

2-бөлім

Раздел 2

Section 2

Механика

Механика

Mechanics

MPНТИ 27.39.21

DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.06>**Б.Е. Кангужин¹** , **Е.Н. Ақанбай^{1*}** , **Ж. Мәдібайұлы²**¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан²Институт механики и машиноведения имени академика

У.А. Джолдасбекова, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: akanbay.yerkebulan@gmail.com

СОЧЛЕНЕНИЕ ТОНКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ И ОБОБЩЕННЫЕ УСЛОВИЯ КИРХГОФА В УЗЛАХ

В работе приведены различные модели упругих тонких искривленных стержней и их соединений. Такие стержни и их соединения важны в прикладных исследованиях и имеют давнюю историю. Тем не менее вопросы математического исследования в описании процедуры перехода от многомерной модели к одномерной исследованы не в полной мере. В данной работе приводятся результаты, когда тонкий объект растягивается в одномерный объект. При этом возникают различные трудности. К примеру, более детального рассмотрения требует проблема описания условий склеивания в вершинах предельного графа. Оказывается, что вид конкретных условий склеиваний зависит от различных физических предпосылок. С другой стороны, однозначная разрешимость в тех или иных функциональных пространствах зависит от выбранных условий склеивания. Первая часть работы описывает различные категории условий склеивания. Во второй части работы будут приведены различные примеры конструкции из упругих тонких искривленных стержней и их соединений, когда предельная задача дополняется теми или иными условиями склеивания. В заключении второй части приведён численный расчет собственных частот свободных колебаний соединений упругих тонких искривленных стержней.

Ключевые слова: Упругий тонкий искривленный стержень, криволинейный стержень, условия Кирхгофа в узлах, теория упругости, уравнение теории упругости, модель соединения стержней.

Б.Е. Кангужин¹, **Е.Н. Ақанбай^{1*}**, **Ж. Мәдібайұлы²**¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан²Академик Ө.А. Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институты, Алматы қ., Қазақстан*e-mail: akanbay.yerkebulan@gmail.com

Біріккен серпімді жіңішке стержендер мен оларға сәйкес жалпылама Кирхгоф шарттары

Бұл жұмыста жұқа серпімді иілген стержендер мен олардың біріктірілімдерінің әртүрлі үлгілері келтірілген. Мұндай стержендер мен олардың байланыстарының қолданбалы зерттеулер үшін маңызы жоғары және олардың тарихы бар. Дегенмен, көпөлшемді модельден бірөлшемді модельге өту процедурасын сипаттауда математикалық зерттеулердің сұрақтары толыққанды қарастырылмаған. Бұл жұмыста жұқа нысанның бір өлшемді нысанға тартылғандағы зерттеулер нәтижелері көрсетілген. Бұл жағдайда әртүрлі қиындықтар туындайды. Мысалы, шектелген мойынның ұштарындағы байланыс шарттарын сипаттау проблемасын толығырақ қарастыру қажет. Белгілі бір байланыс жағдайларының түрі әртүрлі физикалық үй-жайларға байланысты екені белгілі болды. Екінші жағынан, әр түрлі функционалды кеңістіктердегі ерекше шешілу қабілеттілігі таңдалған байланыс шарттарына байланысты.

Жұмыстың бірінші бөлімі байланыс шарттарының әртүрлі категорияларын сипаттайды. Екінші бөлімде шектік есептің белгілі бір байланыс шарттарымен толықтырылғандағы жұқа серпімді иілген өзектер мен олардың байланыстарының контрукцияларының әртүрлі мысалдары келтірілген. Қорытындыда серпімді жұқа иілген өзектердің түйіспелерінің бос тербелістерінің табиғи жиілігін сандық есептеуі келтірілген.

Түйін сөздер: серпімді жұқа иілген өзек, қисық өзек, түйіндердегі Кирхгоф шарттары, серпімділік теориясы, серпімділік теориясының теңдеуі, өзектердің қосылу моделі.

В.Е. Kanguzhin¹, Е.Н. Akanbay^{1*}, Zh. Madibaiuly²

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

²Institute of Mechanics and Mechanical Engineering

named after Academician U.A. Zholdasbekov, Almaty, Kazakhstan

*e-mail: akanbay.yerkebulan@gmail.com

Jointing of thin elastic rods and generalized Kirchhoff conditions at nodes

The paper presents various models of thin elastic curved rods and their joints. Such rods and their connections are important in applied research and have a long history. Nevertheless, the questions of mathematical research in the description of the procedure of transition from a multidimensional model to a one-dimensional one are not fully investigated. This paper presents the results when a thin object is pulled together into a one-dimensional object. In this case, various difficulties arise. For example, a more detailed consideration is required by the problem of describing the gluing conditions at the vertices of the limiting neck. It turns out that the type of specific bonding conditions depends on various physical premises. On the other hand, the unique solvability in various functional spaces depends on the selected gluing conditions. The first part of the paper describes various categories of bonding conditions. In the second part of the work, various examples of the construction of thin elastic curved rods and their joints will be given, when the ultimate task is supplemented by certain gluing conditions. In the conclusion of the second part, a numerical calculation of the natural frequencies of free vibrations of the joints of elastic thin curved rods is presented.

Key words: elastic curved thin rod, curved rod, Kirchhoff's condition in knots, theory of elasticity, equation of elasticity theory, model of rod connection.

1 Введение

1.1 Модель искривлённого стержня

На плоскости R^2 с координатами (y_1, y_2) рассмотрим плоскую фигуру ω с гладкой границей $\partial\omega$.

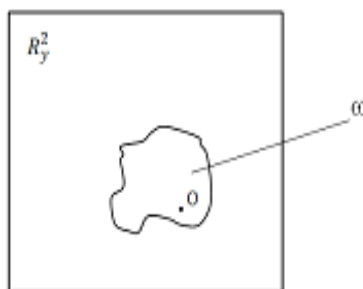


Рисунок 1 – Фиксированное сечение стержня

Причем считаем, что точки $(0, 0) \in \omega$. Пусть параметр $z \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$. Предположим, что при изменении параметра z плоская фигура $\omega(z)$ меняется непрерывно вместе с z , причем $\omega(0) = \omega$, $\omega(z) = \{(y_1(z), y_2(z)) : (y_1, y_2) \in \omega(z) \rightarrow R^2\}$. Тогда под криволинейным стержнем S будем понимать тело в трехмерном пространстве $S = \{(y_1, y_2, z) : (y_1, y_2) \in \omega(z), -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}\}$.

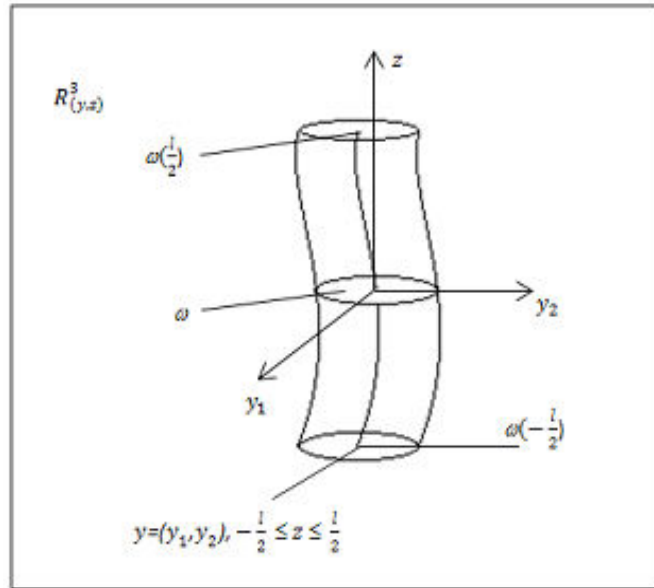


Рисунок 2 – Криволинейный стержень

При этом размеры сечения $\omega(z)$ во много раз меньше длины l . Поэтому речь идет о криволинейном стержне. Торцы стержня представляют множества

$$\left\{ \left(y_1 \left(\frac{l}{2} \right), y_2 \left(\frac{l}{2} \right), \frac{l}{2} \right) : \left(y_1 \left(\frac{l}{2} \right), y_2 \left(\frac{l}{2} \right) \right) \in \omega \left(\frac{l}{2} \right) \right\},$$

$$\left\{ \left(y_1 \left(-\frac{l}{2} \right), y_2 \left(-\frac{l}{2} \right), -\frac{l}{2} \right) : \left(y_1 \left(-\frac{l}{2} \right), y_2 \left(-\frac{l}{2} \right) \right) \in \omega \left(-\frac{l}{2} \right) \right\}.$$

Для определения оси криволинейного стержня надо детально расписать отображение $\omega \xrightarrow{P(z)} \omega(z)$. Пусть $(y_1, y_2) \in \omega$ и её образ при фиксированном z обозначим через $(P_1(z, y_1, y_2); P_2(z, y_1, y_2)) \in \omega(z)$. Тогда ось криволинейного стержня определяется так

$$\{(P_1(z, 0, 0); P_2(z, 0, 0), z) : (P_1(z), P_2(z)) \in \omega(z)\},$$

иначе говоря, ось составлена из P -образов точки $(0, 0) \in \omega$. В дальнейшем точки оси сечения $\omega(z)$ будем обозначать $(P_1(z), P_2(z))$.

1.2 Модель тонкого искривленного стержня

В дальнейшем необходимо чтобы геометрические характеристики горизонтальных сечений неограниченно убывали к нулю (то есть, сечения стягивались в точку). Для моделирования таких ситуаций введем малый параметр h . Удобно рассматривать сжатие сечений в h раз, то есть

$$\omega_h(z) = \left\{ (y_1, y_2) : \left(\frac{y_1 - P_1(z)}{h}, \frac{y_2 - P_2(z)}{h} \right) \in \omega(z) \right\}.$$

Если $h \rightarrow +0$, то $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_h(z) = \{(P_1(z), P_2(z), z)\}$. Таким образом, моделируется ситуация, когда тонкий искривленный стержень стремится к своей оси.

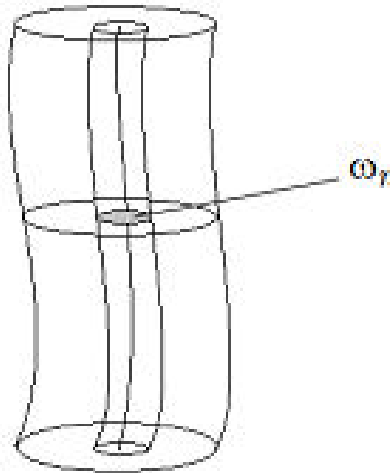


Рисунок 3 – Показано утончение стержня, когда $h \rightarrow 0$

1.3 Линейная задача теории упругости

Считаем, что задан упругий тонкий искривленный стержень. Пусть вектор смещений

$$u = \begin{pmatrix} u_1(y_1, y_2, z) \\ u_2(y_1, y_2, z) \\ u_3(y_1, y_2, z) \end{pmatrix},$$

где u_1 – смещение в направлении оси Oy_1 , u_2 – смещение в направлении оси Oy_2 , u_3 – смещение в направлении оси Oz .

Стандартным образом введем столбец деформаций и столбец напряжений

$$\varepsilon(u) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \frac{1}{\alpha} \varepsilon_{32} \\ \frac{1}{\alpha} \varepsilon_{31} \\ \frac{1}{\alpha} \varepsilon_{13} \end{bmatrix}, \quad \sigma(u) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}.$$

Согласно закону Гука имеем

$$\sigma(u) = A\varepsilon(u),$$

где

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_j}{x_k} + \frac{u_k}{x_j} \right).$$

A – симметрическая положительно определенная матрица-функция размерности 6×6 , составленная из упругих модулей материала.

Здесь для удобства выбрано $\sqrt{2}\alpha = 1$.

Для дальнейших целей удобно ввести матрицу

$$D(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \\ 0 & \alpha\xi_3 & \alpha\xi_2 \\ \alpha\xi_3 & 0 & \alpha\xi_1 \\ \alpha\xi_2 & \alpha\xi_1 & 0 \end{pmatrix},$$

а также градиент

$$\nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right),$$

где $x = (y_1, y_2, z)$.

Тогда уравнения теории упругости в матричной форме примут вид [1, 2]:

$$L(h, x, \nabla_x)u(h, x) := D(-\nabla_x)^t A(h, x)D(\nabla_x)u(h, x) = f(h, x), \quad x \in S(h), \quad (1)$$

$$B(h, x, \nabla_x)u(h, x) := D(\nu(h, x))^t A(h, x)D(\nabla_x)u(h, x) = g(h, x), \quad x \in \gamma(h), \quad (2)$$

$$u(h, x) = 0, \quad x \in \omega_h \left(\pm \frac{l}{2} \right). \quad (3)$$

В уравнениях (1) учтено, что на стержень $S(h)$ действуют объемные силы $f = (f_1, f_2, f_3)^T$. На $\gamma(h)$ боковой поверхности стержня $S(h)$ приложены усилия $g = (g_1, g_2, g_3)^T$. Торцы $\omega_h \left(\pm \frac{l}{2} \right)$ стержня $S(h)$ жестко закреплены, так как выполняются условия (3).

Отметим также, что в соотношении (2) фигурирует $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T$ внешние единичные нормали к боковой поверхности стержня $S(h)$, причем

$$\nu(h, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + h^2\nu_0^2}} (\nu_1(\eta, z); \nu_2(\eta, z); h\nu_0(\eta, z))^T. \quad (4)$$

Здесь введены η медленные переменные, принадлежащие $\omega(z)$. Иначе говоря,

$$\eta = (\eta_1, \eta_2), \quad \eta_1 = \frac{y_1}{h}, \quad \eta_2 = \frac{y_2}{h}, \quad (y_1, y_2) \in \omega_h(z).$$

Вектор $(\nu_1(\eta, z), \nu_2(\eta, z))$ – вектор внешней нормали к границе $\partial\omega(z)$. Величина ν_0 – отражает изменчивость сечения.

1.4 Предельная система уравнений

В данном пункте приведены предельные уравнения, которые следуют из (1), (2), (3) при $h \rightarrow 0$. Таким образом, трехмерная задача теории упругости сведена к одномерной задаче.

Рассмотрим изотропный тонкий искривленный стержень. Пусть λ и μ представляют коэффициенты Ламе. Матрица жесткости выбрана в виде

$$A = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Обозначим неизвестный $w_1(z)$ прогиб в направлении оси Oy_1 . Точно также $w_2(z)$ прогиб в направлении оси Oy_2 , $w_3(z)$ продольное растяжение вдоль оси Oz , $\alpha w_4(z)$ – угол закручивания вокруг этой оси. В дальнейшем $\vec{F}_3(z)$ – продольная сила, а $\alpha^{-1}\vec{F}_4(z)$ – крутящий момент приложенные к стержню. Перерезывающие силы $\vec{f}_i(z)|\omega(z)|$ при $i = 1, 2$, где $|\omega(z)|$ – площадь сечения. Изгибающие моменты при $i = 1, 2$ в нашем случае имеют вид:

$$\left\{ \langle \eta_i; f_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\omega(z)} + \langle \eta_i; g_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\partial\omega(z)} \right\}.$$

При $i = 1, 2$ обозначим $\vec{F}_i = \vec{f}_i(z)|\omega(z)| + \frac{d}{dz} \left\{ \langle \eta_i; f_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\omega(z)} + \langle \eta_i; g_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\partial\omega(z)} \right\}$. Также нам необходимы следующие величины:

$$\begin{aligned} d(z) &= \iint_{\omega(z)} \eta_1 d\eta_1 d\eta_2, & l(z) &= \iint_{\omega(z)} \eta_2 d\eta_1 d\eta_2, \\ a(z) &= \iint_{\omega(z)} \eta_1^2 d\eta_1 d\eta_2, & b(z) &= \iint_{\omega(z)} \eta_1 \eta_2 d\eta_1 d\eta_2, \\ c(z) &= \iint_{\omega(z)} \eta_2^2 d\eta_1 d\eta_2, & h(z) &= \iint_{\omega(z)} (\eta_1^2 + \eta_2^2) d\eta_1 d\eta_2. \end{aligned}$$

Тогда предельная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dz^2} \left(\mu(z) \left(a(z) \frac{d^2 w_1(z)}{dz^2} + b(z) \frac{d^2 w_2(z)}{dz^2} - d(z) \frac{dw_3(z)}{dz} \right) \right) = F_1(z), \\ \frac{d^2}{dz^2} \left(\mu(z) \left(b(z) \frac{d^2 w_1(z)}{dz^2} + c(z) \frac{d^2 w_2(z)}{dz^2} - l(z) \frac{dw_3(z)}{dz} \right) \right) = F_2(z), \\ -\frac{d}{dz} \left(\mu(z) \left(-d(z) \frac{d^2 w_1(z)}{dz^2} - l(z) \frac{d^2 w_2(z)}{dz^2} + \frac{dw_3(z)}{dz} \right) \right) = F_3(z), \\ -\frac{d}{dz} \left(\mu(z) \left(\alpha^4 h(z) \frac{dw_4}{dz} \right) \right) = F_4(z), \end{cases} \quad (5)$$

которая дополняется условиями Дирихле на концах интервала $\left(-\frac{l}{2}; \frac{l}{2}\right)$

$$w_q \left(\pm \frac{l}{2} \right) = 0, \quad q = 1, 2, 3, 4, \quad \frac{d}{dz} w_1 \left(\pm \frac{l}{2} \right) = 0, \quad \frac{d}{dz} w_2 \left(\pm \frac{l}{2} \right). \quad (6)$$

Система предельных уравнений (5) отличается от ранее известных тем, что

- (i) на прогибы $w_1(z)$ в направлении оси Oy_1 влияют $w_2(z), w_3(z)$;
- (ii) на прогибы $w_2(z)$ в направлении оси Oy_2 влияют $w_1(z), w_3(z)$;
- (iii) на прогибы $w_3(z)$ в направлении оси Oz влияют $w_1(z), w_2(z)$;

В известных до их пор работах движения при дополнительных физических предположениях обычно разделяются. Как видно, из системы (5) прогибы $w_1(z)$ и $w_2(z)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям четвертого порядка, а продольное растяжение – дифференциальному уравнению второго порядка. Процесс нахождения угла закручивания $w_4(z)$ не зависит от прогибов $w_1(z), w_2(z)$ и $w_3(z)$ и может определяться автономно. Отметим, что коэффициенты дифференциальных уравнений из (5) зависят от изменения сечений $\omega(z)$ вдоль оси Oz . На этот факт также мало внимания уделялось.

2 Материал и методы

2.1 Модель соединения стержней

В данном пункте рассмотрим соединение (объединение) нескольких тонких стержней. Обозначим $\Omega(h)$ объединение тонких стержней $S_1(h), S_2(h), \dots, S_N(h)$ и малых узлов $Q_1(h), Q_2(h), \dots, Q_M(h)$. При $h \rightarrow +0$ область $\Omega(h)$ стягивается к одномерному множеству G , называемому скелетом конструкции. Скелет G состоит из прямолинейных отрезков e_1, e_2, \dots, e_N , соединяющие пары точек из $V = \{P_1, P_2, \dots, P_M\}$. Множество G , состоящее из дуг e_1, e_2, \dots, e_N и вершин P_1, P_2, \dots, P_M , иногда называют геометрическим графом. Сохраняем обозначения пункта 1, добавляя новый индекс, означающий номер стержня. К примеру, n -ый стержень в новых обозначениях примет вид

$$S_n(h) = \left\{ x = (y^n, z^n) : z^n \in \left(-\frac{l_n}{2}, \frac{l_n}{2} \right), h^{-1} y^n \in \omega^n(z^n) \right\}.$$

Прототип узла $Q_m(h) = \{x \in R^3 : h^{-1}(x - P_m) \in Q_m(1)\}$. Множество $Q_m(1), \omega^n$ считаем фиксированными, не зависящими от параметра h .

2.2 Уравнения теории упругости

Считаем, что $\Omega(h)$ – упругое анизотропное неоднородное тело. Матричные уравнения равновесия в системе координат $x = (x_1, x_2, x_3)$ имеет вид

$$L(h, x, \nabla_x)u(h, x) = f(h, x), \quad x \in \Omega(h). \quad (7)$$

Оператор L введен при написании уравнения (1). Вектор $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ – вектор смещений, $f = (f_1, f_2, f_3)$ – объемные силы. Теперь добавим краевые условия к (7). Пусть $\Gamma(h) = \Gamma_{m_1}(h) \cup \dots \cup \Gamma_{m_j}(h)$, та часть границы $\partial Q_m(h)$ которая закреплена. При этом считаем, что $j \geq 1$. Закрепление не может отсутствовать. Вектор смещений u удовлетворяет условию Дирихле.

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma(h). \quad (8)$$

На не заземленной поверхности $\partial\Omega(h) \setminus \Gamma(h)$ тела $\Omega(h)$ задается краевое условие Неймана

$$B(h, x, \nabla_x)u(h, x) = g(h, x), \quad x \in \partial\Omega(h) \setminus \overline{\Gamma(h)}. \quad (9)$$

Оператор B определен в п. 1.3.

2.3 Предельная система уравнений в случае соединения стержней

В данном пункте будет осуществлен предельный переход при $h \rightarrow 0$. В результате система (7) переходит к уравнениям на дугах графа G , а граничные условия (8) в некоторые граничные условия в граничных вершинах графа G . Более сложный вопрос: какие условия выполняются в неграничных вершинах предельного графа? Такие условия иногда называют условиями сопряжения или склеивания. Как правило, условия склеивания представляют так называемые условия Кирхгофа. Для дифференциальных уравнений второго порядка это означает, во-первых, непрерывность в каждой неграничной вершине. Во-вторых, сохранение баланса потока. Детали об условиях склеивания можно найти в работах [3, 4]. Как замечено в работах [5–8], не всегда в пределе возникают условия Кирхгофа. Когда скорость усадки объема окрестностей стыка ниже, чем площадь поперечных сечений направляющих, может возникнуть более сложное энергетически зависимое или разделяющее условие.

В работах С.А. Назарова и А.С. Слуцкого [9, 10] отмечено, что в предельной задаче появляются алгебраические неизвестные и некоторые из уравнений проецируются на подпространства функций с нулевым средним. Кроме того, на некоторых узлах возникают нелокальные условия склеивания.

Итак, согласно предыдущим рассуждениям на e_N каждой дуге предельного графа G выполняется система дифференциальных уравнений при $n = 1, \dots, N$ и $z_n \left(-\frac{l_n}{2}, \frac{l_n}{2} \right)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dz_n^2} \left(\mu_n(z_n) \left(a_n(z_n) \frac{d^2 w_1^n(z_n)}{dz_n^2} + b_n(z_n) \frac{d^2 w_2^n(z_n)}{dz_n^2} - d_n(z_n) \frac{dw_3^n(z_n)}{dz_n} \right) \right) = F_1^n(z_n), \\ \frac{d^2}{dz_n^2} \left(\mu_n(z_n) \left(b_n(z_n) \frac{d^2 w_1^n(z_n)}{dz_n^2} + c_n(z_n) \frac{d^2 w_2^n(z_n)}{dz_n^2} - l_n(z_n) \frac{dw_3^n(z_n)}{dz_n} \right) \right) = F_2^n(z_n), \\ -\frac{d}{dz_n} \left(\mu_n(z_n) \left(-d_n(z_n) \frac{d^2 w_1^n(z_n)}{dz_n^2} - l_n(z_n) \frac{d^2 w_2^n(z_n)}{dz_n^2} + \frac{dw_3^n(z_n)}{dz_n} \right) \right) = F_3^n(z_n), \\ -\frac{d}{dz_n} \left(\mu_n(z_n) \left(\alpha^4 h_n(z_n) \frac{dw_4^n(z_n)}{dz_n} \right) \right) = F_4^n(z_n). \end{array} \right. \quad (10)$$

На тех концах стержней, где действуют условия жесткого закрепления, записываются условия Дирихле:

$$\begin{aligned} w_q^k(z_k) &= 0, \quad q = 1, 2, 3, 4, \\ \frac{d}{dz_k} w_1^n(z_k) &= 0, \quad \frac{d}{dz_k} w_2^n(z_k) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где z_k либо $(+\frac{l_n}{2})$, либо $(-\frac{l_n}{2})$.

Здесь k соответствует номерам тех стержней, концы которых закреплены согласно (8).

Теперь остается записать условия склеивания в неграничных вершинах. Положение каждой вершины P_m при $m = 1, 2, \dots, M$ характеризуется девятью числами

$$(b_1^m, b_2^m, b_3^m, b_4^m, b_5^m, b_6^m,) \text{ или } (\beta_1^m, \beta_2^m, \beta_3^m) \quad (12)$$

В частности, b_3^m и β_3^m называем смещениями узла в направлении оси z_m .

Стержни, кроме прогибов w_1^n, w_2^n , продольных растяжений w_3^n и углов закручивания w_4^n , будем также характеризировать постоянным смещением a_3^n, α_3^n в направлении оси z^n .

Когда некоторый $S(h)$ стержень соединяется с узлом $Q_m(h)$, то разрешаются следующие виды соединений:

- жесткое закрепление;
- малоподвижный узел;
- узел, подвижный в одном фиксированном направлении;
- узел, неподвижный в одном фиксированном направлении;
- подвижный узел.

В зависимости от категории закрепления в вершине соединения выполняются некоторые известные алгебраические соотношения между наборами (12) и

$$\begin{aligned} w_1^n \left(\pm \frac{l_n}{2} \right), w_2^n \left(\pm \frac{l_n}{2} \right), w_3^n \left(\pm \frac{l_n}{2} \right), w_4^n \left(\pm \frac{l_n}{2} \right), \\ \frac{d}{dz_n} w_1^n \left(\pm \frac{l_n}{2} \right), \frac{d}{dz_n} w_2^n \left(\pm \frac{l_n}{2} \right), a_3^n, \alpha_3^n. \end{aligned} \quad (13)$$

Когда же в узле $Q_m(h)$ встречаются несколько стержней $S_n(h)$, $n \in B(m) \subset \{1, 2, \dots, N\}$ также возникают алгебраические соотношения между наборами (12) и (13) при $nB(m)$. Чтобы не нагромождать статью излишними деталями скажем, что их количество и соответствующие алгебраические соотношения выбраны так, что системы (10), (11) с учетом указанных алгебраических соотношений имеет решение.

В отдельной работе приведем различные примеры соединений стержней, когда возникают различные категорий закреплений. Также вычислим собственные частоты свободных колебаний таких конструкций.

3 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проектов Министерством образования и науки Республики Казахстан (гранты № AP05131292 и № AP05131845).

Список литературы

- [1] Светлицкий В.А. Механика стержней // М.: Высшая школа. – 1987. – Т. 1, 2.
- [2] Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. – М.: Наука, 1971.
- [3] Kanguzhin B., Zhapsarbaeva L., Madibaiuly Zh. Lagrange formula for differential operators self-adjoint restrictions of the maximal operator on a tree // Eurasian Math. J. – 2019. – 10:1. – Pp. 16-29.
- [4] Жапсарбаева Л.К., Кангузин Б.Е., Кобыркулжаева М.Н. Самосопряженные сужения максимального оператора на графе // Уфимск. матем. Журн. – 2017. – 9:4. – С. 36-44
- [5] Kuchment P. Graph models of wave propagation in this structures // Waves in Random Media. – 2002. – Vol. 12. – Pp 1-24.
- [6] Kuchment P., Zeng H. Convergence of spectra of mesoscopic systems collapsing onto a graph // J. Math. Anal. Appl. – 2001. – 258. – Pp. 671-700.
- [7] Exner P., Post O. Convergence of spectra of graph – like thin manifolds // J. Geom. Phys. – 2005. – 54. – Pp. 77-115.
- [8] Post O. Spectral Analysis on Graph-like Spaces. – Lecture Notes in Mathematics 2039. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. – P. 431.
- [9] Назаров С.А. Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7, №5. – С. 1-92.
- [10] Назаров С.А., Слуцкий А.С. Одномерные уравнения деформации тонких слабоискривленных стержней. Асимптотический анализ и обоснование. // Известия РАН. сер. матем. – 2000. – Т. 64, №3. – С. 97-131.
- [11] Molchanov S., Vainberg B. Scattering solutions in networks of thin fibers: Small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. – 2007. – 273, No. 2. – Pp. 533-559.

References

- [1] Svetlickii V.A., *Mehanika stержnei* [Rod mechanics] V. 1, 2. (M.: Vyschayz shkola, 1987).
- [2] Leckhnickii S.G., *Kruchenie anizotropnyh I neodnorodnyh stержnei* [Torsion of anisotropic and heterogeneous rods] (M.: Nauka, 1971).
- [3] Kanguzhin B., Zhapsarbaeva L., Madibaiuly Zh., "Lagrange formula for differential operators self-adjoint restrictions of the maximal operator on a tree", *Eurasian Math. J.*, 10:1 (2019): 16-29.

- [4] Zhapsarbaeva L.K., Kanguzhin B.E., Konyrkulzhayeva M.N., "Self-adjoint restrictions of maximal operator on graph", *Ufa. Math. J.*, 9:4 (2017): 35-43.
- [5] Kuchment P., "Graph models of wave propagation in this structures", *Waves in Random Media*, Vol. 12 (2002): 1-24.
- [6] Kuchment P., Zeng H., "Convergence of spectra of mesoscopic systems collapsing onto a graph", *J. Math. Anal. Appl.* 258 (2001): 671-700.
- [7] Exner P., Post O., "Convergence of spectra of graph - like thin manifolds", *J. Geom. Phys.* 54 (2005): 77-115.
- [8] Post O., *Spectral Analysis on Graph-like Spaces* (Lecture Notes in Mathematics 2039. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012): 431.
- [9] Nazarov S.A., "Obshaya schema osredneniya samosopryazhennykh ellipticheskikh system v mnogomernykh oblostyakh, v tom chisel [General scheme of averaging of self-adjoint elliptic systems in multidimensional areas, including thin ones]", *Algebra i analiz* V. 7, No 5 (1995): 1-92.
- [10] Nazarov S.A., Sluckii A.S., "Odnomernye uravneniya deformacii tonkih slaboiskrivlennykh sterzhnei. Asimptoticheskii analiz I obosnovanie. [One-dimensional equations of deformation of thin slightly curved rods. Asymptotic analysis and justification]", *Izvestiya RAN. ser. matem.* V. 64, No 3 (2000): 97-131.
- [11] Molchanov S., Vainberg B., "Scattering solutions in networks of thin fibers: Small diameter asymptotics", *Comm. Math. Phys.* 273, No. 2 (2007): 533-559.