1-бөлім | Раздел 1 | Section 1

Математика | Математика | Mathematics

МРНТИ 27.31.15 DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v107.i3.01

**З.Ю. Фазуллин**
Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия
e-mail: fazullinzu@mail.ru

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДВУМЕРНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В 1933 году Курант Р. и Гильберт Д. рассмотрели формальное разложение функции источника по собственным функциям задачи Дирихле оператора Лапласа на прямоугольнике. Оказалось, что указанный ряд не может сходиться абсолютно ни для какой пары внутренних точек прямоугольника. Следовательно, сходимость ряда может быть только условной. Тогда для условной сходимости важен порядок суммирования. Системно подобные разложения изучены в работах В.А.Ильина. В данной работе исследована сходимость разложения функции источника по собственным функциям двумерного гармонического осциллятора. Получено представление функции Грина двумерного гармонического осциллятора. Выделены особенности функции Грина. В результате вытекает, что функция Грина двумерного гармонического осциллятора имеет две особые точки. Особенности расположены симметрично относительно начала координат. Подобного эффекта не наблюдалось в исследованиях В.А.Ильина. Ядра дробного порядка, изученные В.А.Ильиным, имели только одну особую точку. Еще одно обстоятельство отличает функцию Грина двумерного гармонического осциллятора от функции Грина краевых задач в ограниченной области. Функция Грина краевой задачи на плоской ограниченной области имеет логарифмическую особенность. В то же время функция Грина двумерного гармонического осциллятора имеет степенные особенности. Однако степень указанной особенности гораздо меньше, чем степенная особенность функции Грина трехмерной краевой задачи в ограниченной области.

**Ключевые слова**: функция Грина, функция источника, собственные функции, двумерный гармонический осциллятор.

З.Ю. Фазуллин
Башқұрт мемлекеттік университеті, Уфа қ., Ресей
e-mail: fazullinzu@mail.ru

**Екі өлшемді гармоникалық осциллятордың Грин функциясының кескінделуі**

1933 жылы Курант Р. мен Гильберт Д. тіктөртбұрышта Лаплас операторы үшін Дирихле есебінің меншікті функциялары бойынша қайнар көз функциясының формалды жіктелуін қарастырды. Көрсетілген қатар тіктөртбұрыштың ішкі нүктелерінің кез-келген жұбы үшін жинақтала алмайтыны белгілі болды. Сондықтан қатардың жинақтылығы тек шартты болуы мүмкін. Онда шартты жинақтылық үшін қосындылау тәртібі маңызды. Мұндай жіктелулер В.А. Ильиннің еңбектерінде жүйелі түрде зерттелген. Бұл жұмыста екі өлшемді гармоникалық осциллятордың меншікті функциялары бойынша қайнар көз функциясының жіктелуінің жинақталуы зерттелген. Екі өлшемді гармоникалық осциллятордың Грин функциясының түрі алынды. Грин функциясының ерекшеліктері көрсетілген. Нәтижесінде екі өлшемді гармоникалық осциллятор үшін Грин функциясының екі ерекше нүктесі бар екені анықталды. Ерекшеліктер координаттар басына қарағанда симметриялы орналасқан. Мұндай әсер В.А. Ильиннің зерттеулерінде байқалған емес. В.А. Ильин зерттеген бөлшек ретті ядролардың бір ғана ерекше нүктесі болды. Тағы бір жағдай екі өлшемді гармоникалық осциллятордың Грин функциясын шенелген облыста шеттік есептердің Грин функциясынан ажыратады: жазық шенелген облыста шеттік есептің Грин функциясының логарифмдік ерекшелігі, ал екі өлшемді гармоникалық осциллятордың Грин функциясының дірежелік ерекшеліктері бар. Алайда, бұл ерекшеліктің дәрежесі шенелген облыстағы үш өлшемді шеттік есептің Грин функциясының дәрежелік ерекшелігінен әлдеқайда аз.

**Түйін сөздер**: Грин функциясы, қайнар көз функциясы, меншікті функциялар, екі өлшемді гармоникалық осциллятор.

Z.Yu. Fazullin
Bashkir State University, Ufa, Russia
e-mail: fazullinzu@mail.ru

**Representation of the Green function of a two-dimensional harmonic oscillator**

In 1933, Courant R. and Hilbert D. considered a formal decomposition of the source function by eigenfunctions of the Dirichlet problem of the Laplace operator on a rectangle. It turned out that the specified series cannot converge absolutely for any pair of internal points of the rectangle. Therefore, the convergence of a series can only be conditional. Then the summation order is important for conditional convergence. Systemically similar decompositions are studied in the works of V. A. Ilyin. In this paper, we investigate the convergence of the source function decomposition with respect to the eigenfunctions of a two-dimensional harmonic oscillator. A representation of the green function of a two-dimensional harmonic oscillator is obtained. The features of the green function are highlighted. As a result, it follows that the green function of a two-dimensional harmonic oscillator has two singular points. The features are located symmetrically relative to the origin. This effect was not observed in the studies of V. A. Ilyin. Fractional order kernels studied By V. A. Ilyin had only one singular point. Another circumstance distinguishes the green function of a two-dimensional harmonic oscillator from the green function of boundary-value problems in a bounded domain. The green function of a boundary value problem on a flat bounded domain has a logarithmic singularity. At the same time, the green function of a two-dimensional harmonic oscillator has power-law features. However, the degree of this singularity is much less than the power-law singularity of the green function of a three-dimensional boundary value problem in a bounded domain.

**Key words**: Green's function, source function, eigenfunctions, two-dimensional harmonic oscillator.

## 1 Введение

Часто линейные дифференциальные операторы на конечном отрезке удобно интерпретировать как конечномерные возмущения вольтерровых операторов. Подобная трактовка позволила получить ряд выдающихся результатов [1–6]. В то же время линейные уравнения с частными производными редко поддаются такой трактовке. Поскольку их фундаментальные решения редко выписываются в явном виде. Однако иногда все же удается получить полезные представления для фундаментальных решений многомерных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В предлагаемой работе найдено представление функции Грина для двумерного гармонического осциллятора.

## 2 Вспомогательные факты о двумерном гармоническом осцилляторе

В функциональном пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ двумерный гармонический осциллятор $B_0$ задается по формуле

$$B_0 = -\triangle + x^2, \quad x^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Спектр оператора $B_0$ хорошо известен и состоит из собственных значений $\lambda_n = 2n + 2$, $n \geq 0$. Соответствующие проекторы на собственные подпространства размерности $n+1$ имеют вид

$$P_n h = \sum_{l=0}^{n} \left\langle h \,\middle|\, \varphi_l^{(n)} \right\rangle \varphi_l^{(n)}$$

где $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^2)$,

$$\varphi_l^{(n)}(x) = f_l(x_1) f_{n-l}(x_2),$$

$f_l(t)$ – нормированная собственная функция одномерного гармонического осциллятора, соответствующая собственному значению $2l+1$, $l \geq 0$.

Хорошо известно, что

$$f_l(t) = \left(2^l l! \sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_l(t),$$

где $H_l(t)$ многочлены Эрмита, причем на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^2$ имеет место глобальная оценка [7]

$$|f_l(t)| \leq \frac{C_0}{\sqrt[4]{2l+1}}.$$

Здесь $C_0$ зависит только от $K$.

Из асимптотической формулы для многочлена $H_l(t)$ [8] и формулы Стирлинга [7] следует, что при $l \gg 1,\ t \in K$

$$f_l(t) = \alpha_l \left\{ \cos\left[ t\sqrt{2l+1} - \frac{l\pi}{2} \right] \left[ u_0(t) - \frac{u_2(t)}{4(2l+1)} + O\left(\frac{1}{l^2}\right) \right] \right\} +$$

$$+\frac{\alpha_l}{2\sqrt{2l+1}}\left\{\sin\left[t\sqrt{2l+1}-\frac{l\pi}{2}\right]\left[u_1(t)-\frac{u_3(t)}{4(2l+1)}+O\left(\frac{1}{l^2}\right)\right]\right\},$$

где $u_0(t)\equiv 1$, $u_l(t)=\int_0^t Lu_{l-1}(t)\,dt, L=-\frac{d^2}{dt^2}+t^2$,

$$\alpha_l=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{2l+1}}\left\{1-\frac{1}{32(2l+1)^2}+O\left(\frac{1}{l^3}\right)\right\}.$$

## 3 Функция Грина двумерного гармонического осциллятора

Оператор $B_0$ самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^2)$ и обратим, причем

$$B_0{}^{-1}F(x)=\int_{\mathbb{R}^2}\varepsilon(x,t)\,F(t)\,dt$$

Функция $\varepsilon(x,t)$ представляет функцию Грина оператора $B_0$ и имеет представление

$$\varepsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+2}\sum_{l=0}^{n}f_l(x_1)f_{n-l}(x_2)f_l(t_1)f_{n-l}(t_2).$$

Детально исследуем правую часть последнего ряда. Подобного рода ряды встречаются довольно часто в математической физике. Согласно терминологии В.А.Ильина подобные представления являются разложениями функции источника в виде билинейного ряда по собственным функциям [9]. Систематические исследования подобных рядов и их различных обобщений можно найти в работах [10, 11]. В случае ограниченных областей с гладкими границами для разложений по собственным функциям оператора Лапласа В.А.Ильин показал, что такие ряды не могут сходиться абсолютно. Возможно только условная сходимость подобных рядов. При условной сходимости рядов важную роль играет порядок суммирования отдельных слагаемых. В.А.Ильин в своих исследованиях указал такой порядок слагаемых, что сумма ряда может иметь особенности специального вида.

С другой стороны, обычно функция Грина представляет сумму фундаментального решения и компенсирующей (гладкой) функции. Таким образом, методы суммирования В.А.Ильина позволяют исследовать возможные особенности фундаментального решения.

Оказывается, что в случае двумерного гармонического осциллятора особенности фундаментального решения удается определить классическими методами. Не привлекая аппарат формулы среднего значения, которым пользовался В.А.Ильин.

Также отметим, двумерный гармонический осциллятор исследуется на всей плоскости, а не в ограниченной области.

В работе [12] доказано, что на любом компакте $K\subset\mathbb{R}^2$ и при $n\to\infty$ верна асимптотическая формула

$$\sum_{l=0}^{n}f_l(x_1)f_{n-l}(x_2)f_l(t_1)f_{n-l}(t_2)=\frac{1}{2\pi}J_0\left(\sqrt{2n+2}\,|x-t|\right)+$$

$$+\frac{(-1)^n}{2\pi}J_0\left(\sqrt{2n+2}\,|x+t|\right)+r_n\,(x,t)\,,\;x\in K,\;t\in K$$

где $J_0\,(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода, $r_n\,(x,t)$ при каждом $\sigma\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ допускает оценку

$$|r_n\,(x,t)|\leq\frac{C_1}{n^{\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{2}}}+\frac{C_2}{n^{1-\frac{3\sigma}{2}}}$$

причем $C_1,\;C_2>0$ и зависят только от $\sigma$ и $K$.

Поскольку при больших $\beta\to\infty$ верна асимптотика

$$J_0\,(\beta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(\beta-\frac{\pi}{4})\,[1+o(1)]$$

То ряд, определяющий функцию $\varepsilon\,(x,t)$, сходится при $x\neq\pm t$. В точках $x=\pm t$ функция $\varepsilon\,(x,t)$ может иметь особенности. Действительно, для функции Грина справедливо представление

$$\varepsilon\,(x,t)=\sqrt{\frac{2}{|x-t|\,\pi}}\varepsilon_-\,(x,t)+\sqrt{\frac{2}{|x+t|\,\pi}}\varepsilon_+\,(x,t)+k\,(x,t)\,,$$

где $\varepsilon_-\,(x,t)$, $\varepsilon_+\,(x,t)$, $k\,(x,t)$ – непрерывные функций двух переменных $(x,t)$.

Заметим, что

$$\varepsilon_-\,(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\sqrt{2n+2}\,|x-t|)}{(2n+2)^{5/4}}\,(1+O(1))\,,$$

$$\varepsilon_+\,(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\sqrt{2n+2}\,|x+t|)}{(2n+2)^{5/4}}\,(1+O(1))\,.$$

Таким образом, нами доказана теорема.

**Теорема 1** *Функция Грина $\varepsilon\,(x,t)$ двумерного гармонического осциллятора определена при всех $x\neq\pm t$ и является непрерывной функцией от $(x,t)$ на области определения. Больше того, для функций Грина $\varepsilon\,(x,t)$ справедливо представление*

$$\varepsilon\,(x,t)=\sqrt{\frac{2}{|x-t|\,\pi}}\varepsilon_-\,(x,t)+\sqrt{\frac{2}{|x+t|\,\pi}}\varepsilon_+\,(x,t)+k\,(x,t)\,.$$

**Замечание 1** *Более детальный анализ позволяет утверждать, что функций $\varepsilon_-\,(x,t)$, $\varepsilon_+\,(x,t)$, $k\,(x,t)$ имеют дробные производные по $t_1$ и $t_2$, порядок которых меньше $0.5$.*

## Список литературы


[1] Birkhoff G.D., "On the asymptotic characters of the solution of certain linear differential equations containing a parameter *Trans. Amer. Math. Soc.* **9** (1908): 219-231.

[2] Birkhoff G.D., "Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations *Trans. Amer. Math. Soc.* **9** (1908): 373-395.

[3] Тамаркин Я.Д., *О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений* (Петроград, 1917).

[4] Stone M.H., "A comparision of the series of Fourier and Birkhoff *Trans. Amer. Math. Soc.* **28** (1926): 695-761.

[5] Келдыш М.В., "О собственных значениях и собственных функциях некоторых кассов несамосопряженных линейных уравнений *Докл. АН СССР* **77**:1 (1951): 11-14.

[6] Хромов А.П., "Конечномерные возмущения вольтерровых операторов *Современная математика. Фундаментальные направления* **10** (2004): 3-162.

[7] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б., *Специальные функций математической физики* (М.: Наука, 1984).

[8] Сеге Г., *Ортогональные многочлены* (М.: ГИФМЛ, 1962).

[9] Ильин В.А., "Представление функции источника для прямоугольника в виде билинейного ряда по собственным функциям *Докл. АН СССР* **74**:3 (1950): 413-416.

[10] Ильин В.А., "Ядра дробного порядка *Матем. сборник* **41(83)**:4 (1957): 459-480.

[11] Ильин В.А., "О разложимости функций, обладающих особенностями, в условно сходящийся ряд по собственным функциям *Изв. АН СССР, сер. матем.* **22**:1 (1958): 49-80.

[12] Fazullin Z.Yu. and Murtazin Kh.Kh., "Regularized trace of a two-dimensional harmonic oscillator *Sb. Math.* **192**:5 (2001): 725–761.


## References


[1] Birkhoff G.D., "On the asymptotic characters of the solution of certain linear differential equations containing a parameter *Trans. Amer. Math. Soc.* **9** (1908): 219-231.

[2] Birkhoff G.D., "Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations *Trans. Amer. Math. Soc.* **9** (1908): 373-395.

[3] Tamarkin Ya.D., *O nekotoryh obshchih zadachah teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [On some General problems of the theory of ordinary differential equations]* (Petrograd, 1917).

[4] Stone M.H., "A comparision of the series of Fourier and Birkhoff *Trans. Amer. Math. Soc.* **28** (1926): 695-761.

[5] Keldysh M.V., "O sobstvennyh znacheniyah i sobstvennyh funkciyah nekotoryh kassov nesamosopryazhennyh linejnyh uravnenij [On eigenvalues and eigenfunctions of certain casses of non-self-adjoint linear equations] *Doklady Akad. Nauk SSSR* **77**:1 (1951): 11-14.

[6] Khromov A.P., "Konechnomernye vozmushcheniya vol'terrovyh operatorov [Finite-dimensional perturbations of Voltaire operators] *Modern mathematics. Fundamental direction* **10** (2004): 3-162.

[7] Nikiforov A.F., Uvarov V.B., *Special'nye funkcij matematicheskoj fiziki [Special functions of mathematical physics]* (M: Science, 1984).

[8] Sege G., *Ortogonal'nye mnogochleny [Orthogonal polynomials]* (M.: GIFML, 1962).

[9] Ильин В.А., "Представление функции источника для прямоугольника в виде билинейного ряда по собственным функциям *Doklady Akad. Nauk SSSR* **74**:3 (1950): 413-416.

[10] Il'in V.A., "Yфdra drobnogo poryadka [The kernel of fractional order] *Sb. Math.* **41(83)**:4 (1957): 459-480.

[11] Il'in V.A., "O razlozhimosti funkcij, obladayushchih osobennostyami, v uslovno skhodyashchijsya ryad po sobstvennym funkciyam [On the decomposability of functions with singularities into a conditionally convergent series by eigenfunctions] *Izvestia of the USSR Academy of Sciences* **22**:1 (1958): 49-80.

[12] Fazullin Z.Yu. and Murtazin Kh.Kh., "Regularized trace of a two-dimensional harmonic oscillator *Sb. Math.* **192**:5 (2001): 725–761.