УДК-517.948.34

М.К. Дауылбаев*, Д.Н. Нургабыл, Н. Атахан

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
*E-mail: dmk57@mail.ru

Асимптотическое разложение решений краевых задач с начальными скачками для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений

Рассматривается двухточечная краевая задача для сингулярно возмущенных линейных интегро-дифференциальных уравнений n- го порядка с интегральными членами Фредгольма, обладающая на левом конце рассматриваемого отрезка явлением начального скачка m- го порядка. Определены регулярные и погранслойные части асимптотического разложения решений. Регулярные члены асимптотики построены в виде интегро-дифференциальных уравнений, отличающихся от обычных невозмущенных интегро-дифференциальных уравнений наличием дополнительных слагаемых, называемых начальными скачками интегральных членов. Определены величины этих начальных скачков. Краевые условия для регулярных членов асимптотики также содержат дополнительные слагаемые, называемые начальными скачками производных m- го порядка. Тем самым, для определения регулярных членов асимптотики получаются краевые задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений с дополнительным параметром. Для определения погранслойных членов асимптотического разложения решений получены начальные задачи для однородных и неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Получены экспоненциальные оценки для погранслойных членов асимптотики. Сформулирована теорема существования, единственности и об асимптотическом представлении решений с оценкой остаточного члена асимптотики. Установлено, что построенное асимптотическое приближение к решению исходной сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной краевой задачи носит равномерный характер на всем рассматриваемом отрезке.
Ключевые слова: сингулярное возмущение, интегро-дифференциальное уравнение, малый параметр, асимптотическое разложение, начальный скачок, погранслой.

M.K. Dauylbayev, D.N. Nurgabyl, N. Atakhan

Asymptotic expansion of solutions of boundary value problems with initial jumps for singularly perturbed integro-differential equations

We consider the two-point boundary value problem for a singularly perturbed linear integro-differential equations n-th order with Fredholm's integral terms having on the left end of the segment an initial jump phenomenon m-th order. Defined regular and boundary layer members of the asymptotic expansion of the solution. Regular members of the asymptotics constructed in the form of integro-differential equations, which differ from the usual unperturbed equations by the presence of additional term called initial jump of the integral terms. The values of the initial jumps are defined. Boundary conditions for the regular members of the asymptotics also contain additional term, called an initial jump of the derivatives m-th order. Thus, for the determination of the regular members of the asymptotics obtained boundary value problems for linear integro-differential equations with additional parameter. To determine the boundary layer of the asymptotic expansion of solution we obtained initial problems for homogeneous and inhomogeneous ordinary differential equations with constant coefficients. Exponential estimates for boundary layer terms of the asymptotics are obtained. A theorem of existence and uniqueness and the asymptotic representations of solution with an estimate of the remainder term of the asymptotics.

It is found that the constructed asymptotic approximation to the solution of the original singularly perturbed integro-differential boundary value problem is uniform throughout the considered interval.
Key words: singular perturbation, the integro-differential equation, a small parameter, asymptotic expansion, the initial jump, the boundary layer

М.Қ. Дауылбаев, Д.Н. Нұрғабыл, Н. Атахан
Сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы секірісті шеттік есеп шешімінің асимптотикалық жіктелуі

Қарастырылып отырған кесіндінің сол жақ шетінде m-ші ретті бастапқы секірісі бар n-ші ретті сингулярлы ауытқыған Фредгольм сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеулері үшін екі нүктелі шеттік есеп қарастырылады. Шешімнің асимптотикалық жіктелуінің регулярлы және шекаралық қабатты мүшелері анықталды. Асимптотиканың регулярлы мүшелері әдеттегі ауытқымаған теңдеулерден бөлек интегралдық мүшелердің бастапқы секірістері деп аталатын қосымша мүшелері бар интегралды-дифференциалдық теңдеулер түрінде құрылды. Осы бастапқы секірістердің шамалары анықталды. Асимптотиканың регулярлы мүшелерінің шеттік шарттарында m-ші ретті туындының бастапқы секірістері деп аталатын қосымша мүшелер болады. Сонымен, асимптотиканың регулярлы мүшелерін анықтау үшін сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеулерге арналған қосымша параметрлі шеттік есептер алынды. Шешімнің асимптотикасының шекаралық қабатты мүшелерін анықтау үшін тұрақты коэффициентті біртекті және біртекті емес дифференциалдық теңдеулерге арналғн бастапқы есептер алынды. Асимптотиканың шекаралық қабатты мүшелері үшін экспоненциалды бағалаулар алынды. Шешімнің бар болуы, жалғыздығы және асимптотикалық түрде берілуі туралы теорема келтірілген. Асимптотиканың қалдық мүшесі бағаланды. Берілген сингуярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеулерге арналған шеттік есеп шешіміне құрылған асимптотикалық жуықтау барлық кесіндіде бірқалыпты сипатта болады.
Түйін сөздер: сингулярлы ауытқу, интеграды-дифференциалдық теңдеулер,кіші параметр, асимптотикалық жіктелу, бастапқы секіріс, шекаралық қабат

Введение

Сингулярно возмущенные уравнения выступают в качестве математических моделей во многих прикладных задачах, связанных с процессами диффузии, тепломассопереноса, в химической кинетике и горения, в задачах распространения тепла в тонких телах, в теории полупроводников, движения гироскопов, в квантовой механике, в биологии и биофизике и многих других отраслях науки и техники. В работах М.И. Вишика, Л.А.Люстерника [1] и К.А. Касымова [2] впервые изучены начальные задачи для сингулярно возмущенных уравнений с неограниченными начальными данными при стремлении малого параметра к нулю, которые называются задачами Коши с начальным скачком. Характерной особенностью таких задач является то, что решение сингулярно возмущенной задачи при стремлении малого параметра к нулю стремится к решению вырожденного уравнения с измененными начальными условиями. В таком случае говорят, что имеет место явление начального скачка решения. При исследовании некоторых краевых задач для сингулярно возмущенных уравнений возникает случай, когда решения или производные от решения в начальной точке принимают бесконечно большие значения при достаточно малых значениях параметра. Такие краевые задачи оказываются эквивалентными задачам Коши с начальным скачком. Для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений краевые задачи с начальным скачком рассмотрены в работах [3-7]. Настоящая работа посвящена построению асимптотического разложения решений краевых задач для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений, обладающих явлением начального скачка не только решения, но и интегральных членов.

Основная часть

Рассмотрим сингулярно возмущенное линейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i(t) y^{(n-i)}(t) = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{m+1} H_i(t,x) y^{(i)}(x)dx \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{cases} h_i y(t,\varepsilon) \equiv \sum\limits_{j=0}^{m+1-i} \alpha_{ij} y^{(j)}(0,\varepsilon) = \ a_i, \quad i=\overline{1,\ l}, \\ h_{l+i} y(t,\varepsilon) \equiv \sum\limits_{j=0}^{m+1-i} \beta_{ij} y^{(j)}(1,\varepsilon) = b_i, \ i=\overline{1,p}, \end{cases} \qquad l+p=n \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $a_i,\ i=\overline{1,l}$; b_i , $i=\overline{1,p}$ – некоторые известные постоянные, не зависящие от ε, $m = fix \in \{0,1,...,n-2\}$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

I. $A_i(t), \ \ F(t) \in C^{N+2(n-1-m)}[0,1]$, $i=\overline{1,n}$, а $H_i(t,x) \in C^{N+n-1-m}(D)$, $i=\overline{0,m+1}$, $D=(0\le t\le 1,\ 0\le x\le 1)$;

II. $A_1(t) \ge \gamma = const > 0, \ \ 0 \le t \le 1$;

III. $\alpha_{1,m} \ne 0$.

В работе [8] установлены следующие предельные равенства:

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} y^{(i)}(t,\varepsilon) = \overline{y}^{(i)}(t), i=\overline{0,m-1}, \ \ 0\le t\le 1, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} y^{(m+i)}(t,\varepsilon) = \overline{y}^{(m+i)}(t), i=\overline{0,n-1-m}, \ \ 0< t\le 1, \end{array} \quad (3)$$

где $y(t,\varepsilon)$ – решение сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2), а $\overline{y}(t)$ является решением следующей видоизмененной вырожденной краевой задачи

$$L_0\overline{y}(t) \equiv A_1(t)\overline{y}^{(n-1)}(t) + \sum_{i=2}^{n} A_i(t)\overline{y}^{(n-i)}(t) = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{m+1} H_i(t,x)\overline{y}^{(i)}(x)dx + \Delta(t) \quad (4)$$

с краевыми условиями

$$h_1\overline{y}(t) \equiv \sum_{j=0}^{m} \alpha_{1j}\overline{y}^{(j)}(0) = \ a_1 + \alpha_{1,m}\Delta_0, \ \ h_i\overline{y}(t) \equiv \sum_{j=0}^{m+1-i} \alpha_{ij}\overline{y}^{(j)}(0) = \ a_i, i=\overline{2,\ l},$$

$$h_{l+i}\overline{y}(t) \equiv \sum_{j=0}^{m+1-i} \beta_{ij}\overline{y}^{(j)}(1) = b_i, i=\overline{1,p}, \quad (5)$$

где $\Delta(t)$ и Δ_0- так называемые начальные скачки интегрального члена и решения, определяемых из следующих формул начального скачка:

$$\Delta(t) = \Delta_0 H_{m+1}(t,0), \Delta_0 = -\overset{(m)}{w_0}(0). \tag{6}$$

Задача (4), (5) называется вырожденной задачей для задачи (1), (2).

IV. Пусть вырожденная задача (4), (5) на отрезке [0,1] имеет единственное решение $\overline{y}(t)$.

Как видно из (3) $\overline{y}^{(m+i)}(t)$, $i = \overline{0, n-1-m}$ в некоторой окрестности точки $t = 0$ не может служить равномерным асимптотическим приближением для $y^{(m+i)}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{0, n-1-m}$. Также в [8] ничего не говорится о точности асимптотических приближений. Естественно поставить вопрос о построении равномерного асимптотического приближения решения задачи (1), (2) с любой степенью точности. Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

Так как решение задачи (1), (2) обладает начальным скачком $m-$го порядка (см. [8]), то асимптотическое разложение решений этой задачи ищем в виде:

$$y(t,\varepsilon) = y_\varepsilon(t) + \varepsilon^m w_\varepsilon(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \tag{7}$$

где $y_\varepsilon(t)$ - так называемая регулярная часть и $w_\varepsilon(\tau)$- погранслойная часть асимптотики решения задачи (1), (2) определяются в виде

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(t) &= y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + ... \\ w_\varepsilon(\tau) &= w_0(\tau) + \varepsilon w_1(\tau) + \varepsilon^2 w_2(\tau) + ... \end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя (7) в (1) и выписывая члены, зависящие от t и τ отдельно, получим уравнения относительно $y_\varepsilon(t)$ и $w_\varepsilon(\tau)$:

$$\begin{aligned} &\varepsilon y_\varepsilon^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i(t) y_\varepsilon^{(n-i)}(t) = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{m+1} H_i(t,x) y_\varepsilon^{(i)}(x)dx \\ &+ \int_0^\infty \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^{m+1-i} H_i(t,\varepsilon s) \overset{(i)}{w_\varepsilon}(s)ds \end{aligned} \tag{9}$$

$$\overset{(n)}{w_\varepsilon}(\tau) + A_1(\varepsilon\tau) \overset{(n-1)}{w_\varepsilon}(\tau) + \varepsilon A_2(\varepsilon\tau) \overset{(n-2)}{w_\varepsilon}(\tau) + ... + \varepsilon^{n-1} A_n(\varepsilon\tau) w_\varepsilon(\tau) = 0 \tag{10}$$

Подставляя теперь разложения (8) в (9), (10), разлагая $A_i(\varepsilon\tau), i = \overline{1,n}$, $H_i(t,\varepsilon s), i = \overline{0, m+1}$ в ряды по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим последовательность уравнений для определения $y_k(t)$ и $w_k(\tau)$. Для определения $y_0(t)$ и $y_k(t), k \geq 1$ имеем интегро-дифференциальные уравнения вида

$$A_1(t)y_0^{(n-1)}(t)+\sum_{i=2}^{n}A_i(t)y_0^{(n-i)}(t)=F(t)+\int_0^1\sum_{i=0}^{m+1}H_i(t,x)y_0^{(i)}(x)dx-H_{m+1}(t,0)\overset{(m)}{w_0}(0) \quad (11_0)$$

$$A_1(t)y_k^{(n-1)}(t)+\sum_{i=2}^{n}A_i(t)y_k^{(n-i)}(t)=F_k(t)+\int_0^1\sum_{i=0}^{m+1}H_i(t,x)y_k^{(i)}(x)dx-H_{m+1}(t,0)\overset{(m)}{w_k}(0),k\geq 1, \quad (11_k)$$

где $F_k(t),k\geq 1$ – известная функция, выражаемая формулой

$$F_k(t)=\int_0^\infty\sum_{j=1}^{k}\frac{s^j}{j!}H_{m+1}^{(j)}(t,0)\overset{(m+1)}{w_{k-j}}(s)ds+$$

$$+\int_0^\infty\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\frac{s^j}{j!}H_{m+1-i}^{(j)}(t,0)\overset{(m+1-i)}{w_{k-i-j}}(s)ds-y_{k-1}^{(n)}(t),\ k=\overline{1,m+1},$$

$$F_k(t)=\int_0^\infty\sum_{j=1}^{k}\frac{s^j}{j!}H_{m+1}^{(j)}(t,0)\overset{(m+1)}{w_{k-j}}(s)ds+ \quad (12)$$

$$+\int_0^\infty\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=0}^{k-i}\frac{s^j}{j!}H_{m+1-i}^{(j)}(t,0)\overset{(m+1-i)}{w_{k-i-j}}(s)ds-y_{k-1}^{(n)}(t),\quad k\geq m+2.$$

Для определения $w_0(\tau)$ и $w_k(\tau),k\geq 1$ имеем обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$\overset{(n)}{w_0}(\tau)+A_1(0)\overset{(n-1)}{w_0}(\tau)=0, \quad (13_0)$$

$$\overset{(n)}{w_k}(\tau)+A_1(0)\overset{(n-1)}{w_k}(\tau)=\Phi_k(\tau), \quad (13_k)$$

где $\Phi_k(\tau),k\geq 1$- известная функция, выражаемая в виде

$$\Phi_k(\tau)=\begin{cases}-\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{\tau^j}{j!}A_1^{(j)}(0)\overset{(n-1)}{w_{k-j}}(\tau)-\sum\limits_{m=0}^{k-1}\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{\tau^j}{j!}A_{k+1-m}^{(j)}(0)\overset{(n-1+m-k)}{w_{m-j}}(\tau),k=\overline{1,n-1},\\-\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{\tau^j}{j!}A_1^{(j)}(0)\overset{(n-1)}{w_{k-j}}(\tau)-\sum\limits_{m=k+1-n}^{k-1}\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{\tau^j}{j!}A_{k+1-m}^{(j)}(0)\overset{(n-1+m-k)}{w_{m-j}}(\tau),\quad k\geq n.\end{cases} \quad (14)$$

Для однозначного определения членов разложений $y_\varepsilon(t)$ и $w_\varepsilon(\tau)$ подставляя (7) с учетом (8) в (2) получим

$$\sum_{j=0}^{m+1-i}\alpha_{ij}[y_0^{(j)}(0)+\varepsilon y_1^{(j)}(0)+...+\varepsilon^{m-j}(\overset{(j)}{w_0}(0)+\varepsilon\overset{(j)}{w_1}(0)+...)]=a_i,\quad i=\overline{1,l}, \quad (15)$$

$$\sum_{j=0}^{m+1-i} \beta_{ij} \left[y_0^{(j)}(1) + \varepsilon y_1^{(j)}(1) + ... + \varepsilon^{m-j} \left(\overset{(j)}{w}_0 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \overset{(j)}{w}_1 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + ... \right) \right] = b_i, \quad i = \overline{1,p}. \quad (16)$$

В равенствах (16) члены $\overset{(j)}{w}_k\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), k = 0, 1, ...$можно не учитывать, т.к. они будут более высокого порядка малости, чем любая степень ε. Теперь, сопоставляя коэффициенты при одинаковых степенях ε в (15), (16), определяем дополнительные условия для коэффициентов $y_k(t)$ и $w_k(\tau)$, $k \geq 0$. В нулевом приближении для определения $y_0(t)$ имеем следующие краевые условия:

$$h_1 y_0 = a_1 - \alpha_{1m} \overset{(m)}{w}_0(0), \quad h_i y_0 = a_i, \quad i = \overline{2,l}, \quad h_{l+i} y_0 = b_i, \quad i = \overline{1,p}. \quad (17_0)$$

Для коэффициента $w_0(\tau)$ известно только одно начальное условие $\overset{(m)}{w}_0(0)$, определяемое из задачи $(11_0), (17_0)$. Для того, чтобы найти недостающие начальные условия для $w_0(\tau)$ понижаем порядок уравнения (13_0) интегрированием от τ до ∞ и требованием $\overset{(i)}{w}_0(\infty) = 0, i = \overline{0, n-1}$. В результате после $n - 1 - m$ - го шага приходим к уравнению $\overset{(m+1)}{w}_0(\tau) + A_1(0) \overset{(m)}{w}_0(\tau) = 0$. Отсюда при $\tau = 0$ получаем начальное условие $\overset{(m+1)}{w}_0(0) = -A_1(0) \overset{(m)}{w}_0(0)$. Продолжая этот процесс последовательного понижения уравнения (13_0) в итоге получаем начальные условия для определения $w_0(\tau)$:

$$\overset{(i)}{w}_0(0) = (-A_1(0))^{i-m} \overset{(m)}{w}_0(0), \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (18_0)$$

Тем самым, нулевое приближение асимптотического разложения построено полностью. Сравнивая задачи (4), (5) и $(11_0), (17_0)$ получим формулы начального скачка (6).

В k-ом приближении для определения $y_k(t)$, $k = 1, 2, ..., m - 1$ получим краевые условия

$$h_1 y_k + \alpha_{1m} \overset{(m)}{w}_k(0) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{1,m-j} \overset{(m-j)}{w}_{k-j}(0) = 0,$$

$$h_2 y_k + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{2,m-j} \overset{(m-j)}{w}_{k-j}(0) = 0, \quad k = 1, 2, ..., m-1,$$

$$h_i y_k = 0, \quad i = \overline{3,l}; \quad k = 1, 2, ..., i-2, \quad (17_{k1})$$

$$h_i y_k + \sum_{j=i-1}^{k} \alpha_{i,m-j} \overset{(m-j)}{w}_{k-j}(0) = 0, \quad i = \overline{3,l}, \ k = i-1, ..., m-1,$$

$$h_{l+i} y_k = 0, \quad i = \overline{1,p}.$$

Коэффициенты $y_k(t)$ для значений $k = m, m+1, ...$ определяются из краевых условий

$$h_1 y_k + \alpha_{1m} \overset{(m)}{w}_k(0) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1,m-j} \overset{(m-j)}{w}_{k-j}(0) = 0,$$

$$h_i y_k + \sum_{j=i-1}^{m} \alpha_{i,m-j} \overset{(m-j)}{w}_{k-j}(0) = 0, \quad i = \overline{2, l}, \tag{17_{k2}}$$

$$h_{l+i} y_k = 0, \quad i = \overline{1, p}, \;\; k = m, m+1, ...$$

Для определения коэффициента $w_k(\tau), k \geq 1$ начальное условие $\overset{(m)}{w}_k(0)$ уже известно – оно определяется из задачи $(11_k), (17_{k1}), (17_{k2})$. Для того, чтобы найти остальные недостающие начальные условия для $w_k(\tau)$ применяем процедуру последовательного понижения порядка уравнения (13_k) требуя $\overset{(i)}{w}_k(\infty) = 0, i = \overline{0, n-1}$. В результате получаем начальные условия для определения $w_k(\tau)$:

$$\overset{(i)}{w}_k(0) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m-i} \overset{(m)}{w}_k(0) + (-1)^{n-1-i} \int\limits_0^\infty \sum\limits_{j=n-1-m}^{n-2-i} \frac{s^j}{j!} A_1^{j-(n-1-m)}(0) \Phi_k(s) ds}{A_1^{m-i}(0)}, & i = \overline{0, m}, \\ (-A_1(0))^{i-m} \overset{(m)}{w}_k(0) + (-1)^{n-i} \int\limits_0^\infty \sum\limits_{j=n-1-i}^{n-2-m} \frac{s^j}{j!} A_1^{j-(n-1-i)}(0) \Phi_k(s) ds, & i = \overline{m+1, n-1} \end{cases} \tag{18_k}$$

Тем самым, k-ое приближение асимптотики построено полностью. Отметим, что для решений $w_0(\tau)$, $w_k(\tau), k \geq 1$ задач (13_0), (18_0) и (13_k), (18_k) при $\tau \geq 0$ справедливы оценки:

$$\left| \overset{(i)}{w}_k(\tau) \right| \leq K \exp(-\gamma\tau), i = \overline{0, n-1}, \tag{19}$$

где $K > 0, \gamma > 0-$ некоторые постоянные, не зависящие от t и ε.

Образуем N-ую частичную сумму разложений (7), (8):

$$\bar{y}_N(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k y_k(t) + \varepsilon^m \sum_{k=0}^{N+n-1-m} \varepsilon^k \, w_k(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \tag{20}$$

где коэффициент $y_0(t)$ однозначно определяется из уравнения (11_0) с краевыми условиями (17_0), а коэффициент $y_k(t), k = \overline{1, N}$ однозначно определяется из уравнения (11_k) с краевыми условиями $(17_{k1}), (17_{k2})$ и они вместе со своими производными до $n-1$- го порядка ограничены на отрезке $0 \leq t \leq 1$. В случае $N \geq m$ коэффициенты $w_k(\tau), k = \overline{0, N-m}$ однозначно определяются из уравнения (13_k) с начальными условиями (18_k) и они вместе со своими производными до $n-1$- го порядка являются функциями пограничного слоя при $\tau \geq 0$, т.е. имеют оценки (19), а коэффициенты $w_k(\tau), k = \overline{N+1-m, N+n-1-m}$ однозначно определяются из того же уравнения (13_k) с начальными условиями

$$\overset{(i)}{w}_k(0) = \begin{cases} 0, & i = \overline{0, k-(N+1-m)}, \\ \dfrac{(-1)^{m-i} \overset{(m)}{w}_k(0) + (-1)^{n-1-i} \int\limits_0^\infty \sum\limits_{j=n-1-m}^{n-2-i} \frac{s^j}{j!} A_1^{j-(n-1-m)}(0) \Phi_k(s) ds}{A_1^{m-i}(0)}, & i = \overline{k-(N-m), m}, \\ (-A_1(0))^{i-m} \overset{(m)}{w}_k(0) + (-1)^{n-i} \displaystyle\int_0^\infty \sum_{j=n-1-i}^{n-2-m} \frac{s^j}{j!} A_1^{j-(n-1-i)}(0) \Phi_k(s) ds, & i = \overline{m+1, n-1} \end{cases} \tag{21_k}$$

и функции $\overset{(i)}{w}_k(\tau), i = \overline{0, k-(N+1-m)}$ при $\tau \geq 0$ ограничены, а для $i = \overline{k-(N-m), n-1}$ являются функциями пограничного слоя при $\tau \geq 0$. В случае $N < m$ коэффициенты $w_k(\tau), k = \overline{0, N+n-1-m}$ однозначно определяются из уравнения (13_k) с начальными условиями (21_k) и функции $\overset{(i)}{w}_k(\tau), i = \overline{0, k-(N+1-m)}$ при $\tau \geq 0$ ограничены, а для $i = \overline{k-(N-m), n-1}$ являются функциями пограничного слоя при $\tau \geq 0$.

Теорема 1 *Пусть выполнены условия I-IV. Тогда найдутся постоянные $\varepsilon_0 > 0$ и $K > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ решение $y(t,\varepsilon)$ задачи* (1), (2) *существует на отрезке [0,1], единственно и допускает асимптотическое представление*

$$y(t,\varepsilon) = \bar{y}_N(t,\varepsilon) + R_N(t,\varepsilon),$$

где $\bar{y}_N(t,\varepsilon)$ имеет вид (20), а для остаточного члена $R_N(t,\varepsilon)$ справедливы оценки:

$$\left| R_N^{(i)}(t,\varepsilon) \right| \leq K\varepsilon^{N+1}, \qquad i = \overline{0, n-1}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Заключение

Мы исследовали, как интегральные члены могут повлиять на асимптотику решений сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. Интегральные члены существенно меняют вырожденную задачу: решение исходной интегро-дифференциальной задачи не сходится к решению обычной вырожденной задачи, а сходится к решению измененного вырожденного интегро-дифференциального уравнения с дополнительным членом, называемым начальным скачком интегрального члена. Кроме того, краевые условия вырожденной задачи также требуют модификации. В силу начального скачка m - го порядка в краевых условиях появляется дополнительное слагаемое Δ_0 , называемое начальным скачком m-ой производной решения. Причем порядок начального скачка решения зависит от порядка производных, входящих под знаком интегралов. Построенное асимптотическое приближение обеспечивает равномерную точность на всем промежутке.

Литература

[1] *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. // ДАН СССР. – 1960, – 132. №6. С. 1242-1245.

[2] *Касымов К.А.* Об асимптотике решения задачи Коши с большими начальными условиями для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. // УМН. – 1962. – Т.17. – № 5. С.187-188.

[3] *Касымов К.А., Абильдаев Е.А.* Асимптотические оценки решений сингулярно возмущенных краевых задач с начальными скачками для линейных дифференциальных уравнений. // Дифференциальные уравнения. – 1992.— Т. 28.– № 10. С. 1659-1668.

[4] *Касымов К.А.* Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. - Алматы: Изд.-во: Санат. – 1997.– 176 с.

[5] *Нургабыл Д.Н.* Асимптотическое разложение решения краевой задачи с начальным скачком // Вестник Карагандинского государственного университета, серия математика. – 2008,– №1, –С.40-47.

[6] *Нургабыл Д.Н.* Асимптотическое разложение решения нелинейного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной с неразделенными краевыми условиями // Известия АН РК, серия физико-математическая, – 2008 г. – №3. С.19-25.

[7] *7. Нургабыл Д.Н.* Асимптотические оценки решения сингулярно возмущенной обратной задачи с начальным скачком // Вестник КазНТУ им. К.И. Сатпаева,-2013,– №3.-С.323-329.

[8] *Атахан Н., Дауылбаев М.К.* Асимптотические оценки решения краевых задач для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Вестник КазНТУ им. К. Сатпаева.– 2014. – № 5. С. 355-361.

References

[1] *Vishik M.I., Liusternik L.A.* O nachalnom skachke dlia nelineinyx differencialnyx uravnenii, soderzhajix malyx parametr. // DAN SSSR. –1960, – 132. №6. S. 1242-1245.

[2] *Kasymov K.A.* Ob asimptotike reshenia zadachi Koshi s bolshimi nachalnymi usloviami dlia nelineinyx obyknovennyx differencialnyx uravnenii, soderzhajix malyx parametr. // UMN. –1962. – T.17. – № 5. S.187-188.

[3] *Kasymov K.A.,Abildaev E.A.* Asimptoticheskie ocenki reshenii singuliarno vozmushennyx kraevyx zadach s nachalnymi skachkami dlia lineinyx differencialnyx uravnenii. // differencialnye uravnenia. – 1992.— T. 28.– № 10. S. 1659-1668.

[4] *Kasymov K.A.* Singuliarno vozmushennye kraevye zadachi s nachalnymi skachkami. - Almaty: Izdatelstvo: Sanat. – 1997.– S. 176.

[5] *Nurgabyl D.N.* Asimptoticheskoe razlozhenie rechenia kraevoi zadachi s nachalnymi skachkom //Vestnik Karagandinskogo gosudarstvennogo universiteta, seria matematika. – 2008,– №1, –S.40-47.

[6] *Nurgabyl D.N.* Asimptoticheskoe razlozhenie rechenia nelineinogo differencialnogo uravnenia s malym parametrom pri starshei proizvodnoi s nerazdelennymi kraevymi usloviami // Izvestia AN RK, seria fiziko matematicheskaia, – 2008 г. – №3. S.19-25.

[7] *7. Nurgabyl D.N.* Asimptoticheskie ocenki reshenii singuliarno vozmushennoi obratnoi zadachi s nachalnym skachkom // Vestnik KazNTU im. K.I. Satpaeva, -2013, – №3. S.323-329.

[8] *Atakhan N., Dauylbaev M.K.* Asymptoticheskoe ocenki reshenia kraevyx zadach dlia singuliarno vozmushennyx integro-differencialnyx uravnenii. // Vestnik KazNTU im. Satpaeva. – 2014. – №5. S.355-361