МРНТИ 27.39.21 DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v107.i3.02

Б.Н. Даулетбай
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
Назарбаев Интеллектуальная школа физико-математического направления, г. Алматы, Казахстан
e-mail: dauletbay_b@fmalm.nis.edu.kz

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА В ФОРМЕ М.В. КЕЛДЫША ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Одной из главных проблем спектральной теории линейных операторов является вопрос о спектральном разложении операторов. Из курса "Функциональный анализ" нам известно, что самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве допускает единственное спектральное разложение. В 1971 году М.В. Келдыш в своей работе определил коэффициенты главной части разложений Лорана для резольвенты вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве (при этом про сходимость ряда ничего не сказано). Данные коэффициенты он определил методом решения систем дифференциальных уравнений. П. Ланкастер в своей монографии сформулировал теорию спектрального разложения для квадратичных матриц, но определил коэффициенты разложения только для специальных (симметричных) матриц. Данная работа посвящена вопросу спектрального разложения произвольного линейного оператора в конечномерном пространстве. Целью работы является определить коэффициенты разложения Лорана для произвольного линейного оператора в конечномерном пространстве через базисные элементы данного и сопряженного ему оператора. В ходе исследования были доказаны некоторые свойства компонентов линейного оператора, а также была доказана спектральная теорема в форме М.В. Келдыша для произвольного линейного оператора в конечномерном пространстве. Все коэффициенты разложения совпадали с найденными коэффициентами главной части разложения Лорана для резольвенты вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве, вычисленных в работе М.В. Келдыша, но в этой работе они вычислены уже функциональным методом. Доказанная теорема имеет огромную значимость в исследовании спектральных свойств возмущенных линейных операторов в конечномерном пространстве.

Ключевые слова: спектральная теорема, спектральное разложение, базисные элементы, компонентные операторы, резольвента, собственные значения, собственные проекторы.

Б.Н. Даулетбай
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
Физика-математика бағытындағы Назарбаев Зияткерлік мектебі, Алматы қ., Қазақстан
e-mail: dauletbay_b@fmalm.nis.edu.kz

Ақырлы өлшемді кеңістікте анықталған кез келген сызықтық оператор үшін М.В. Келдыш түріндегі спектралды теорема

Сызықтық операторлардың спектралды теориясының басты мәселелерінің бірі операторлардың спектралды жіктелу сұрағы болып табылады. Гильберт кеңістігінде анықталған өзіне-өзі түйіндес оператордың спектралды жіктелетіндігі туралы бізге "Функционалдық анализ" курсынан белгілі. 1971 жылы М.В. Келдыш өзінің жұмысында Гильберт кеңістігінде анықталған толық үзіліссіз оператордың резольвентасы үшін Лоран қатарларының бас бөліктерінің коэффициенттерін анықтап шықты (бірақ қатардың жинақтылығы туралы ештеңе айтылмаған). Бұл коэффициенттерді ол дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу әдісімен анықтады. П. Ланкастер өзінің монографиясында матрицалар үшін спектралды жіктелу теориясын құрды, бірақ жіктелу коэффициенттерін тек арнайы (симметриялы) матрицалар үшін ғана анықтады. Бұл жұмыс ақырлы өлшемді кеңістікте анықталған кез келген сызықтық оператордың спектралды жіктелу сұрағына арналған. Жұмыстың мақсаты - ақырлы өлшемді кеңістікте анықталған сызықтық оператордың резольвентасы үшін Лоран қатарының коэффициенттерін осы оператор мен оған түйіндес оператордың базистік элементтері арқылы анықтау. Зерттеу барысында сызықтық оператордың компоненттерінің кейбір қасиеттері және ақырлы өлшемді кеңістікте анықталған кез келген сызықтық оператор үшін М.В. Келдыш түріндегі спектралды теорема дәлелденді. Жіктелу коэффициенттері М.В. Келдыштың жұмысында келтірілген Гильберт кеңістігінде анықталған толық үзіліссіз оператордың резольвентасы үшін Лоран қатарларының бас бөліктері коэффициенттерімен сәйкес келді, бірақ бұл жұмыста олар функционалдық әдіспен анықталды. Дәлелденген теореманың ақырлы өлшемді кеңістікте анықталған сызықтық операторлардың ауытқуларының спектралды қасиеттерін зерттеуде маңызы зор.

Түйін сөздер: спектралды теорема, спектралды жіктелу, базистік элементтер, компоненттік операторлар, резольвента, меншікті мәндер, меншікті проекторлар.

B.N. Dauletbay
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
Nazarbayev Intellectual school of Physics and Mathematics, Almaty, Kazakhstan
e-mail: dauletbay_b@fmalm.nis.edu.kz

Spectral theorem in the form of M. V. Keldysh for an arbitrary linear operator in a finite-dimensional space

One of the main problems of the spectral theory of linear operators is the question of the spectral decomposition of operators. We know from the course "Functional analysis"that a self-adjoint operator in a Hilbert space admits a unique spectral decomposition. In 1971, M.V. Keldysh in his work determined the coefficients of the main part of the Laurent expansions for the resolvent of a completely continuous operator in a Hilbert space (while nothing is said about the convergence of the series). He determined these coefficients by solving systems of differential equations. P. Lancaster in his monograph formulated the theory of spectral expansion for quadratic matrices, but determined the expansion coefficients only for special (symmetric) matrices. This paper is devoted to the spectral decomposition of an arbitrary linear operator in a finite-dimensional space. The aim of this work is to determine the coefficients of the Laurent expansion for an arbitrary linear operator in a finite-dimensional space through the basis elements of this and its adjoint operator. In the course of the research, some properties of the components of the linear operator were proved, and a spectral theorem in the form of M.V. Keldysh was proved for an arbitrary linear operator in a finite-dimensional space. All the coefficients of the expansion coincided with the coefficients of the main part of the Laurent expansion found for the resolvent of a completely continuous operator in Hilbert space, calculated in the work of M.V. Keldysh,but in this work they are calculated by the functional method. The proved theorem is of great importance in the study of the spectral properties of perturbed linear operators in a finite-dimensional space.

Key words: spectral theorem, spectral decomposition, basic elements, component operators, resolvent, eigenvalues, eigenprojectors.

1 Введение. Постановка задачи

Пусть X – конечномерное пространство размерности n.

Известно, что оператор $X \to X$ в некотором базисе, состоящем из его собственных элементов, имеет так называемую диагональную форму. Следовательно, если оператор T имеет n линейно независимых собственных элементов, то приводится к диагональному виду. Однако количество линейно независимых собственных элементов у линейного оператора T может оказаться меньше, чем n. В таком случае выбирается некоторый базис пространства X и линейный оператор T приводится к так называемой жордановой нормальной форме. К примеру, в книге [1, с. 200] приведено следующее утверждение.

Утверждение 1 *Пусть $T-$ произвольный линейный оператор в комплексном пространстве X размерности $n < \infty$. Предположим, что у оператора T имеется $s\,(s \le n)$ линейно независимых собственных элементов $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_s$, соответствующих собственным значениям $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s$.*

Тогда существует базис, состоящий из $s\,(s \le n)$ групп элементов

$$x_1, x_{11}, ..., x_{1,m_1}; x_2, x_{21}, ..., x_{2,m_2}; ...; x_s, x_{s1}, ..., x_{s,m_s},$$

в котором оператор T имеет следующий вид:

$$\begin{array}{llll}
Tx_1 = \lambda_1 x_1, & Tx_{11} = \lambda_1 x_{11} + x_1, & \ldots, & Tx_{1,m_1} = \lambda_1 x_{1,m_1} + x_{1,m_1-1};\\
Tx_2 = \lambda_2 x_2, & Tx_{21} = \lambda_2 x_{21} + x_2, & \ldots, & Tx_{2,m_2} = \lambda_2 x_{2,m_2} + x_{2,m_2-1};\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
Tx_s = \lambda_s x_s, & Tx_{s1} = \lambda_s x_{s1} + x_s, & \ldots, & Tx_{s,m_s} = \lambda_s x_{s,m_s} + x_{s,m_s-1}.
\end{array}$$

Утверждение 1 можно применить к сопряженному оператору T^*. Следовательно, у оператора T^* имеется $s\,(s \le n)$ линейно независимых собственных элементов $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_s$, соответствующих собственным значениям $\overline{\lambda_1},\ \overline{\lambda_2},\ \ldots,\ \overline{\lambda_s}$. Тогда существует базис, состоящий из $s\,(s \le n)$ групп элементов

$$y_1, y_{11}, \ldots, y_{1,m_1}; \quad y_2, y_{21}, \ldots, y_{2,m_2}; \quad \ldots; \quad y_s, y_{s1}, \ldots, y_{s,m_s},$$

в котором оператор T^* имеет следующий вид:

$$\begin{array}{llll}
T^*y_1 = \overline{\lambda_1} y_1, & T^*y_{11} = \overline{\lambda_1} y_{11} + y_1, & \ldots, & T^*y_{1,m_1} = \overline{\lambda_1} y_{1,m_1} + y_{1,m_1-1};\\
T^*y_2 = \overline{\lambda_2} y_2, & T^*y_{21} = \overline{\lambda_2} y_{21} + y_2, & \ldots, & T^*y_{2,m_2} = \overline{\lambda_2} y_{2,m_2} + y_{2,m_2-1};\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
T^*y_s = \overline{\lambda_s} y_s, & T^*y_{s1} = \overline{\lambda_s} y_{s1} + y_s, & \ldots, & T^*y_{s,s} = \overline{\lambda_s} y_{s,m_s} + y_{s,m_s-1}.
\end{array}$$

В монографии [2, с. 163] приведено следующее

Утверждение 2 *Пусть T – произвольный линейный оператор в комплексном пространстве X размерности $n < \infty$, а скалярная функция f определена на спектре T. Тогда существуют такие независимые от f операторы Z_{kj}, что*

$$f\,(T) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_k+1} f^{(j-1)}\,(\lambda_k)\, Z_{kj}. \tag{1}$$

Операторы Z_{kj} называются компонентами оператора T.

Поставлена следующая задача: определить компоненты Z_{kj}, используя базисные элементы операторов T и T^*.

2 Основные результаты

Пусть $f(T) = \mathcal{R}(\lambda; T) = (T - \lambda I)^{-1}$. Тогда для $k = 1, 2, ..., s$ функция f принимает значения $f(\lambda_k) = \dfrac{1}{\lambda_k - \lambda}$, а

$$f^{(j-1)}(\lambda_k) = \frac{(-1)^{j-1}(j-1)!}{(\lambda_k - \lambda)^j} = \frac{(-1)^{j-1}(j-1)!}{(-1)^j(\lambda - \lambda_k)^j} = -\frac{(j-1)!}{(\lambda - \lambda_k)^j}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{R}(\lambda; T) = -\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k+1}\frac{(j-1)!}{(\lambda - \lambda_k)^j}Z_{kj}. \tag{2}$$

Так как операторы Z_{kj} не зависят от f, мы сможем определить их значения, используя свойства резольвенты оператора T.

Проинтегрируем обе части равенства (2) по контуру $|\lambda - \lambda_p| = \varepsilon$ $(1 \le p \le s)$. Оператор вычетов резольвенты $\mathcal{R}(\lambda; T)$ справа равен Z_{k1}. Таким образом, из теоремы о вычетах получаем равенство

$$\oint_{|\lambda-\lambda_p|=\varepsilon}\mathcal{R}(\lambda; T)\,d\lambda = -2\pi i Z_{p1}.$$

И для всех $k = 1, 2, ..., s$ получаем

$$Z_{k1} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon}\mathcal{R}(\lambda; T)\,d\lambda.$$

Проведенное рассуждение может быть легко обобщено до получения формул всех компонент в виде контурных интегралов. Умножим сначала обе части равенства (2) на $(\lambda - \lambda_p)^q$ $(0 \le q \le m_p)$ и затем проинтегрируем их по контуру $|\lambda - \lambda_p| = \varepsilon$ $(1 \le p \le s)$. Таким образом,

$$\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon}(\lambda - \lambda_p)^q\,\mathcal{R}(\lambda; T)\,d\lambda = -\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k+1}(j-1)!Z_{kj}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon}\frac{(\lambda - \lambda_p)^q}{(\lambda - \lambda_k)^j}d\lambda.$$

Ненулевые интегралы справа – это те, для которых $k = p, j = q + 1$, и этот интеграл имеет значение $2\pi i$, то есть

$$\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon}\frac{(\lambda - \lambda_p)^q}{(\lambda - \lambda_k)^j}d\lambda = \begin{cases} 2\pi i, & \text{если} \quad k = p, \quad j = q+1 \\ 0, & \text{если} \quad k \ne p, \quad j \ne q+1 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon} (\lambda-\lambda_p)^q \mathcal{R}(\lambda;T)\,d\lambda = -(2\pi i)\,q!Z_{p,q+1}.$$

В общем виде, для $k=1,2,...,s;\ j=1,2,...,m_k+1$ получаем

$$Z_{kj} = -\frac{1}{(j-1)!2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon} (\lambda-\lambda_k)^{j-1} \mathcal{R}(\lambda;T)\,d\lambda. \tag{3}$$

Вышеизложенные вычисления есть в монографии [2, с. 176-177].

Из данных вычислений мы получаем следующие теоремы.

Теорема 1 *Для всех $k=1,2,...,s;\ j=1,2,...,m_k$ имеет место равенство*

$$Z_{k,j+1} = \frac{1}{j}(T-\lambda_k I)\,Z_{kj}. \tag{4}$$

Доказательство. Вычислим значение $(T-\lambda_k I)\,Z_{kj}$ для всех $k=1,2,...,s;\ j=1,2,...,m_k$.

$$\begin{aligned}
&(T-\lambda_k I)\,Z_{kj} = (T-\lambda_k I)\left[-\frac{1}{(j-1)!2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon} (\lambda-\lambda_k)^{j-1} \mathcal{R}(\lambda;T)\,d\lambda\right] = \\
&= -\frac{1}{(j-1)!2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon} (\lambda-\lambda_k)^{j-1}(T-\lambda_k I)\,\mathcal{R}(\lambda;T)\,d\lambda = \\
&= -\frac{1}{(j-1)!2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon} (\lambda-\lambda_k)^{j-1}(T-\lambda I+\lambda I-\lambda_k I)\,\mathcal{R}(\lambda;T)\,d\lambda = \\
&= -\frac{1}{(j-1)!2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon} (\lambda-\lambda_k)^{j-1}(T-\lambda I)\,\mathcal{R}(\lambda;T)\,d\lambda - \\
&-\frac{1}{(j-1)!2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon} (\lambda-\lambda_k)^{j-1}(\lambda-\lambda_k)\,I\mathcal{R}(\lambda;T)\,d\lambda = \\
&= -\frac{1}{(j-1)!2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon} (\lambda-\lambda_k)^{j-1}\,d\lambda - \frac{1}{(j-1)!2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon} (\lambda-\lambda_k)^{j} \mathcal{R}(\lambda;T)\,d\lambda = \\
&= 0 - \frac{1}{(j-1)!2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon} (\lambda-\lambda_k)^{j} \mathcal{R}(\lambda;T)\,d\lambda = \\
&= -\frac{j}{j!2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon} (\lambda-\lambda_k)^{j} \mathcal{R}(\lambda;T)\,d\lambda = jZ_{k,j+1}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $Z_{k,j+1} = \frac{1}{j}(T-\lambda_k I)\,Z_{kj}$. Теорема доказана.

Приведем следующее следствие, полученной из теоремы 1.

Следствие 1 *Для $k=1,2,...,s,\ \ j=1,2,...,m_k+1$ выполняется равенство*

$$Z_{kj} = \frac{1}{(j-1)!}(T-\lambda_k I)^{j-1}\,Z_{k1}. \tag{5}$$

Для Z_{k1} равенство (5) очевидно. Для $j = 2, ..., m_k + 1$ получаем

$$Z_{k,j} = \frac{1}{j-1}\left(T - \lambda_k I\right) Z_{k,j-1} = \frac{1}{j-1}\left(T - \lambda_k I\right)\frac{1}{(j-1)-1}\left(T - \lambda_k I\right) Z_{k,(j-1)-1} =$$
$$= \frac{1}{(j-1)(j-2)}\left(T - \lambda_k I\right)^2 \frac{1}{(j-1)-2}\left(T - \lambda_k I\right)\ldots\frac{1}{(j-1)-(j-2)} Z_{k,j-1-(j-2)} =$$
$$= \ldots = \frac{1}{(j-1)!}\left(T - \lambda_k I\right)^{j-1} Z_{k1}.$$

Значит, $Z_{kj} = \frac{1}{(j-1)!}\left(T - \lambda_k I\right)^{j-1} Z_{k1},\ k = 1, 2, ..., s,\ \ j = 1, 2, ..., m_k + 1.$

Теорема 2 *Для всех $k = 1, 2, ..., s$ имеет место равенство*

$$\left(T - \lambda_k I\right) m_k! Z_{k,m_k+1} = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Для Z_{k,m_k+1} имеем

$$\left(T - \lambda_k I\right) Z_{k,m_k+1} = -\frac{1}{m_k! 2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon}\left(\lambda - \lambda_k\right)^{m_k}\left(T - \lambda_k I\right)\mathcal{R}\left(\lambda; T\right) d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{m_k! 2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon}\left(\lambda - \lambda_k\right)^{m_k+1}\mathcal{R}\left(\lambda; T\right) d\lambda.$$

$$\left(T - \lambda_k I\right) m_k! Z_{k,m_k+1} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon}\left(\lambda - \lambda_k\right)^{m_k+1}\mathcal{R}\left(\lambda; T\right) d\lambda.$$

Так как функция $\left(\lambda - \lambda_k\right)^{m_k+1}\mathcal{R}\left(\lambda; T\right)$ аналитична внутри $|\lambda - \lambda_k| = \varepsilon$, для всех $k = 1, 2, ..., s$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon}\left(\lambda - \lambda_k\right)^{m_k+1}\mathcal{R}\left(\lambda; T\right) d\lambda = 0.$$

Отсюда $\left(T - \lambda_k I\right) m_k! Z_{k,m_k+1} = 0$. Теорема доказана.

По данной теореме, компонента $m_k! Z_{k,m_k+1}$ есть собственный проектор оператора T, соответствующий собственному значению λ_k.

Из следствия 1 и теоремы 2 получаем следующее следствие.

Следствие 2 *Для $k = 1, 2, ..., s$ выполняется равенство*

$$\left(T - \lambda_k I\right)^{m_k+1} Z_{k1} = 0.$$

Действительно, $\left(T - \lambda_k I\right)^{m_k+1} Z_{k1} = m_k!\left(T - \lambda_k I\right) Z_{k,m_k+1} = 0.$

Для резольвенты $\mathcal{R}\left(\lambda; T\right)$ оператора T имеем

$$\mathcal{R}\left(\lambda; T\right) = -\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k+1}\frac{(j-1)!}{\left(\lambda - \lambda_k\right)^j} Z_{kj},$$

отсюда

$$(\mathcal{R}(\lambda;T))^* = \left(-\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k+1}\frac{(j-1)!}{(\lambda-\lambda_k)^j}Z_{kj}\right)^* = -\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k+1}\frac{(j-1)!}{\left(\overline{\lambda}-\overline{\lambda_k}\right)^j}Z_{kj}^*.$$

Так как, $(\mathcal{R}(\lambda;T))^* = \mathcal{R}\left(\overline{\lambda};T^*\right)$,то

$$\mathcal{R}\left(\overline{\lambda};T^*\right) = -\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k+1}\frac{(j-1)!}{\left(\overline{\lambda}-\overline{\lambda_k}\right)^j}Z_{kj}^*.$$

Итак, мы пришли к следующему выводу: если Z_{kj} есть компонента оператора T, то Z_{kj}^* есть компонента оператора T^*.

Лемма 1 $\left(T^*-\overline{\lambda_k}I\right)Z_{kj}^* = Z_{kj}^*\left(T^*-\overline{\lambda_k}I\right)$.

Доказательство. Применяя для $\mathcal{R}\left(\overline{\lambda};T^*\right)$ лемму 1, получаем

$$Z_{k,j+1}^* = \frac{1}{j}\left(T^*-\overline{\lambda_k}I\right)Z_{kj}^*. \tag{7}$$

С другой стороны,

$$(Z_{k,j+1})^* = \left(\frac{1}{j}(T-\lambda_k I)Z_{kj}\right)^*;$$

$$Z_{k,j+1}^* = \frac{1}{j}Z_{kj}^*\left(T^*-\overline{\lambda_k}I\right).$$

Тогда $\frac{1}{j}\left(T^*-\overline{\lambda_k}I\right)Z_{kj}^* = \frac{1}{j}Z_{kj}^*\left(T^*-\overline{\lambda_k}I\right)$. Следовательно,

$$\left(T^*-\overline{\lambda_k}I\right)Z_{kj}^* = Z_{kj}^*\left(T^*-\overline{\lambda_k}I\right).$$

Итак, мы собрали все нужные данные о компонентах Z_{kj} для доказательства следующей важной теоремы.

Теорема 3 *Пусть оператор $T: X \to X$ такой, что выполнено утверждение 1 и сохранены его обозначения. Тогда для произвольной скалярной функции f, у которой определены значения*

$$\begin{array}{l} f(\lambda_1), f'(\lambda_1), ..., f^{(m_1)}(\lambda_1) \\ f(\lambda_2), f'(\lambda_2), ..., f^{(m_2)}(\lambda_2) \\ \dots \\ f(\lambda_s), f'(\lambda_s), ..., f^{(m_s)}(\lambda_s), \end{array}$$

выполнено следующее операторное соотношение

$$f(T) = \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k+1} f^{(j-1)}(\lambda_k)Z_{kj}, \tag{8}$$

где

$$Z_{k1} = x_{k,m_k}y_k^* + x_{k,m_k-1}y_{k,1}^* + ... + x_k y_{k,m_k}^*,$$

$$Z_{k2} = \frac{1}{1!}\left(x_{k,m_k-1}y_k^* + x_{k,m_k-2}y_{k,1}^* + ... + x_k y_{k,m_k-1}^*\right),$$

$$Z_{k3} = \frac{1}{2!}\left(x_{k,m_k-2}y_k^* + x_{k,m_k-3}y_{k,1}^* + ... + x_k y_{k,m_k-2}^*\right),$$

$$\ldots$$

$$Z_{k,m_k-1} = \frac{1}{(m_k-2)!}\left(x_{k,2}y_k^* + x_{k,1}y_{k,1}^* + x_k y_{k,2}^*\right),$$

$$Z_{k,m_k} = \frac{1}{(m_k-1)!}\left(x_{k,1}y_k^* + x_k y_{k,1}^*\right),$$

$$Z_{k,m_k+1} = \frac{1}{m_k!}x_k y_k^*.$$

Здесь и в дальнейшем принято следующее обозначение, введенное М.В. Келдышом [3]: через xy^* обозначим оператор

$$(xy^*)\,a = \langle a, y\rangle\, x,$$

где $\langle a, y\rangle$ – линейный непрерывный функционал относительно элемента $a \in X$.

Доказательство. Так как компонента $m_k!Z_{k,m_k}$ есть собственный проектор оператора T, соотсветствующий собственному значению λ_k, а компонента $m_k!Z^*_{k,\underline{m_k}}$ есть собственнный проектор опертора T^*, соответствующий собственному значению $\overline{\lambda_k}$, спарведливо равенство

$$m_k!Z_{k,m_k} = x_k y_k^*$$

Отсюда компонента Z_{k,m_k+1} принимает значение

$$Z_{k,m_k+1} = \frac{1}{m_k!}x_k y_k^*.$$

Из равенства (4) получаем

$$Z_{k,m_k+1} = \frac{1}{m_k}\left(T - \lambda_k I\right) Z_{k,m_k}.$$

Тогда

$$\frac{1}{m_k}\left(T - \lambda_k I\right) Z_{k,m_k} = \frac{1}{m_k!}x_k y_k^*;$$

$$\left(T - \lambda_k I\right) Z_{k,m_k} = \frac{1}{(m_k-1)!}x_k y_k^*. \tag{9}$$

А из равенства (7)

$$\left(T^* - \lambda_k I\right) Z^*_{k,m_k} = \frac{1}{(m_k - 1)!} y_k x^*_k. \tag{10}$$

Принимая во внимание равенства (9) и (10), получаем

$$Z_{k,m_k} = \frac{1}{(m_k - 1)!}\left(x_{k,1} y^*_k + x_k y^*_{k,1}\right)$$

Далее, по индукционному предположению находим значения остальных компонент $Z_{k,m_k-1}, Z_{k,m_k-2}, ..., Z_{k,1}$.
Для компоненты Z_{k,m_k-1}

$$Z_{k,m_k} = \frac{1}{m_k - 1}\left(T - \lambda_k I\right) Z_{k,m_k-1} = \frac{1}{(m_k - 1)!}\left(x_{k,1} y^*_k + x_k y^*_{k,1}\right);$$

$$\left(T - \lambda_k I\right) Z_{k,m_k-1} = \frac{1}{(m_k - 2)!}\left(x_{k,1} y^*_k + x_k y^*_{k,1}\right);$$

$$Z_{k,m_k-1} = \frac{1}{(m_k - 2)!}\left(x_{k,2} y^*_k + x_{k,1} y^*_{k,1} + x_k y^*_{k,2}\right).$$

И так далее, для компоненты $Z_{k,2}$ получаем

$$Z_{k,3} = \frac{1}{2}\left(T - \lambda_k I\right) Z_{k,2} = \frac{1}{2!}\left(x_{k,m_k-2} y^*_k + x_{k,m_k-3} y^*_{k,1} + ... + x_k y^*_{k,m_k-2}\right)$$

$$\left(T - \lambda_k I\right) Z_{k,2} = \frac{1}{1!}\left(x_{k,m_k-2} y^*_k + x_{k,m_k-3} y^*_{k,1} + ... + x_k y^*_{k,m_k-2}\right),$$

$$Z_{k2} = \frac{1}{1!}\left(x_{k,m_k-1} y^*_k + x_{k,m_k-2} y^*_{k,1} + ... + x_k y^*_{k,m_k-1}\right).$$

Для компоненты $Z_{k,1}$ получаем

$$Z_{k,2} = \left(T - \lambda_k I\right) Z_{k,1} = \frac{1}{1!}\left(x_{k,m_k-1} y^*_k + x_{k,m_k-2} y^*_{k,1} + ... + x_k y^*_{k,m_k-1}\right),$$

$$Z_{k1} = x_{k,m_k} y^*_k + x_{k,m_k-1} y^*_{k,1} + ... + x_k y^*_{k,m_k}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3 называется спектральной теоремы в форме М.В. Келдыша для произвольного линейного оператора в конечномерном пространстве.

Приведем одно полезное следствие данной теоремы.

Следствие 3 *Пусть оператор $T : X \to X$ такой, что выполнено утверждение 1 и сохранены его обозначения. Тогда для функции $f(t) = \frac{1}{t-\lambda}$ выполнено следующее операторное соотношение*

$$\mathcal{R}(\lambda; T) = -\sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_k+1} \frac{(j-1)!}{(\lambda - \lambda_k)^j} Z_{kj},$$

где

$$Z_{k1} = x_{k,m_k} y^*_k + x_{k,m_k-1} y^*_{k,1} + ... + x_k y^*_{k,m_k},$$

$$
\begin{aligned}
&Z_{k2} = \frac{1}{1!}\left(x_{k,m_k-1}y_k^* + x_{k,m_k-2}y_{k,1}^* + ... + x_k y_{k,m_k-1}^*\right),\\
&Z_{k3} = \frac{1}{2!}\left(x_{k,m_k-2}y_k^* + x_{k,m_k-3}y_{k,1}^* + ... + x_k y_{k,m_k-2}^*\right),\\
&\ldots\\
&Z_{k,m_k-1} = \frac{1}{(m_k-2)!}\left(x_{k,2}y_k^* + x_{k,1}y_{k,1}^* + x_k y_{k,2}^*\right),\\
&Z_{k,m_k} = \frac{1}{(m_k-1)!}\left(x_{k,1}y_k^* + x_k y_{k,1}^*\right),
\end{aligned}
$$

Замечание 1 *В случае $s = n$ в монографии [2] отмечено, что все $m_k = 0$ и $Z_{k1} = x_k y_k^*$.*

Новым моментом теоремы 3 является то, что операторы Z_{kj} выписаны через базисные элементы $x_k, x_{k1}, ..., x_{k,m_k}$ оператора T и базисные элементы $y_k, y_{k1}, ..., y_{k,m_k}$ оператора T^* при произвольных m_k.

Замечание 2 *Для вполне непрерывных операторов в Гильбертовом пространстве в работе М.В. Келдыша [3] получено представление главной части разложения Лорана резольвенты в окрестности полюса λ_k :*

$$
\text{главная часть } \mathcal{R}(\lambda; T) = \sum_{j=1}^{m_k+1} \frac{(j-1)!}{(\lambda-\lambda_k)^j} Z_{kj}.
$$

Результат М.В. Келдыша следует из представления (8). Однако в работе М.В. Келдыша нет представления резольвенты на всем резольвентном множестве.

Список литературы

[1] Ланкастер П., *Теория матриц* (Москва: Наука, 1977), 277.

[2] Гельфанд И.М. *Лекции по линейной алгебре* (Москва: Добросвет, МЦНМО, 1998), 320.

[3] Келдыш М.В., "О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряжённых линейных операторов *УМН* **51**:2 (1971): 15-41.

References

[1] Lancaster P., *Matrix Theory* (Moscow: Nauka, 1977), 277.

[2] Gelfand I.M. *Lectures on linear algebra* (Moscow: Dobrosvet, icnmo, 1998), 320.

[3] Keldysh M. V., "On the completeness of eigenfunctions of certain classes of non-self-adjoint linear operators *Advances in mathematical Sciences* **51**:2 (1971): 15-41.