive features in the asymptotic properties of the solutions of this boundary-value problem are shown in comparison with similar works in the field of singularly perturbed differential and integro-differential equations with initial jumps. The obtained results make it possible to construct a uniform asymptotic expansion of the solutions of boundary value problems for singularly perturbed integro-differential equations with any degree of accuracy with respect to a small parameter.
Key words: singular perturbation, small parameter, initial jump, asymptotic estimates.

1 Введение

Впервые начальные задачи с неограниченными начальными данными при стремлении малого параметра к нулю изучены в работах М.И. Вишика, Л.А. Люстерника [1] и К.А. Касымова [2]. Особенностью этих задач является то, что решение сингулярно возмущенной начальной задачи при стремлении малого параметра к нулю стремится к решению вырожденного уравнения, но уже с измененным начальным условием. В таком случае говорят, что имеет место явление начального скачка. Наиболее общие случаи задач Коши с начальными скачками для сингулярно возмущенных нелинейных систем обыкновенных и интегро-дифференциальных уравнений, а также для систем и уравнений в частных производных гиперболического типа изучены К.А.Касымовым и были продолжены его учениками. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, обладающие явлениями начальных скачков рассмотрены в [3, 4]. В настоящей работе рассматривается линейное интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка с малым параметром при двух старших производных с краевыми условиями, содержащими члены с малыми возмущениями в случае, когда корни так называемого «дополнительного характеристического уравнения» имеют отрицательные знаки. Асимптотическое поведение решения таких краевых задач не исследовались. Работа посвящена установлению асимптотических свойств решения по малому параметру. Сингулярно возмущенные уравнения имеют большую прикладную значимость. Они выступают в качестве математических моделей при исследовании разнообразных процессов в физике, химии, биологии и технике и т.д. Тем самым исследование таких задач является актуальным.

2 Обзор литературы

Асимптотические и численные методы приближения к решениям сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в настоящее время активно исследуются как, отечественными, так и зарубежными авторами (См., например, [5–20]). Следует отметить, что в этих и в других работах по сингулярно возмущенным уравнениям авторы исследуют такие краевые задачи, которые не обладают явлениями начальных скачков. В отличие от указанных работ нами исследуются краевые задачи с начальными скачками для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. В данной работе изучено асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенной краевой задачи в точке начального скачка и получены асимптотические оценки решения.

3 Материал и методы

Рассмотрим сингулярно возмущенное интегро-дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t)y'' + B(t)y' + C(t)y = F(t) + \int\limits_0^1 \sum_{i=0}^{1} H_i(t,x)y^{(i)}(x,\varepsilon)dx, \qquad (1)$$

со следующими краевыми условиями

$$
\begin{aligned}
&h_i y(t,\varepsilon) \equiv \alpha_i y(0,\varepsilon) + \beta_i y'(0,\varepsilon) + \delta_i \varepsilon y''(0,\varepsilon) = a_i, \qquad i = 1,2,\\
&h_3 y(t,\varepsilon) \equiv \alpha_3 y(1,\varepsilon) + \beta_3 \varepsilon y'(1,\varepsilon) + \delta_3 \varepsilon^2 y''(1,\varepsilon) = b.
\end{aligned} \tag{2}
$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, α_i, β_i, $\delta_i, i = \overline{1,3}$, a_1, a_2, b – известные постоянные.

Пусть выполнены следующие условия:

I. $A(t), B(t), C(t) \in C^2[0,1], \quad F(t) \in C[0,1],$
$H_i(t,x) \in C(D), i = 0,1, \quad D = \{0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1\}.$

II. Пусть корни уравнения $\mu^2 + A(t)\mu + B(t) = 0$ удовлетворяют условиям $\mu_1 \ne \mu_2$, $\mu_i \le -\gamma < 0$, $i = 1,2$.

III. $\alpha_3 \ne 0, \quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \delta_1 \\ \beta_2 & \delta_2 \end{vmatrix} \ne 0.$

IV. Число $\lambda = 1$ не является собственным значением ядра $H(t,s,\varepsilon)$ (см. (12))

Рассмотрим однородное уравнение

$$
L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t) y'' + B(t) y' + C(t) y = 0. \tag{3}
$$

Если выполнены условия (I), (II), то для фундаментальной системы решений уравнения (3) имеет место следующее асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ представление [21]:

$$
\begin{cases}
y_i^{(j)}(t,\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon^j} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu_i(x)dx} (\mu_i^j(t) y_{i0}(t) + O(\varepsilon), \quad i = 1,2, \\
 \\
y_3^{(j)}(t,\varepsilon) = y_{30}^{(j)}(t) + O(\varepsilon).
\end{cases}
\qquad j = \overline{0,2}. \tag{4}
$$

Пусть функция $K(t,s,\varepsilon)$, $0 \le s \le t \le 1$ является решением задачи:

$$
L_\varepsilon K(t,s,\varepsilon) = 0, \quad K^{(j)}(s,s,\varepsilon) = \delta_{2,j} \quad j = \overline{0,2}, \tag{5}
$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Функция $K(t,s,\varepsilon)$ называется функцией Коши, и для нее справедливы следующие оценки [21]:

$$
\left|K^{(j)}(t,s,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon^2 + C\varepsilon^{2-j} e^{-\gamma\frac{t-s}{\varepsilon}}, \quad j = \overline{0,2}. \tag{6}
$$

Пусть функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,3}$ являются решениями задачи:

$$
\begin{cases}
L_\varepsilon \Phi_i(t,\varepsilon) = 0, & i = \overline{1,3}. \\
h_k \Phi_i(t,\varepsilon) = \delta_{ki}, & k = \overline{1,3}
\end{cases}. \tag{7}
$$

Функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,3}$ называются граничными функциями, и они определяются по следующей формуле [21]:

$$
\Phi_i(t,\varepsilon) = \frac{\Delta_i(t,\varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)}, \quad i = \overline{1,3}, \tag{8}
$$

где

$$\Delta(\varepsilon)=\begin{vmatrix} h_1y_1(t,\varepsilon) & h_1y_2(t,\varepsilon) & h_1y_3(t,\varepsilon)\\ h_2y_1(t,\varepsilon) & h_2y_2(t,\varepsilon) & h_2y_3(t,\varepsilon)\\ h_3y_1(t,\varepsilon) & h_3y_2(t,\varepsilon) & h_3y_3(t,\varepsilon)\end{vmatrix},$$

а $\Delta_i(t,\varepsilon)$ – определители, получаемые из $\Delta(\varepsilon)$ заменой его i-ой строки фундаментальной системой решений уравнения (3).

Для граничных функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,3}$ из (8) с учетом (2), (4) получаем асимптотическое при $\varepsilon\to 0$ представление:

$$\Phi_1^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^{j-1}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_1(x)dx}(\Delta_{21}\mu_1^j(t)y_{10}(t)+O(\varepsilon))-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^{j-1}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_2(x)dx}(\Delta_{22}\mu_2^j(t)y_{20}(t)+O(\varepsilon)),\quad j=\overline{0,2},$$

$$\Phi_2^{(j)}(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon^{j-1}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_1(x)dx}(\Delta_{11}\mu_1^j(t)y_{10}(t)+O(\varepsilon))+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^{j-1}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_2(x)dx}(\Delta_{12}\mu_2^j(t)y_{20}(t)+O(\varepsilon)),\quad j=\overline{0,2}.$$

$$\Phi_3^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{y_{30}^{(j)}(t)}{\alpha_3y_{30}(1)}+\frac{1}{\varepsilon^{j-1}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_1(x)dx}(\Delta_{31}\mu_1^j(t)y_{10}(t)+O(\varepsilon))-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^{j-1}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_2(x)dx}(\Delta_{32}\mu_2^j(t)y_{20}(t)+O(\varepsilon))\quad j=\overline{0,2}.$$

где

$$\Delta_{i1}=\frac{\beta_i+\delta_i\mu_2(0)}{\mu_1(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))\Delta_0},\quad \Delta_{i2}=\frac{\beta_i+\delta_i\mu_1(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))\Delta_0},\quad i=1,2,$$

$$\Delta_{31}=\frac{\begin{vmatrix}\beta_1+\delta_1\mu_2(0) & \alpha_1+\beta_1y_{30}'(0)\\ \beta_2+\delta_2\mu_2(0) & \alpha_2+\beta_2y_{30}'(0)\end{vmatrix}}{\alpha_3\mu_1(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))\Delta_0y_{30}(1)},\quad \Delta_{32}=\frac{\begin{vmatrix}\beta_1+\delta_1\mu_1(0) & \alpha_1+\beta_1y_{30}'(0)\\ \beta_2+\delta_2\mu_1(0) & \alpha_2+\beta_2y_{30}'(0)\end{vmatrix}}{\alpha_3\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))\Delta_0y_{30}(1)}.$$

Для функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,3}$ справедливы оценки:

$$\left|\Phi_i^{(j)}(t,\varepsilon)\right|\le\frac{C}{\varepsilon^{j-1}}e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}},\quad i=1,2,\quad \left|\Phi_3^{(j)}(t,\varepsilon)\right|\le C+\frac{C}{\varepsilon^{j-1}}e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}},\quad j=\overline{0,2}. \tag{9}$$

Решение задачи (1), (2) ищем в виде:

$$y(t,\varepsilon)=C_1\Phi_1(t,\varepsilon)+C_2\Phi_2(t,\varepsilon)+C_3\Phi_3(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t K(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds, \tag{10}$$

где $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,3}$ – граничные функции, C_i, $i=\overline{1,3}$ – неизвестные постоянные, $z(t,\varepsilon)$ – неизвестная функция, определяемая из следующего интегрального уравнения Фредгольма

$$z(t,\varepsilon)=f(t,\varepsilon)+\int\limits_0^1 H(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds. \tag{11}$$

Здесь

$$f(t,\varepsilon)=F(t)+\int\limits_0^1\sum_{i=0}^{1}H_i(t,x)\left(C_1\Phi_1^{(i)}(x,\varepsilon)+C_2\Phi_2^{(i)}(x,\varepsilon)+C_3\Phi_3^{(i)}(x,\varepsilon)\right)dx,$$

$$H(t,s,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_s^1\sum_{i=0}^{1}H_i(t,x)K^{(i)}(x,s,\varepsilon)dx. \tag{12}$$

Решая уравнение (11) с помощью резольвенты с учетом условия (IV) и подставляя в (10), получаем решение задачи (1), (2) в виде

$$y(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{3}C_iQ_i(t,\varepsilon)+P(t,\varepsilon), \tag{13}$$

где

$$Q_i(t,\varepsilon)=\Phi_i(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^1 K(t,s,\varepsilon)\varphi_i(s,\varepsilon)ds,\quad i=\overline{1,3},$$

$$P(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^1 K(t,s,\varepsilon)\overline{F}(s,\varepsilon)ds, \tag{14}$$

$$\varphi_i(t,\varepsilon)=\int\limits_0^1\sum_{j=0}^{1}\overline{H}_j(t,x,\varepsilon)\Phi_i^{(j)}(x,\varepsilon)dx,\quad i=\overline{1,3},$$

а для $\overline{H}_j(t,x,\varepsilon)$, $\overline{F}(t,\varepsilon)$ справедливы асимптотические представления:

$$\begin{aligned}\overline{H}_j(t,x,\varepsilon)&=H_j(t,x)+\int\limits_0^1 R(t,s,\varepsilon)H_j(s,x)ds\equiv\overline{H}_j(t,x)+O(\varepsilon),\\ \overline{F}(t,\varepsilon)&=F(t)+\int\limits_0^1 R(t,s,\varepsilon)F(s)ds\equiv\overline{F}(t)+O(\varepsilon).\end{aligned} \tag{15}$$

Для резольвенты имеет место при малых ε представление

$$R(t,s,\varepsilon)=\overline{R}(t,s)+(\varepsilon).$$

Для определения неизвестных постоянных C_i, $i=\overline{1,3}$ из (13) с учетом краевых условий (2) получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1h_1Q_1(t,\varepsilon)+C_2h_1Q_2(t,\varepsilon)+C_3h_1Q_3(t,\varepsilon)=a_1-h_1P(t,\varepsilon),\\ C_1h_2Q_1(t,\varepsilon)+C_2h_2Q_2(t,\varepsilon)+C_3h_2Q_3(t,\varepsilon)=a_2-h_2P(t,\varepsilon),\\ C_1h_3Q_1(t,\varepsilon)+C_2h_3Q_2(t,\varepsilon)+C_3h_3Q_3(t,\varepsilon)=b-h_3P(t,\varepsilon).\end{cases} \tag{16}$$

Из (16) с учетом формул (14), (15) и краевых условий (2), находим неизвестные C_i, $i=\overline{1,3}$:

$$C_1=a_1,\quad C_2=a_2,\quad C_3=\frac{1}{\overline{\omega}}\left(b-\alpha_3\int\limits_0^1\frac{y_{30}(1)\overline{F}(s)}{\mu_1(s)\mu_2(s)y_{30}(s)}ds\right)+O(\varepsilon), \tag{17}$$

где

$$\overline{\omega}=1+\int\limits_0^1\frac{\overline{\varphi}(s)ds}{\mu_1(s)\mu_2(s)y_{30}(s)},\quad \overline{\varphi}(s)=\int\limits_0^1\sum_{i=0}^1\overline{H}_i(s,x)y_{30}^{(i)}(x)dx,$$

Тем самым, решение краевой задачи (1), (2) имеет вид (13), где $Q_i(t,\varepsilon)$, $P(t,\varepsilon)$ выражаются формулой (14), а C_i, $i=\overline{1,3}$ имеет вид (17).

Теорема 1 *Пусть выполнены условия (I) – (IV). Тогда для решения краевой задачи* (1), (2) *справедливы следующие асимптотические при* $\varepsilon\to 0$ *оценки:*

$$\left|y^{(j)}(t,\varepsilon)\right|\le C\left(\varepsilon|a_1|+\varepsilon|a_2|+|b|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right)+$$

$$+\frac{C}{\varepsilon^{j-1}}\left(|a_1|+|a_2|+|b|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right)e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}},\quad j=\overline{0,2}. \tag{18}$$

для $C>0$, $\gamma>0$ *– некоторые постоянные, не зависящие от* ε.

Доказательство. Для функции $Q_i(t,\varepsilon)$, $P(t,\varepsilon)$ из (14), (15) с учетом (6), (9) получаем оценки:

$$\begin{aligned} &\left|Q_i^{(j)}(t,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon+\frac{C}{\varepsilon^{j-1}}e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}},\quad i=1,2,\quad j=\overline{0,2},\\ &\left|Q_3^{(j)}(t,\varepsilon)\right|\le C+\frac{C}{\varepsilon^{j-1}}e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}},\quad j=\overline{0,2},\\ &\left|P^{(j)}(t,\varepsilon)\right|\le\left(C+\frac{C}{\varepsilon^{j-1}}e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}\right)\max_{0\le t\le 1}|F(t)|,\quad j=\overline{0,2}.\end{aligned} \tag{19}$$

Тогда из формулы (13) с помощью (17) и оценок (19) получаем требуемые оценки (18).

Из теоремы следует, что

$$y^{(j)}(0,\varepsilon)=O(1),\quad j=0,1;\quad y''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad \varepsilon\to 0.$$

Это означает, что решение исходной краевой задачи в точке $t=0$ обладает явлением начального скачка первого порядка.

4 Результаты и обсуждение

Ранее аналогичные краевые задачи, но без малых возмущений в краевых условиях, были рассмотрены в [22] для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и в [23] - для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. В этих работах были выявлены идентичные асимптотические свойства решений: имело место явление начального скачка нулевого порядка второй степени. Однако, вырожденная задача, к решению которой стремится решение исходной сингулярно возмущенной краевой задачи, в случае интегро-дифференциального уравнения, в отличие от дифференциального случая, содержала дополнительный член, называемый начальным скачком интегрального члена. Тогда может создаться впечатление, что в интегро-дифференциальных уравнениях в силу наличия интегральных членов всегда появляется начальный скачок интегрального члена. Наша работа показывает, что это не всегда так. По сравнению с работой [23] в нашем случае явление начального скачка решения также имеется, но наблюдается явление начального скачка первого порядка, т.е. начальный скачок имеет не само решение, а его первая производная, что является первым отличием от вышеуказанной работы. Во-вторых, начальный скачок интегрального члена в нашем случае отсутствует. Тем самым, построение вырожденной задачи, которая является предельной для исходной возмущенной интегро-дифференциальной задачи, достаточно упрощается.

5 Заключение

В работе исследована краевая задача для линейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка с малым параметром при двух старших производных при условии, когда корни «дополнительного характеристического уравнения» отрицательны. Получены аналитическая формула и асимптотические оценки решения рассматриваемой краевой задачи. Установлено асимптотическое поведение решений краевой задачи в окрестности граничных точек. Оказалось, что при $\varepsilon \to 0$ все компоненты решения в точке $t = 1$ являются ограниченными, а в левой точке $t = 0$ вторая производная становится бесконечно большой порядка $O(1/\varepsilon)$. Это означает, что в точке $t = 0$ имеет место явление начального скачка первого порядка. Полученные в работе результаты позволяют сделать следующий вывод: в сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных задачах не всегда имеет место явления начальных скачков интегралов. Это зависит от порядка начального скачка решения или его производных, порядка производных, входящих под знаком интеграла, а также связано с видом дополнительных условий, которыми определено решение исходной возмущенной задачи. Полученные результаты позволяют определить вырожденную задачу, к решению которой стремится решение исходной сингулярно возмущенной задачи, а также построить равномерное асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений с любой степенью точности по малому параметру.

6 Благодарности

Работа выполнена при частичной поддержке грантов №AP05132573 «Клеточные нейронные сети с непрерывным и дискретным временем и сингулярными возмущениями» Комитета по науке МОН РК (2018-2020) и № AP05132587 «Краевые задачи для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с непрерывным и кусочно-постоянным аргументом» (2018-2020).

Список литературы

[1] Вишик М.И., Люстерник Л.А. О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // ДАН СССР. - 1960. - Т. 132, № 6. - С. 1242 -1245.

[2] К.А. Касымов Об асимптотике решения задачи Коши с большими начальными условиями для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего малый параметр // УМН, 1962, № 17. вып. 5, С. 187-188.

[3] K.A. Kassymov, D. Nurgabyl "Asymptotic Estimates of Solution of a Singularly Perturbed Boundary Value Problem with an Initial Jump for Linear Differential Equations"*Differential Equations,* Vol. 40, No.5, (2004): 641-651.

[4] Dauylbayev M.K. and Atakhan N. The initial jumps of solutions and integral terms in singular BVP of linear higher order integro-differential equations // Miskolc Math. Notes, Hungary, Vol. 16, no 2, (2015): 747-761.

[5] Vasil'eva, A., Butuzov,V., and Kalachev, L. (1995), "The boundary function method for singular perturbation problems" , *SIAM Studiesin Applied Mathematics,* Philadeplhia: SIAM, 1995.

[6] A.H. Nayfeh "Perturbation Methods" , USA: Wiley-Interscience, 2000.

[7] O'Malley, Robert E. "Historical Developments in Singular Perturbations" , Switzerland: Springer International Publishing, 2014.

[8] Mudvanhu, B and O'Malley, R. E., Jr. "A new renormalization method for the asymptotic solution of weakly nonlinear vector systems" , SIAM J. Appl. Math. vol. 63, no. 2, (2002): 373-397.

[9] Kevorkian, J. and Cole, J.D. "Multiple Scale and Singular Perturbations Method" , New York: Springer, 1996.

[10] Sanders, J. A. and Verhulst, F. and Murdock, J. "Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems" , 2nd Ed. New York: Springer-Verlag, 2007.

[11] Verhulst, F. "Methods and applications of singular perturbations: Boundary layers and multiple timescale dynamics" , *Texts in Applied Mathematics,* New York: Springer, 2005.

[12] D.R. Smith "Singular-Perturbation Theory an Introduction with Applications" , Cambridge: University Press, 2009.

[13] White, R. B. "Asymptotic Analysis of Differential Equations" , London: Imperial College Press, 2005.

[14] A.M. Wazwaz "A comparative study on a singular perturbation problem with two singular boundary points" , Applied Mathematics and Computation, 99 (1999), pp. 179-193

[15] S. Johnson "Singular Perturbation Theory, Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering" , New York: Springer, 2005.

[16] Skinner L.A. "Singular Perturbation Theory" , New York: Springer, 2011.

[17] M. Kumar, H.K. Mishra, P. Singh "A boundary value approach for singularly perturbed boundary value problems" , *Advances in Engineering Software,* vol. 40, no 4, (2009): 298-304.

[18] W.T. Van "Horssen On integrating vectors and multiple scales for singularly perturbed ordinary differential equations" , *Nonlinear Analysis,* 46, (2001): 19-43.

[19] H. Hu, Z.G. Xiong "Comparison of two Lindstedt-Poincare type perturbation methods" , *Journal of Sound and Vibration,* 278, (2004): 437-444.

[20] F. Lakrad, M. Belhaq "Periodic solutions of strongly nonlinear oscillators by the multiple scales method", *Journal of Sound and Vibration,* vol. 258, no 4 (2002): 677-700.

[21] Дауылбаев М.К., Жумартов М.А., Конисбаева К.Т. Сингулярлы ауытқыған интегралды дифференциалдық теңдеулер үшін интегралды шеттік есеп шешімінің асимптотикалық жинақтылығы // Вестник КазНПУ имени Абая, серия физ-мат., 2015. №1. С 18-24.

[22] Шарипова Ж.У. Асимптотика решений краевой задачи с начальным скачком для линейных дифференциальных уравнений // автореферат канд. дис. по спец. 01.01.02 - дифференциальные уравнения и математическая физика. Алматы, 1996.

[23] Assiya Zhumanazarova and Young Im Cho "Asymptotic Convergence of the Solution of a Singularly Perturbed Integro-Differential Boundary Value Problem", *Mathematics* 8 (2), 213 (2020). doi: 10.3390/math8020213.

References

[1] Vishik M.I., Lyusternik L.A. "O nachal'nom skachke dlya nelinejnyh differencial'nyh uravnenij, soderzhashchih malyj parameter [On the initial jump for nonlinear differential equations containing a small parameter]", *Doklady Akademii Nauk SSSR.* vol. 132, no 6 (1960): 1242-1245.

[2] K.A. Kasymov. "Ob asimptotike resheniya zadachi Koshi s bol'shimi nachal'nymi usloviyami dlya nelinejnogo obyknovennogo differencial'nogo uravneniya, soderzhashchego malyj parameter [On the asymptotic behavior of the solution of the Cauchy problem with large initial conditions for a nonlinear ordinary differential equation containing a small parameter]", *Uspekhi matematicheskih nauk.* vol. 5, no 17 (1962): 187-188.

[3] K.A. Kassymov, D. Nurgabyl "Asymptotic Estimates of Solution of a Singularly Perturbed Boundary Value Problem with an Initial Jump for Linear Differential Equations", *Differential Equations.* vol. 40, no 5 (2004): 641-651.

[4] Dauylbayev M.K. and Atakhan N. "The initial jumps of solutions and integral terms in singular BVP of linear higher order integro-differential equations", *Miskolc Math. Notes, Hungary.* vol. 16, no 2 (2015): 747-761.

[5] Vasil'eva, A., Butuzov,V., and Kalachev, L. "The boundary function method for singular perturbation problems, SIAM Studiesin Applied Mathematics", Philadeplhia: SLAM, 1995.

[6] A.H. Nayfeh "Perturbation Methods", USA: Wiley-Interscience, 2000.

[7] O'Malley, Robert E. "Historical Developments in Singular Perturbations", Switzerland: Springer International Publishing, 2014.

[8] Mudvanhu, B and O'Malley, R. E., Jr. "A new renormalization method for the asymptotic solution of weakly nonlinear vector systems", *SIAM J. Appl. Math.* vol. 63, no 2 (2002): 373-397.

[9] Kevorkian, J. and Cole, J.D. "Multiple Scale and Singular Perturbations Method", New York: Springer, 1996.

[10] Sanders, J. A. and Verhulst, F. and Murdock, J. "Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems", 2nd Ed. New York: Springer-Verlag, 2007.

[11] Verhulst, F. "Methods and applications of singular perturbations: Boundary layers and multiple timescale dynamics", *Texts in Applied Mathematics.* New York: Springer, 2005.

[12] D.R. Smith "Singular-Perturbation Theory an Introduction with Applications", Cambridge: University Press, 2009.

[13] White, R. B. "Asymptotic Analysis of Differential Equations", London: Imperial College Press, 2005.

[14] A.M. Wazwaz "A comparative study on a singular perturbation problem with two singular boundary points", *Applied Mathematics and Computation,* 99 (1999): 179-193.

[15] S. Johnson "Singular Perturbation Theory, Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering", New York: Springer, (2005).

[16] Skinner L.A. "Singular Perturbation Theory."New York: Springer, 2011.

[17] M. Kumar, H.K. Mishra, P. Singh "A boundary value approach for singularly perturbed boundary value problems", *Advances in Engineering Software,* vol. 40, no 4 (2009): 298-304.

[18] W.T. Van "Horssen On integrating vectors and multiple scales for singularly perturbed ordinary differential equations" , *Nonlinear Analysis*, 46, (2001): 19-43.

[19] H. Hu, Z.G. Xiong "Comparison of two Lindstedt-Poincare type perturbation methods" , *Journal of Sound and Vibration*, 278, (2004): 437-444.

[20] F. Lakrad, M. Belhaq "Periodic solutions of strongly nonlinear oscillators by the multiple scales method" , *Journal of Sound and Vibration*, vol. 258, no 4 (2002): 677-700.

[21] Dauylbayev M.K., Zhumartov M.A., Konisbaeva K.T. "Cingylyaply ayytқyɣan integpaldy diffepencialdyқ teңdeylep үshin integpaldy shettik ecep sheshiminiң acimptotikalyқ zhinaқtylyɣy [Asymptotic convergence of the solution of the integral boundary value problem for singularly perturbed integral differential equations]" , *Vectnik KazNPU imeni Abaya, cepiya fiz-mat.* no 1 (2015): 18-24.

[22] Kasymov K.A., Sharipova Zh.U. "Asimptoticheskie ocenki resheniya kraevoj zadachi dlya singulyarno vozmushchennyh linejnyh differencial'nyh uravnenij tret'ego poryadka [Asymptotic estimates of the solution of the boundary value problem for singularly perturbed linear differential equations of the third order]" , Vestnik KazGU im. S.M. Kirova. Ser. mat. no 1, (1993): 146-150.

[23] Assiya Zhumanazarova and Young Im Cho (2020) "Asymptotic Convergence of the Solution of a Singularly Perturbed Integro-Differential Boundary Value Problem" , *Mathematics*, 8 (2), 213(2020); doi:10.3390/math8020213.