

MPHTI 27.41.19

DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.09>**Д.Р. Байгереев¹, Н.М. Темирбеков^{2*}, Д.А. Омариева³**¹Восточно-Казахстанский государственный университет им. С. Аманжолова,
г. Усть-Каменогорск, Казахстан²Национальная инженерная академия РК, г. Алматы, Казахстан³Восточно-Казахстанский государственный технический университет
им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан*e-mail: temirbekov@rambler.ru

ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Данная статья посвящена построению и исследованию конечно-элементного метода решения двумерного нелинейного уравнения эллиптического типа. Уравнения данного типа возникают при решении многих прикладных задач, включая задачи теории многофазной фильтрации, теории полупроводниковых приборов и многих других. Актуальность исследования данной проблемы связана с необходимостью разработки эффективных параллельных методов решения указанной задачи. Для дискретизации уравнения используется смешанный метод конечных элементов с элементами Brezzi-Douglas-Marini. Исследован вопрос о сходимости конечно-элементного метода. Для линеаризации уравнения построен итерационный метод Пикара. В работе использовано два класса базисных функций конечных элементов. Проведен сравнительный анализ эффективности нескольких прямых и итерационных методов решения полученной системы линейных алгебраических уравнений, включая метод, основанный на LDLt-факторизации Bunch-Kaufman, метод минимальных невязок, симметричный LQ-метод, стабилизированный метод бисопряженных градиентов, и ряд других итерационных алгоритмов подпространства Крылова с предобуславливателями на основе неполного LU-разложения. Метод апробирован на нескольких модельных задачах посредством сравнения приближенного решения задачи с известным точным решением. Представлены результаты анализа погрешности метода в различных нормах в зависимости от диаметра сетки.

Ключевые слова: смешанный метод конечных элементов; нелинейное уравнение Пуассона; априорная оценка; итерационный метод; элементы Brezzi-Douglas-Marini

Д.Р. Байгереев¹, Н.М. Темирбеков^{2*}, Д.А. Омариева³¹С. Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік университеті, Өскемен қ., Қазақстан²Қазақстан Республикасының Ұлттық инженерлік академиясы, Алматы қ., Қазақстан³Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік техникалық университеті,
Өскемен қ., Қазақстан*e-mail: temirbekov@rambler.ru

Аралас ақырлы элементтер әдісінің негізінде эллиптикалық типтегі сызықты емес теңдеуді шешудің итерациялық әдісін құру

Бұл мақала эллиптикалық типтегі екі өлшемді сызықты емес теңдеуді шешудің ақырлы элементті әдісін құруға және зерттеуге арналған. Бұл типтегі теңдеулер көпфазалы фильтрация теориясының, жартылай өткізгіш аспаптар теориясының және басқа да көптеген есептерді шешуде пайда болады. Бұл мәселені зерттеудің өзектілігі осы есепті шешудің тиімді параллельді әдістерін құру қажеттілігімен байланысты. Теңдеуді дискретизациялау үшін Brezzi-Douglas-Marini элементті аралас ақырлы элементтер әдісі қолданылды. Ақырлы элементті әдістің жинақтылығы мәселесі зерттеледі. Теңдеуді сызықты түрге келтіру үшін

Пикар итерациялық әдісі пайдаланған. Жұмыста ақырлы элементтер әдісі базистік функциясының екі класы пайдаланылды. Алынған сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешудің бірнеше тура және итерациялық әдістерінің тиімділігіне салыстырмалы талдау жүргізілді, соның ішінде, Bunch-Kaufman LDLt-факторизациясына негізделген әдіс, ең кіші қиыспаушылық әдісі, симметриялы LQ-әдісі, стабилизацияланған би-түйіндес градиенттер әдісі және толық емес LU-жіктелуге негізделген көмекші әдістері пайдаланған Крылов ішкі кеңістіктері итерациялық алгоритмдері. Жұық және белгілі дәл шешімді салыстыру арқылы әдіс бірнеше модельдік есептерде сынақтан өткізілді. Тор диаметрінен тәуелді әр түрлі нормалардағы әдіс қателігін талдау нәтижелері келтірілген.

Түйін сөздер: аралас ақырлы элементтер әдісі; сызықты емес Пуассон теңдеуі; априорлық бағалау; итерациялық әдіс; Brezzi-Douglas-Marini элементтері

D.R. Baigereyev¹, N.M. Temirbekov^{2*}, D.A. Omariyeva³

¹S. Amanzholov East Kazakhstan State University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

²National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan

³D. Serikbayev East Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

*e-mail: temirbekov@rambler.ru

Construction of an iterative method for solving a nonlinear elliptic equation based on a mixed finite element method

This article is devoted to the construction and study of the finite element method for solving a two-dimensional nonlinear equation of elliptic type. Equations of this type arise in solving many applied problems, including problems of the theory of multiphase filtering, the theory of semiconductor devices, and many others. The relevance of the study of this problem is associated with the need to develop effective parallel methods for solving this problem. To discretize the equation, a mixed finite element method with Brezzi-Douglas-Marini elements is used. The issue of the convergence of the finite element method is investigated. To linearize the equation, the Picard iterative method is constructed. Two classes of basis functions of finite elements are used in the paper. A comparative analysis of the effectiveness of several direct and iterative methods for solving the resulting system of linear algebraic equations is carried out, including the method based on the Bunch-Kaufman LDLt factorization, the method of minimal residuals, the symmetric LQ method, the stabilized biconjugate gradient method, and a number of other iterative Krylov subspace algorithms with preconditioners based on incomplete LU decomposition. The method has been tested on several model problems by comparing an approximate solution with a known exact solution. The results of the analysis of the method error in various norms depending on the diameter of the mesh are presented.

Key words: mixed finite element method; nonlinear Poisson equation; a priori estimate; iterative method; Brezzi-Douglas-Marini elements.

1 Введение

Нелинейные уравнения эллиптического типа возникают при решении многих прикладных задач. Уравнения данного типа используются при моделировании электростатической плазмы, в теории полупроводниковых приборов, в задачах определения электрического потенциала в бесстолкновительных тангенциальных разрывах замагниченной плазмы и многих других. Кроме того, одним из важных примеров, приводящих к решению уравнения данного типа, являются различные обобщения закона Дарси, используемого при моделировании движения многофазной жидкости в пористой среде.

При исследовании уравнений данного типа, авторы статьи мотивированы решением задачи двухфазной неравновесной фильтрации в более общем случае, когда пористость среды может явно зависеть от давления. Это превращает классические уравнения

фильтрации в систему уравнений, включающую нелинейное уравнение Пуассона. Данное обобщение изучалось, например, в [1].

Целью настоящей работы является построение и исследование конечно-элементного метода решения двумерного нелинейного уравнения Пуассона. При дискретизации рассматриваемого уравнения используется смешанный метод конечных элементов с элементами Brezzi-Douglas-Marini. В работе получена априорная оценка решения, из которой следует сходимостъ конечно-элементного метода. Для линеаризации уравнения используется итерационный метод. Кроме того, приведен сравнительный анализ эффективности двенадцати прямых и итерационных методов решения систем линейных уравнений, полученных в результате выполнения итерации. В заключение приводятся результаты решения нескольких модельных задач с использованием построенного метода.

2 Обзор литературы

Смешанный метод конечных элементов является одним из широко используемых методов решения уравнений эллиптического типа. Суть данного метода заключается в снижении порядка заданного уравнения посредством введения новых переменных. В большинстве случаев данные переменные имеют некоторый физический смысл, так как они связаны с производными искомых функций. Построению конечно-элементных методов решения нелинейных уравнений эллиптического типа посвящено множество исследований. Например, в работе [2] построен конечно-элементный метод решения уравнения Пуассона с нелинейной правой частью в единичном круге. Известны применения смешанного метода конечных элементов [3] для решения задач двухфазной фильтрации [4], уравнений Стокса [5], задач электроэнцефалографии [6] и других.

Применение смешанного метода конечных элементов приводит к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Одним из простейших методов линеаризации полученной задачи является итерационный метод Пикара. Известны применения данного метода при реализации модели Дарси-Форхгеймера [7], при решении задач поропругости [8], при решении уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости [9], нелинейного уравнения Ричардса [10, 11], задачи фильтрации с модифицированным законом Дарси [12], задачи фильтрации с пористостью, зависящей от давления [1], системы уравнений диффузии-реакции [13], модели мелкой воды [14]. Известны также многочисленные модификации метода Пикара для улучшения свойств сходимости, например, в задачах моделирования инфильтрации в сухую почву [15], уравнения Ричардса [16] и другие.

Ряд работ посвящены исследованию производительности алгоритмов решения системы линейных алгебраических уравнений. Например, работа [17] посвящена исследованию производительности алгоритмов Bunch-Kaufman, Aasen решения указанных систем уравнений. В [18–21] и в ряде других работ исследуются итерационные методы подпространства Крылова для решения данных систем.

3 Материал и методы

3.1 Постановка задачи

В ограниченной выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, рассматривается задача

$$-\nabla \cdot (\alpha^{-1}(p) \nabla p) + b(x, p) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$-\nabla p \cdot \vec{n} = g_N, \quad x \in \Gamma_N, \quad (2)$$

$$p = g_D, \quad x \in \Gamma_D, \quad (3)$$

где p – функция, подлежащая определению, \vec{n} – внешняя единичная нормаль к границе. Предположим, что

$$0 < c_0 \leq \alpha(x) \leq c_1, \quad \frac{d\alpha}{dp}, \frac{\partial b}{\partial p} \in L^\infty(\Omega), \quad (4)$$

$$f \in L^2(\Omega), \quad g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D), \quad g_N \in L^2(\Gamma_N). \quad (5)$$

Определим функциональные пространства

$$H(\operatorname{div}; \Omega) = \{ \vec{\tau} \in L^2(\Omega)^2 : \nabla \cdot \vec{\tau} \in L^2(\Omega) \},$$

$$V = \{ \vec{\tau} \in H(\operatorname{div}; \Omega) : \vec{\tau} \cdot \vec{n} = g_N \text{ на } \Gamma_N \}.$$

Представим уравнение (1) в виде

$$\begin{cases} \alpha(p) \vec{u} + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \vec{u} + b(x, p) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Предположим, что $\vec{u} \in L^2(\Omega)^2$. Умножая первое уравнение системы (6) на $\vec{\tau} \in V$, а второе – на $v \in L^2(\Omega)$, с учетом граничных условий (2), (3) получим следующую слабую постановку задачи (1)-(3):

$$\begin{cases} (\alpha(p) \vec{u}, \vec{\tau}) - (\nabla \cdot \vec{\tau}, p) = -(\vec{\tau} \cdot \vec{n}, g_D)_{\Gamma_D}, & \forall \vec{\tau} \in V, \\ (\nabla \cdot \vec{u}, v) + (b(x, p), v) = 0, & \forall v \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (7)$$

3.2 Смешанный метод конечных элементов

В области Ω введем триангуляцию \mathcal{T} . Для каждого элемента $K \in \mathcal{T}$ обозначим через $P_k(K)$ пространство многочленов на K со степенью меньше или равно k . Определим пространство конечных элементов BDM_1 в виде

$$\operatorname{BDM}_1 = \left\{ \vec{\tau} : \vec{\tau}|_K \in P_1(K)^2 \quad \forall K \in \mathcal{T} \right\}$$

и пусть

$$V_h = \operatorname{BDM}_1 \cap V.$$

Определим пространство кусочно-постоянных функций W_h в виде

$$W_h = \left\{ v : v \Big|_K \in P_0(K) \quad \forall K \in \mathcal{T} \right\}.$$

Пусть \mathcal{T}_N – одномерная сетка, порожденная триангуляцией \mathcal{T} на границе Γ_N . Определим пространство

$$P_1(\mathcal{T}_N) = \left\{ v : v \Big|_E \in P_1(E) \quad \forall E \in \mathcal{T}_N \right\}.$$

Пусть $g_{N,h}$ – это L^2 -проекция граничного значения g_N на $P_1(\mathcal{T}_N)$.

Тогда смешанный метод конечных элементов $\text{BDM}_1 - W_h$ заключается в нахождении $(\vec{u}_h, p_h) \in \text{BDM}_1 \times W_h$ с условием $\vec{u}_h \cdot \vec{n} = g_{N,h}$ на Γ_N таких, что

$$\begin{cases} (\alpha(p_h) \vec{u}_h, \vec{\tau}) - (\nabla \cdot \vec{\tau}, p_h) = -(\vec{\tau} \cdot \vec{n}, g_D)_{\Gamma_D}, & \forall \vec{\tau} \in V_h, \\ (\nabla \cdot \vec{u}_h, v) + (b(x, p_h), v) = 0, & \forall v \in W_h. \end{cases} \quad (8)$$

Существуют операторы проекции [22]

$$\Pi_h : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow V_h, \quad P_h : L^2(\Omega) \rightarrow W_h,$$

такие что

$$(\nabla \cdot \Pi_h \vec{u}, v) = (P_h \nabla \cdot \vec{u}, v), \quad \forall \vec{u} \in H(\text{div}; \Omega), \quad \forall v \in W_h. \quad (9)$$

Кроме того, выполняются следующие оценки [22]:

$$\|\vec{u} - \Pi_h \vec{u}\| \leq c_3 h^{k+1} |\vec{u}|_k, \quad \vec{u} \in H^{k+1},$$

$$\|\nabla \cdot (\vec{u} - \Pi_h \vec{u})\|^2 \leq c_3 h^k |\nabla \cdot \vec{u}|_k,$$

$$\|v - P_h v\| \leq c_4 h^k |v|_k.$$

Известно, что для элементов Brezzi-Douglas-Marini $k = 1$. Здесь и ниже используются стандартные обозначения из работы [23].

Лемма 1 [23]. Пусть $v \in W_h$. Тогда существует $\vec{\tau} \in V_h$ такое, что

$$\nabla \cdot \vec{\tau} = v, \quad \|\vec{\tau}\| \leq c_5 \|v\|.$$

Теорема 1 При выполнении условий (4)-(5) и условия $\|\vec{u}\| \leq u_0$, $u_0 = \min \left\{ \sqrt{c_1}, \frac{3}{16} \right\}$, существует постоянная $\nu_1 > 0$ такая, что выполняется неравенство

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|^2 + \|p - p_h\|^2 \leq \nu_1 (\|\vec{u} - \Pi_h \vec{u}\|^2 + \|p - P_h p\|^2). \quad (10)$$

Доказательство. Обозначим $\vec{\xi} = \vec{u} - \vec{u}_h$, $\eta = p - p_h$. Вычитая (8) из (7), после несложных преобразований получим уравнения для погрешности:

$$\left(\alpha(p_h) \vec{\xi}, \vec{\tau} \right) + ((\alpha(p) - \alpha(p_h)) \vec{u}, \vec{\tau}) - (\nabla \cdot \vec{\tau}, \eta) = 0, \quad \forall \vec{\tau} \in V_h, \quad (11)$$

$$\left(\nabla \cdot \vec{\xi}, v \right) + (b(x, p) - b(x, p_h), v) = 0, \quad \forall v \in W_h. \quad (12)$$

Положим $\vec{\tau} = \Pi_h \vec{\xi}$ в уравнении (11) и $v = P_h \eta$ в уравнении (12), и сложим полученные уравнения:

$$\begin{aligned} & \left(\alpha(p_h) \vec{\xi}, \Pi_h \vec{\xi} \right) + \left((\alpha(p) - \alpha(p_h)) \vec{u}, \Pi_h \vec{\xi} \right) - \\ & - \left(\nabla \cdot \Pi_h \vec{\xi}, \eta \right) + \left(\nabla \cdot \vec{\xi}, P_h \eta \right) + (b(x, p) - b(x, p_h), P_h \eta) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу условия (9) третье и четвертое слагаемые в левой части (13) уничтожаются. Представим уравнение (13) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left(\alpha(p_h) \vec{\xi}, \vec{\xi} \right) - \left(\alpha(p_h) \vec{\xi}, \vec{u} - \Pi_h \vec{u} \right) + \\ & + \left((\alpha(p) - \alpha(p_h)) \vec{u}, \vec{\xi} \right) - \left((\alpha(p) - \alpha(p_h)) \vec{u}, \vec{u} - \Pi_h \vec{u} \right) + \\ & + (b(x, p) - b(x, p_h), \eta) - (b(x, p) - b(x, p_h), p - P_h p) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Оценив скалярные произведения в тождестве (14), используя неравенство Коши с ε и условия (4), получим

$$\begin{aligned} & (c_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \|\vec{u}\|^2) \|\vec{\xi}\|^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\alpha(p) - \alpha(p_h)\|^2 + \\ & + \left(c_1 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \right) \|\eta\|^2 + C (\|\vec{u} - \Pi_h \vec{u}\|^2 + \|p - P_h p\|^2). \end{aligned}$$

Выбирая $\varepsilon_1 = \frac{c_0}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{c_0}{2c_1}$, получим, что при выполнении условия $\|\vec{u}\| < \sqrt{c_1}$ выполняется неравенство

$$\|\vec{\xi}\|^2 \leq 3\gamma \|\eta\|^2 + C (\|\vec{u} - \Pi_h \vec{u}\|^2 + \|p - P_h p\|^2), \quad (15)$$

где $\gamma = \max \left\{ \frac{c_1^2}{c_0}, \frac{c_1}{2c_0}, c_1 \right\}$. Представим теперь уравнение (11) в виде

$$\left(\nabla \cdot \vec{\tau}, \eta \right) = \left(\alpha(p_h) \vec{\xi}, \vec{\tau} \right) + \left((\alpha(p) - \alpha(p_h)) \vec{u}, \vec{\tau} \right),$$

откуда

$$\left(\nabla \cdot \vec{\tau}, \eta \right) \leq c_1 \|\vec{\xi}\| \|\vec{\tau}\| + \|\alpha(p) - \alpha(p_h)\| \|\vec{u}\| \|\vec{\tau}\|. \quad (16)$$

Выберем в (16) $\vec{\tau}$, такое что $\nabla \cdot \vec{\tau} = P_h \eta$. Согласно лемме 1, для выбранного $\vec{\tau}$ выполняется оценка $\|\vec{\tau}\| < c_5 \|P_h \eta\|$. В целях упрощения выкладок предположим, что $c_5 = (2c_1)^{-1}$. Тогда из (16) имеем

$$(P_h \eta, \eta) \leq \frac{1}{2} \left(\|\vec{\xi}\| + \|\eta\| \|\vec{u}\| \right) \|P_h \eta\|. \quad (17)$$

Преобразуем левую часть неравенства (17):

$$(P_h \eta, \eta) = \|\eta\|^2 - (p - P_h p, \eta), \quad (18)$$

причем для последнего слагаемого в правой части этого равенства справедлива оценка

$$(p - P_h p, \eta) \leq \frac{1}{4\varepsilon_3} \|\eta\|^2 + C \|p - P_h p\|^2. \quad (19)$$

Обозначим правую часть неравенства (17) через λ , тогда справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \frac{1}{2} \left(\|\xi^\top\| + \|\eta\| \|\vec{u}\| \right) \|\eta - (p - P_h p)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\|\xi^\top\| + \|\eta\| \|\vec{u}\| \right) (\|\eta\| + \|p - P_h p\|) \leq \\ &\leq 2\varepsilon_4 \|\xi^\top\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta\|^2 + \|\eta\|^2 \|\vec{u}\| + C \|p - P_h p\|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя полученные неравенства (18)-(20), из (17) получим

$$\left(\frac{1}{4} - \|\vec{u}\| \right) \|\eta\|^2 \leq 2\varepsilon_4 \|\xi^\top\|^2 + C \|p - P_h p\|^2. \quad (21)$$

Умножим (15) на некоторое малое число $\nu > 0$ и сложим его с неравенством (21):

$$(\nu - 2\varepsilon_4) \|\xi^\top\|^2 + \left(\frac{1}{4} - 3\gamma\nu - \|\vec{u}\| \right) \|\eta\|^2 \leq C (\|\vec{u} - \Pi_h \vec{u}\|^2 + \|p - P_h p\|^2).$$

Выбирая $\nu = \frac{1}{48\gamma}$, $\varepsilon_4 = \frac{1}{192\gamma}$, получим, что при выполнении условия $\|\vec{u}\| \leq u_0 = \min \left\{ \sqrt{c_1}, \frac{3}{16} \right\}$, выполняется оценка (10). Теорема доказана.

3.3 Реализация метода

Для реализации метода (6) рассмотрим следующий итерационный процесс: найти $\vec{u}_h^{n+1} \in V_h$, $p_h^{n+1} \in W_h$ с начальным приближением $p_h^0 \in W_h$, такие что

$$\begin{cases} (\alpha(p_h^n) \vec{u}_h^{n+1}, \vec{\tau}) - (\nabla \cdot \vec{\tau}, p_h^{n+1}) = -(\vec{\tau} \cdot \vec{n}, g_D)_{\Gamma_D}, & \forall \vec{\tau} \in V_h, \\ (\nabla \cdot \vec{u}_h^{n+1}, v) + (b(x, p_h^n), v) = 0, & \forall v \in W_h. \end{cases} \quad (22)$$

Пусть N_e и N_n – количество элементов и узлов триангуляции \mathcal{T} ; N_r – количество ребер; N_{rc} – количество внутренних ребер; N_{rd} и N_{rn} – количество ребер, соответствующих Γ_D и Γ_N . Обозначим $M = N_{rc} + N_{rd}$.

Пусть λ_i – линейные конечно-элементные базисные функции вершины v_i , равные единице при $i = j$ и нулю при $i \neq j$. Для ребра $E_j = (v_s, v_t)$, где $s < t$, $j = \overline{1, N_r}$ рассмотрено два класса базисных функций:

$$\vec{\phi}_j = \left(\lambda_s \frac{\partial \lambda_t}{\partial x_2} \quad -\lambda_s \frac{\partial \lambda_t}{\partial x_1} \right)^\top, \quad \vec{\psi}_j = \left(-\lambda_t \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_2} \quad \lambda_t \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_1} \right)^\top \quad (23)$$

и

$$\vec{\phi}_j = \left(\lambda_s \frac{\partial \lambda_t}{\partial x_2} - \lambda_t \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_2} \quad - \lambda_s \frac{\partial \lambda_t}{\partial x_1} - \lambda_t \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_1} \right)^\top, \quad (24)$$

$$\vec{\psi}_j = \left(\lambda_s \frac{\partial \lambda_t}{\partial x_2} + \lambda_t \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_2} \quad - \lambda_s \frac{\partial \lambda_t}{\partial x_1} - \lambda_t \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_1} \right)^\top. \quad (25)$$

Пусть V_h – линейная оболочка векторов $\vec{\phi}_j, \vec{\psi}_j, j = \overline{1, M}$. Базис пространства P_0 на элементе $K_j \in \mathcal{T}$ определим в виде

$$1_j = \{1, x \in K_j; 0, x \notin K_j\}. \quad (26)$$

Решение $(\bar{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in \text{BDM}_1 \times W_h$ задачи (22) будем искать в виде

$$\bar{u}_h^{n+1} = \bar{u}_0^{n+1} + \bar{u}_N^{n+1}, \quad \bar{u}_0^{n+1} = \sum_{j=1}^M \left(u_j^{n+1} \vec{\phi}_j + u_{N_r+j}^{n+1} \vec{\psi}_j \right),$$

$$\bar{u}_N^{n+1} = \sum_{j=M+1}^{N_r} \left(u_j^{n+1} \vec{\phi}_j + u_{N_r+j}^{n+1} \vec{\psi}_j \right), \quad p_h^{n+1} = \sum_{k=1}^{N_e} p_k^{n+1} 1_k.$$

Тогда решение задачи (22) сводится к решению системы линейных уравнений

$$AX = B, \quad (27)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} R(p_h^n) & S^T(p_h^{n+1}) \\ S(p_h^{n+1}) & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} F \\ G(p^n) \end{pmatrix}$$

с элементами

$$R_{i,j} = \left(\alpha(p_h^n) \vec{\phi}_i, \vec{\phi}_j \right), \quad R_{i,j+M} = \left(\alpha(p_h^n) \vec{\phi}_i, \vec{\psi}_j \right), \quad R_{i+M,j} = \left(\alpha(p_h^n) \vec{\psi}_i, \vec{\phi}_j \right),$$

$$R_{i+M,j+M} = \left(\alpha(p_h^n) \vec{\psi}_i, \vec{\psi}_j \right), \quad S_{m,j} = - \left(\nabla \cdot \vec{\phi}_j, 1_m \right), \quad S_{m,j+M} = - \left(\nabla \cdot \vec{\psi}_j, 1_m \right),$$

$$F_i = - \left(\vec{\phi}_i \cdot \vec{n}, g_D \right)_{\Gamma_D} - \sum_{j=M+1}^{N_r} \left(\alpha(p_h^n) \vec{\phi}_i, \vec{\phi}_j \right) u_j - \sum_{j=M+1}^{N_r} \left(\alpha(p_h^n) \vec{\phi}_i, \vec{\psi}_j \right) u_{N_r+j},$$

$$F_{M+i} = - \left(\vec{\psi}_i \cdot \vec{n}, g_D \right)_{\Gamma_D} - \sum_{j=M+1}^{N_r} \left(\alpha(p_h^n) \vec{\psi}_i, \vec{\phi}_j \right) u_j - \sum_{j=M+1}^{N_r} \left(\alpha(p_h^n) \vec{\psi}_i, \vec{\psi}_j \right) u_{N_r+j},$$

$$G_m = - \left(b(x, p_h^n), 1_m \right) + \sum_{j=M+1}^{N_r} \left(\nabla \cdot \vec{\phi}_j, 1_m \right) u_j + \sum_{j=M+1}^{N_r} \left(\nabla \cdot \vec{\psi}_j, 1_m \right) u_{N_r+j},$$

где $i = \overline{1, M}, j = \overline{1, M}, m = \overline{1, N_e}$.

При использовании базисных функций (23), (26) матрица полученной системы линейных уравнений является сильно разреженной, симметричной, но не положительно определенной. При решении систем уравнений проведено сравнение как прямых, так и итерационных методов. Рассмотрен один из широко применяемых прямых методов, основанный на блочной LDL^T -факторизации Bunch-Кaufman матрицы A [17]. Алгоритм LSS основан на приведении системы (27) к нормальному виду и определении решения в виде $X = Z^{-1}A^TB$, где Z – разложение Холецкого матрицы A^TA . Также проведены сравнительные расчеты с использованием LU- и QR-разложений матрицы A . Из итерационных методов, используемых для решения указанных систем, выбраны методы подпространства Крылова: метод минимальных невязок MINRES, симметричный LQ-метод SYMMLQ и метод MINRES_QLP [20]. При выборе базисных функций (24), (25), (26) проведены сравнительные расчеты с использованием итерационных алгоритмов подпространства Крылова: метода обобщенных минимальных невязок GMRES и стабилизированного метода бисопряженных градиентов BiCGSTAB с предобуславливателем на основе неполного LU-разложения (ILU), а также метода квазимиимальных невязок QMR.

4 Результаты и обсуждение

Задача 1 В области $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ рассмотрим задачу

$$-\nabla^2 p + \sin p = 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y + \sin(\sin \pi x \sin \pi y),$$

$$p(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Точное решение задачи имеет вид $p(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y$. В качестве начального приближения для итерационного процесса (22) принималось значение $p_h^0(x, y) \equiv 0$. Итерационный процесс (22) прерывался при достижении условия $\max_{(x,y) \in \Omega} |p^{n+1}(x, y) - p^n(x, y)| \leq 10^{-9}$. Для достижения указанной точности в задаче 1 потребовалось 8 итераций. При решении системы (27) итерационными методами итерации прерывались также при достижении точности вычислений 10^{-9} .

Вычисления проводились на компьютере с 16-ядерным процессором Intel Xeon Silver 4114 с тактовой частотой 2.20GHz и 16 ГБ ОЗУ. Программная реализация всех алгоритмов выполнена на высокопроизводительном языке программирования Julia 1.4. В таблице 1 приведено среднее время, требуемое для решения одной системы линейных уравнений, полученной в результате выполнения одной итерации (22) для задачи 1. В верхней части таблицы указано количество конечных элементов в триангуляции \mathcal{T} , а в скобках – порядок полученной матрицы A в системе уравнений (27).

При выборе базисных функций (23), (26) среди прямых алгоритмов решения систем уравнений, полученных в результате выполнения одной итерации (22), наиболее эффективным оказался метод, основанный на блочной LDL^T -факторизации. В проведенных вычислительных экспериментах данный метод в 2-7 раз быстрее метода, основанного на LU-разложении матрицы A . Время решения методами LU и LSS приблизительно одинаково. В случае использования итерационных методов решения систем уравнений с симметричными матрицами был сделан вывод о том, что их

Таблица 1 – Среднее время, требуемое для решения одной системы линейных уравнений (27), полученной на каждой итерации (22) для задачи 1

Кол-во элементов (порядок матрицы A)	240 (1000)	952 (3888)	3794 (15336)	13310 (53540)	23876 (95904)	94866 (380264)
LU	0.008263	0.044378	0.208568	0.929519	1.779640	8.639593
LDL^T	0.001723	0.007856	0.046304	0.238556	0.499912	3.533542
LSS	0.008613	0.034221	0.155291	0.732447	1.364804	6.070330
QR	0.008126	0.044694	0.307129	1.319913	2.670939	14.830321
MINRES	0.006706	0.047629	0.449639	2.254344	4.735099	-
SYMMLQ	0.007526	0.047523	0.545891	2.603830	5.950467	-
MINRES_QLP	0.008730	0.062018	0.644768	3.511768	7.955948	63.602122
GMRES	0.013171	0.051916	0.280170	0.870254	1.506857	5.817282
GMRES (с ILU)	0.004115	0.025696	0.132673	0.409161	0.734324	3.004526
BiCGSTAB	0.020512	0.152302	1.514378	11.453303	29.096294	311.359211
BiCGSTAB (с ILU)	0.003433	0.013494	0.079570	0.496996	1.241327	9.601691
QMR	0.015429	0.117047	1.402647	7.627819	17.366689	84.799472

использование в методе (22) с базисными функциями вида (23), (26) эффективно лишь при небольших матрицах A . Кроме того, в ряде вычислительных экспериментов данные методы не достигли указанной точности 10^{-9} .

При выборе базисных функций (24), (25), (26) наиболее эффективным оказался метод GMRES с предобуславливателем на основе неполной LU-факторизации. С увеличением количества конечных элементов его эффективность соизмерима с методом LDL^T . Стабилизированный метод бисопряженных градиентов без использования предобуславливателей сходится довольно медленно. Однако с использованием предобуславливателя на основе неполной LU-факторизации его эффективность соизмерима с методом GMRES с ILU при небольших матрицах.

Следует отметить, что использование прямого метода LDL^T и итерационного метода GMRES к решению задачи 1 приводят к приблизительно одинаковой эффективности по времени. Однако в случае больших матриц использование последнего целесообразнее, так как в случае 94866 элементов для реализации LDL^T потребовалось 762.263 Мб ОЗУ, а для метода GMRES с предобуславливателем ILU – лишь 17.469 Мб ОЗУ.

В таблице 2 и рисунке 1 приведен сравнительный анализ времени, требуемого на решение задачи 1 с учетом выполнения всех итераций и времени, требуемого на вычисление элементов матрицы A и вектора B .

В таблице 3 приведен анализ погрешности метода (22) в зависимости от количества элементов. Данные результаты получены с использованием прямого метода LDL^T , однако в случае использования других методов результаты отличаются незначительно. Погрешности определялись по формуле

$$\|p - p_h\|_{L_\infty} = \max_{K \in \mathcal{T}} |p(\theta_K) - p_h(\theta_K)|,$$

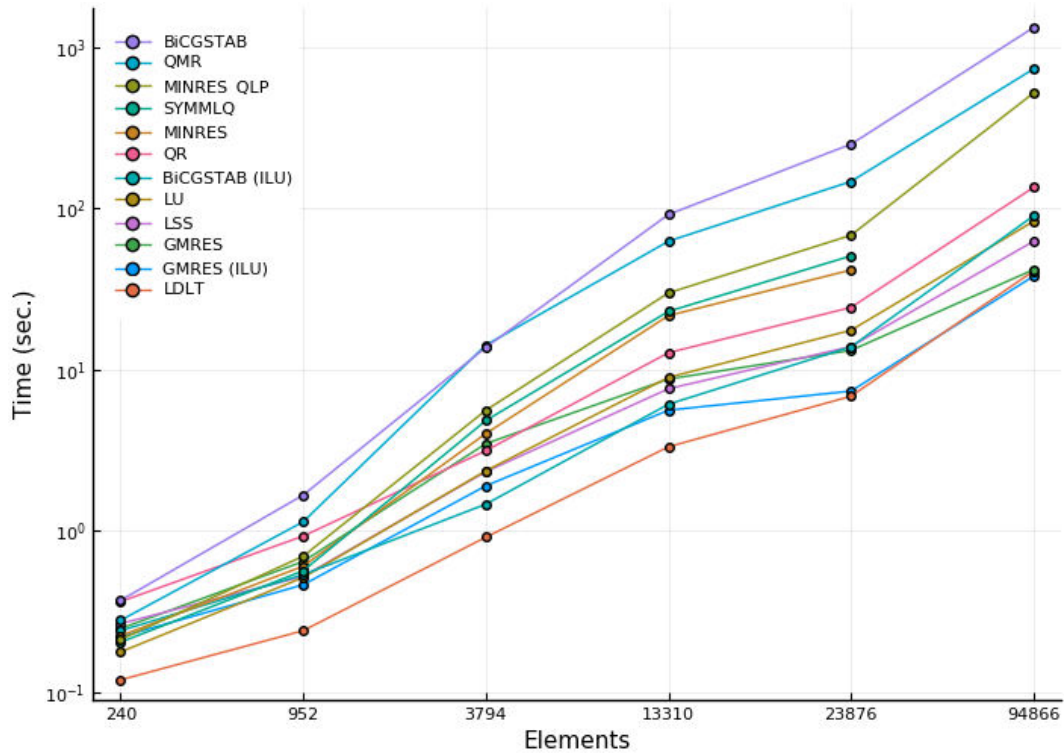


Рисунок 1 – Сравнительный анализ эффективности методов решения системы линейных уравнений $AX = B$

Таблица 2 – Общее время, требуемое для решения задачи 1

Кол-во элементов (порядок матрицы A)	240 (1000)	952 (3888)	3794 (15336)	13310 (53540)	23876 (95904)	94866 (380264)
LU	0.178074	0.515934	2.365567	8.976566	17.599724	83.433315
LDL ^T	0.119570	0.241353	0.916848	3.331936	6.861103	41.043318
LSS	0.266761	0.524083	2.335859	7.632451	13.950259	62.780053
QR	0.365704	0.931450	3.154382	12.764801	24.375187	135.451366
MINRES	0.224394	0.606001	4.026640	21.670705	41.617394	-
SYMMLQ	0.204669	0.567399	4.847013	23.030852	50.917617	-
MINRES_QLP	0.212910	0.698884	5.615440	29.983395	68.337196	521.643789
GMRES	0.248766	0.648482	3.486159	8.765271	13.206576	41.840447
GMRES (с ILU)	0.220794	0.465030	1.909329	5.619350	7.385863	38.076942
BiCGSTAB	0.372082	1.673543	13.787503	91.889559	250.746277	1326.388189
BiCGSTAB (с ILU)	0.241194	0.536927	1.469221	6.120774	13.893631	90.170172
QMR	0.279994	1.143298	14.242631	62.714071	147.327516	734.819492

$$\|p - p_h\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} (p(x) - p_h(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\bar{e}_{L_2} = \frac{\|p - p_h\|}{\|p\|} \cdot 100\% = \frac{\left(\int_{\Omega} (p(x) - p_h(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{\Omega} p(x) dx\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot 100\%,$$

где $p(x)$ – точное решение, $p_h(x)$ – приближенное решение, θ_K – центр треугольника K .

Таблица 3 – Анализ погрешности приближенного решения задачи 1

h	N_n	N_e	N_r	$\ p - p_h\ _{L_{\infty}}$	$\ p - p_h\ _{L_2}$	\bar{e}_{L_2}
0.1698	141	240	380	$9.222722 \cdot 10^{-3}$	$4.187039 \cdot 10^{-3}$	0.8370%
0.0775	517	952	1468	$2.366558 \cdot 10^{-3}$	$1.071524 \cdot 10^{-3}$	0.2143%
0.0421	1978	3794	5771	$6.893271 \cdot 10^{-4}$	$2.608941 \cdot 10^{-4}$	0.0521%
0.0234	6806	13310	20115	$1.927057 \cdot 10^{-4}$	$7.467197 \cdot 10^{-5}$	0.0149%
0.0168	12139	23876	36014	$1.084682 \cdot 10^{-4}$	$3.996466 \cdot 10^{-5}$	0.0079%
0.0102	47834	94866	142699	$3.827224 \cdot 10^{-5}$	$1.031525 \cdot 10^{-5}$	0.0020%

На рисунке 2 слева приведен график решения задачи 1 с использованием 94866 элементов, а справа – график погрешности.

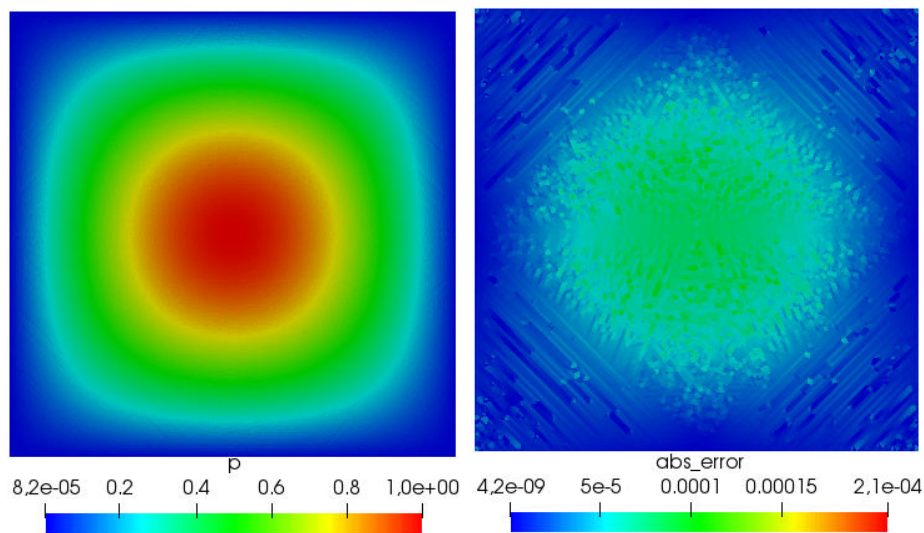


Рисунок 2 – График приближенного решения (слева) и погрешности (справа) задачи 1

В заключение приведем апостериорный анализ погрешности метода (8) для двух линейных задач в более сложных областях.

Задача 2 В треугольной области $\Omega = \left\{ (x, y) : -1 \leq x \leq 2, \frac{x-2}{\sqrt{3}} \leq y \leq -\frac{x-2}{\sqrt{3}} \right\}$,

рассмотрим задачу [24]

$$\nabla^2 p(x, y) = -2, \quad p(x, y)|_{\Gamma} = 0.$$

Точное решение задачи имеет вид

$$p(x, y) = \frac{9}{2} \left[\left(\frac{x}{3}\right)^3 - \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 3 \left(\frac{x}{3}\right) \left(\frac{y}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 + \frac{4}{27} \right].$$

Таблица 4 – Анализ погрешности приближенного решения задачи 2

h	N_n	N_e	N_r	$\ p - p_h\ _{L^\infty}$	$\ p - p_h\ _{L_2}$	\bar{e}_{L_2}
0.0613	5091	9880	14970	$1.468551 \cdot 10^{-4}$	$1.307540 \cdot 10^{-4}$	0.0159%
0.0411	11395	22338	33732	$6.698606 \cdot 10^{-5}$	$5.700906 \cdot 10^{-5}$	0.0069%
0.0326	20049	39496	59544	$3.779471 \cdot 10^{-5}$	$3.261361 \cdot 10^{-5}$	0.0039%
0.0232	44683	88464	133146	$2.210973 \cdot 10^{-5}$	$1.444174 \cdot 10^{-5}$	0.0017%

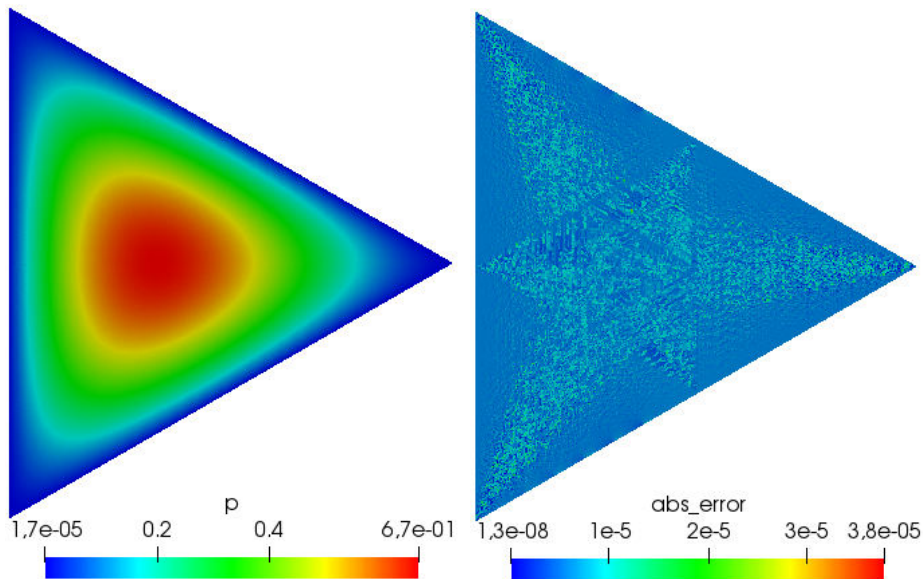


Рисунок 3 – График приближенного решения (слева) и погрешности (справа) задачи 2

Задача 3 В единичном круге рассмотрим задачу

$$\nabla^2 p(x, y) = -xy, \quad p(x, y)|_{\Gamma} = 0.$$

Точное решение задачи имеет вид

$$p(x, y) = \frac{xy}{12} (1 - x^2 - y^2).$$

Таблица 5 Анализ погрешности приближенного решения задачи 3

h	N_n	N_e	N_r	$\ p - p_h\ _{L_\infty}$	$\ p - p_h\ _{L_2}$	\bar{e}_{L_2}
0.0708	2023	3894	5916	$4.896409 \cdot 10^{-5}$	$2.481658 \cdot 10^{-5}$	0.2602%
0.0387	7986	15670	23655	$1.528482 \cdot 10^{-5}$	$6.200370 \cdot 10^{-6}$	0.0650%
0.0226	21879	43256	65134	$5.246527 \cdot 10^{-6}$	$2.251444 \cdot 10^{-6}$	0.0236%
0.0212	31491	62380	93870	$3.699707 \cdot 10^{-6}$	$1.554074 \cdot 10^{-6}$	0.0162%

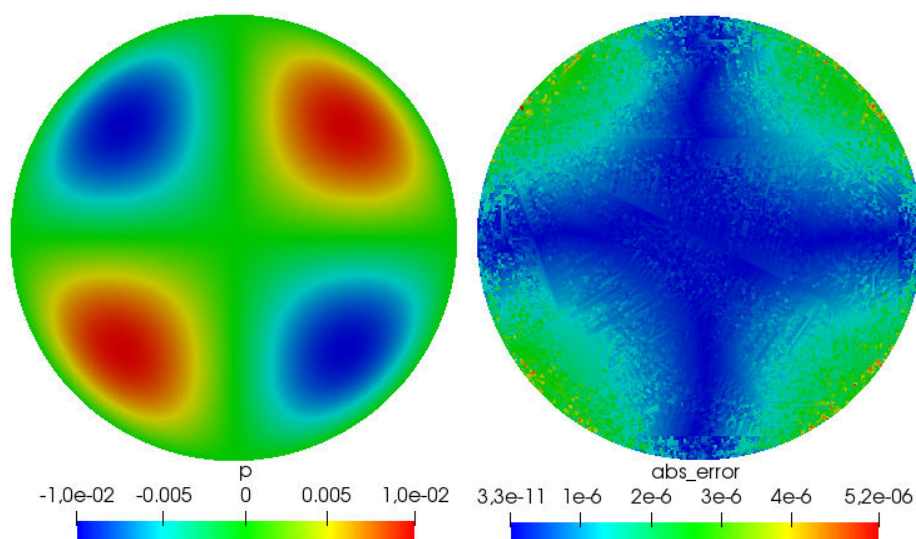


Рисунок 4 – График приближенного решения (слева) и погрешности (справа) задачи 3

5 Заключение

Таким образом, в данной работе построен итерационный метод решения одного нелинейного уравнения эллиптического типа, получена априорная оценка, из которой следует сходимость конечно-элементного метода, сделан анализ 12 прямых и итерационных методов решения системы линейных алгебраических уравнений, полученных в результате выполнения итерационного процесса.

При анализе вычислительных экспериментов сделан вывод о том, что при небольшом количестве (до 25000) конечных элементов наиболее эффективным является метод LDL^T , который для рассмотренной модельной задачи оказался в 1.5-2 раза быстрее итерационного метода GMRES с предобуславливателем ILU. Однако при более детальной триангуляции предпочтение следует отдать итерационным методам Крыловского типа с предобуславливателем, для реализации которого при равной скорости требуется меньше оперативной памяти.

Полученные результаты будут использованы при решении задачи двухфазной неравновесной фильтрации несжимаемой жидкости на основе обобщенного закона неравновесности.

6 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерства науки и образования Республики Казахстан (грант "Разработка и исследование параллельных конечно-элементных методов решения нелинейных задач многофазной фильтрации", ИРН AP08053189, 2020-2022 годы).

Список литературы

- [1] Gatica G., Baier R. and Tierra, G. A mixed finite element method for Darcy's equations with pressure dependent porosity // *Mathematics of Computation*. - 2015. - Vol. 297. - P. 1–33.
- [2] Atkinson K. and Hansen O. Solving the Nonlinear Poisson Equation on the Unit Disk // *Journal of Integral Equations*. - 2005. - No. 3. - P. 223-251.
- [3] Auricchio F., Veiga L., Brezzi F. and Lovadina C. Mixed finite element methods // *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition*. - 2017. - No.1. - P. 1–53.
- [4] Puscas M. A., Enchery G. and Desroziere, S. Application of the mixed multiscale finite element method to parallel simulations of two-phase flows in porous media // *Oil and Gas Science and Technology*. - 2018. - Vol. 73, No. 38. - P. 1-14.
- [5] Muzhinji K., Shateyi S. and Motsa S. The Mixed Finite Element Multigrid Method for Stokes Equations // *The Scientific World Journal*. - 2015. - No. 460421. - P. 1–12.
- [6] Vorwerk J., Engwer C., Pursiainen S. and Wolters C. A mixed finite element method to solve the EEG forward problem // *IEEE transactions on medical imaging*. - 2016. - No. 4. - P. 930–941.
- [7] Spiridonov D., Huang J., Vasilyeva M., Huang Yu. and Chung, E. Mixed generalized multiscale finite element method for Darcy-Forchheimer model // *Mathematics*. - 2019. - Vol. 7, No. 1212. - P. 1–13.
- [8] Brown D. L. and Vasilyeva M. Generalized multiscale finite element method for poroelasticity problems II: nonlinear coupling // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. - 2016. - Vol. 297. - P. 132–146.
- [9] Rebholz L., Viguier A. and Xiao M. Efficient nonlinear iteration schemes based on algebraic splitting for the incompressible Navier-Stokes equations // *Mathematics of Computation*. - 2019. - Vol. 88, No. 318. - P. 1533–1557.
- [10] Islam M., Hye A. and Mamun A. Nonlinear Effects on the Convergence of Picard and Newton Iteration Methods in the Numerical Solution of One-Dimensional Variably Saturated–Unsaturated Flow Problems // *Hydrology*. - 2017. - Vol. 4, No. 50. - P. 1–18.
- [11] Kuraz M., Mayer P. and Pech P. Solving the nonlinear Richards equation model with adaptive domain decomposition // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. - 2014. - Vol. 270. - P. 2-11.
- [12] Nakshatrala K. and Turner D. A mixed formulation for a modification to Darcy equation based on Picard linearization and numerical solutions to large-scale realistic problems // *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. - 2013. - Vol. 14, No. 6. - P. 524–541.
- [13] Madzvamuse A. and Chung A. Fully implicit time-stepping schemes and non-linear solvers for systems of reaction–diffusion equations // *Applied Mathematics and Computation*. - 2014. - Vol. 244. - P. 361–374.
- [14] Muccino J. and Luo H. Picard iterations for a finite element shallow water equation model // *Ocean modeling*. - 2005. - Vol. 10. - P. 316–341.
- [15] Zha Y., Yang J., Yin L., Zhang Y., Zheng, W. and Shi L. A modified Picard iteration scheme for overcoming numerical difficulties of simulating infiltration into dry soil // *Journal of Hydrology*. - 2017. - Vol. 551. - P. 56–69.
- [16] List F. and Radu F. A study on iterative methods for solving Richards' equation // *arXiv*. - 2015. - Vol. 1507.07837v1. - P. 1–16.
- [17] Baboulin M., Dongarra J., Remy A., Tomov S. and Yamazaki I. Solving dense symmetric indefinite systems using GPU // *Concurrency and Computation*. - 2017. - Vol. 29, No. 9. - P. 1–17.
- [18] Zhong-Zhi B. Motivations and realizations of Krylov subspace methods for large sparse linear systems // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. - 2015. - Vol. 283, No. 1. - P. 71–78.

- [19] Tran H., Toh K. and Phoon K. Preconditioned IDR(s) iterative solver for non-symmetric linear system associated with FEM analysis of shallow foundation // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. - 2013. - Vol. 37. - P. 2972–2986.
- [20] Choi S., Paige C. and Saunders M. MINRES-QLP: A Krylov subspace method for indefinite or singular symmetric systems // *SIAM Journal of Scientific Computing*. - 2011. - Vol. 3, No. 4. - P. 1810–1836.
- [21] Chronopoulos A. T. and Kucherov A. Block s-step Krylov iterative methods // *Numerical Linear Algebra with Applications*. - 2010. - Vol. 17, No. 1. - P. 3–15.
- [22] Cotter C. and Kirby R. Mixed finite elements for global tide models // *Numerische Mathematik*. - 2015. - No. 133. - P. 255–277.
- [23] Chen Z. Finite element methods and their applications. - Springer, 2007. - 410 p.
- [24] Kozulik, V. and Gotovac, B. Numerical solution of Poisson's Equation in an arbitrary domain by using meshless R-function method // *Proceeding of the 27th DAAM International Symposium on Intellect Manufacturing and Automation*. - 2016. - P. 245–254.

References

- [1] Gatica G., Baier R. and Tierra, G., "A mixed finite element method for Darcy's equations with pressure dependent porosity", *Mathematics of Computation* vol. 297 (2015): 1–33.
- [2] Atkinson K. and Hansen O. "Solving the Nonlinear Poisson Equation on the Unit Disk", *Journal of Integral Equations* no. 3 (2005): 223–251.
- [3] Auricchio F., Veiga L., Brezzi F. and Lovadina C. "Mixed finite element methods", *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition* no.1 (2017): 1–53.
- [4] Puscas M. A., Enchery G. and Desroziers, S. "Application of the mixed multiscale finite element method to parallel simulations of two-phase flows in porous media", *Oil and Gas Science and Technology* vol. 73, no. 38 (2018): 1–14.
- [5] Muzhinji K., Shateyi S. and Motsa S. "The Mixed Finite Element Multigrid Method for Stokes Equations", *The Scientific World Journal* no. 460421 (2015): 1–12.
- [6] Vorwerk J., Engwer C., Pursiainen S. and Wolters C. "A mixed finite element method to solve the EEG forward problem", *IEEE transactions on medical imaging* no. 4 (2016): 930–941.
- [7] Spiridonov D., Huang J., Vasilyeva M., Huang Yu. and Chung, E. "Mixed generalized multiscale finite element method for Darcy-Forchheimer model", *Mathematics* vol. 7, no. 1212 (2019): 1–13.
- [8] Brown D. L. and Vasilyeva M. "Generalized multiscale finite element method for poroelasticity problems II: nonlinear coupling", *Journal of Computational and Applied Mathematics* vol. 297 (2016): 132–146.
- [9] Rebbholz L., Viguerie A. and Xiao M. "Efficient nonlinear iteration schemes based on algebraic splitting for the incompressible Navier-Stokes equations", *Mathematics of Computation* vol. 88, no. 318 (2019): 1533–1557.
- [10] Islam M., Hye A. and Mamun A. "Nonlinear Effects on the Convergence of Picard and Newton Iteration Methods in the Numerical Solution of One-Dimensional Variably Saturated–Unsaturated Flow Problems", *Hydrology* vol. 4, no. 50 (2017): 1–18.
- [11] Kuraz M., Mayer P. and Pech P. "Solving the nonlinear Richards equation model with adaptive domain decomposition", *Journal of Computational and Applied Mathematics* vol. 270 (2014): 2–11.
- [12] Nakshatrala K. and Turner D. "A mixed formulation for a modification to Darcy equation based on Picard linearization and numerical solutions to large-scale realistic problems", *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics* vol. 14, no. 6 (2013): 524–541.
- [13] Madzvamuse A. and Chung A. "Fully implicit time-stepping schemes and non-linear solvers for systems of reaction–diffusion equations", *Applied Mathematics and Computation* vol. 244 (2014): 361–374.
- [14] Muccino J. and Luo H. "Picard iterations for a finite element shallow water equation model", *Ocean modeling* vol. 10 (2005): 316–341.

- [15] Zha Y., Yang J., Yin L., Zhang Y., Zheng, W. and Shi L. "A modified Picard iteration scheme for overcoming numerical difficulties of simulating infiltration into dry soil" , *Journal of Hydrology* vol. 551 (2017): 56–69.
- [16] List F. and Radu F. "A study on iterative methods for solving Richards' equation" , *arXiv* vol. 1507.07837v1 (2015): 1–16.
- [17] Baboulin M., Dongarra J., Remy A., Tomov S. and Yamazaki I. "Solving dense symmetric indefinite systems using GPU" , *Concurrency and Computation* vol. 29, no. 9 (2017): 1–17.
- [18] Zhong-Zhi B. "Motivations and realizations of Krylov subspace methods for large sparse linear systems" , *Journal of Computational and Applied Mathematics* vol. 283, no. 1 (2015): 71–78.
- [19] Tran H., Toh K. and Phoon K. "Preconditioned IDR(s) iterative solver for non-symmetric linear system associated with FEM analysis of shallow foundation" , *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* vol. 37 (2013): 2972–2986.
- [20] Choi S., Paige C. and Saunders M. "MINRES-QLP: A Krylov subspace method for indefinite or singular symmetric systems" , *SIAM Journal of Scientific Computing* vol. 3, no. 4 (2011): 1810–1836.
- [21] Chronopoulos A. T. and Kucherov A. "Block s-step Krylov iterative methods" , *Numerical Linear Algebra with Applications* vol. 17, no. 1 (2010): 3–15.
- [22] Cotter C. and Kirby R. "Mixed finite elements for global tide models" , *Numerische Mathematik* no. 133 (2015): 255–277.
- [23] Chen Z. "Finite element methods and their applications"(Springer, 2007).
- [24] Kozulik, V. and Gotovac, B. "Numerical solution of Poisson's Equation in an arbitrary domain by using meshless R-function method" , *Proceeding of the 27th DAAM International Symposium on Intellect Manufacturing and Automation* (2016): 245–254.