УДК 917.928

[1]Д.Н. Нургабыл, [2] А.Б. Уаисов *

[1] Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова, Республика Казахстан, г. Талдыкорган
[2] Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
* E-mail: uaisov.alpamys@mail.ru

Явление начального скачка в полувырождающейся краевой задаче с нелинейными условиями

В данной работе рассматривается сингулярно возмущенные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с нелинейными краевыми условиями не упорядоченные относительно старших производных. Для коэффициентов разложения найдены рекуррентные линейные дифференциальные уравнения и начальные условия. Найдено вырожденное уравнение. Определены условия для вырожденного уравнения. На отрезке $0 \leq t \leq 1$ построено приближенное решение $Y_N(t,\varepsilon)$ вспомогательной возмущенной начальной задачи с точностью порядка $O(\varepsilon^{N+1})$. Получена равномерная асимптотика решения начальной задачи для сингулярно возмущенного уравнения с точностью до произвольного порядка. Доказано, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ на сегменте $0 \leq t \leq 1$ решение вспомогательной начальной задачи существует, единственно, удовлетворяет оценке $\left|y^{(q)}(t,\varepsilon) - Y_N^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \leq K \cdot \varepsilon^{N+1}$, $q = 0, 1, 2,\ 0 \leq t \leq 1$. Доказана, что в некоторой малой окрестности точки $(\bar{a}_0, \bar{b}_0, \bar{c}_0)$ найдется единственная точка $(a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon))$ такая, что решение $y(t,a,b,c,\varepsilon)$ вспомогательной задачи, является единственным решением $y(t,\varepsilon)$ исходной краевой задачи, и на отрезке $0 \leq t \leq 1$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место оценка $y^{(j)}(t,a(\varepsilon),c(\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k y_k^{(j)}(t) + \varepsilon^{1-j} \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k \underset{k}{\overset{(j)}{V}}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$. Установлены предельные равенства, выражающие связь между решением вырожденной задачи и решением исходной сингулярно возмущенной краевой задачи. Найдена формула начального скачка. Тем самым сформулирован алгоритм построения асимптотического разложения решения возмущенной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с нелинейными краевыми условиями не упорядоченные относительно старших производных.
Ключевые слова: асимптотика, краевая задача, начальный скачок, возмущенные и невозмущенные задачи, асимптотическое поведение.

D.N. Nurgabyl, A.B. Uaisov

The phenomenon of initial jump in semi-degenerate boundary value problem with nonlinear conditions

In this paper we consider a singularly perturbed boundary value problems for ordinary differential equations of the third order with nonlinear boundary conditions, which are not ordered with respect to the highest derivatives. For the expansion coefficients recurrent linear differential equations and initial conditions are found. We found degenerate equation. The conditions for degenerate equation are defined. On the interval $0 \leq t \leq 1$ the approximate solution $Y_N(t,\varepsilon)$ of auxiliary perturbed initial problems with accuracy on the order $O(\varepsilon^{N+1})$. We obtained a uniform asymptotic solution of the initial value problem for a singularly perturbed equation with up to an arbitrary order.

It is proved that for sufficiently small $\varepsilon > 0$ in the segment $0 \le t \le 1$ solution of auxiliary initial value problem exists, it is unique and satisfies the estimate $\left|y^{(q)}(t,\varepsilon) - Y_N^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le K \cdot \varepsilon^{N+1}$,$q = 0,\ 1,\ 2, 0 \le t \le 1$. It is proved that small neighbor point $(\bar{a}_0, \bar{b}_0, \bar{c}_0)$ there is a unique point $(a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon))$ such that the solution of auxiliary problem $y(t,a,b,c,\varepsilon)$ is the only solution of $y(t,\varepsilon)$ in the original problem, and in the interval $0 \le t \le 1$ under sufficiently small $\varepsilon > 0$ we have the estimate $y^{(j)}(t, a(\varepsilon), c(\varepsilon), \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k y_k^{(j)}(t) + \varepsilon^{1-j} \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k \overset{(j)}{\underset{k}{V}} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$. Limit relations, expressing the relationships between solution of degenerate problem and solution of original singularly perturbed boundary value problem are set. A formula of the initial jump is found out. Thus, an algorithm for constructing the asymptotic expansion of solution of perturbed boundary value problems for ordinary differential equations of the third-order nonlinear boundary conditions, which are not ordered with respect to the highest derivatives, are formulated.
Key words: asymptotic, initial jump, boundary value problem, perturbed and no perturbed problems, asymptotic behavior.

Д.Н. Нұрғабыл, А.Б. Уаисов

Бейсызықты шарты бар жартылай туындалған шекаралық есептегі бастапқы секіріс құбылысы

Бұл жұмыста бейсызықты шекаралық шарттары жоғарғы туындыларының реттеріне қарағанда реттелмеген үшінші ретті жай дифференциалдық теңдеулер үшін ерекше ауытқыған шекаралық есеп қарастырылған. Жіктелістің коэффициенттері үшін рекуррентті сызықты дифференциалдық теңдеулер және бастапқы шарттар табылған. Туындалған теңдеу анықталған. Туындалған теңдеу үшін шарттар табылған. Көмекші бастапқы есептің жуық $Y_N(t,\varepsilon)$ шешімі $O(\varepsilon^{N+1})$ дәлдікпен $0 \le t \le 1$ кесіндісінде құрылған. Ерекше ауытқыған теңдеулер үшін көмекші бастапқы есептің бірқалыпты асимптотикасы кезкелген дәлдікпен табылған. Көмекші бастапқы есептің шешімінің барлығы, жалғыздығы, $\left|y^{(q)}(t,\varepsilon) - Y_N^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le K \cdot \varepsilon^{N+1}$, $q = 0,\ 1,\ 2$,бағамын $\varepsilon > 0$ параметрінің жеткілікті кішкентай мәндері үшін $0 \le t \le 1$ *кесіндісінде* қанағаттандыратыны дәлелденген. Берілген $(\bar{a}_0, \bar{b}_0, \bar{c}_0)$ нүктесінің әйтеуір бір кішкене аймағынан $(a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon))$ нүктесінің көмекші бастапқы есептің $y(t,a,b,c,\varepsilon)$ шешімінің берілген шекаралық есептің $y(t,\varepsilon)$ шешімі болатынындай табылатыны дәлелденген, және $y^{(j)}(t, a(\varepsilon), c(\varepsilon), \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k y_k^{(j)}(t) + \varepsilon^{1-j} \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k \overset{(j)}{\underset{k}{V}} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$ бағамының $\varepsilon > 0$ жеткілікті кішкентай мәндері үшін $0 \le t \le 1$ кесіндісінде орындалатыны көрсетілген. Берілген ерекше ауытқыған шекаралық есеп пен туындалған есеп шешімдерінің байланысын көрсететін шектік теңдіктер орындалатыны көрсетілген. Бастапқы секірістің формуласы табылған. Сонымен, бейсызықты шекаралық шарттары жоғарғы туындыларының реттеріне қарағанда реттелмеген үшінші ретті жай дифференциалдық теңдеулер үшін ерекше ауытқыған шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық жіктелісін құрудың алгоритмі анықталған.
Түйін сөздер: асимптотика, шекаралық есеп, бастапқы секіріс, аутқыған және ауытқымаған есептер, асимптотикалық сипаттама.

Постановка задачи

Одним из фундаментальных теорем теории сингулярных возмущений являться теорема А.Н. Тихонова [1,2] о предельном переходе, которая устанавливает предельные равенства, выражающие связь между решением вырожденной задачи и решением исходной сингулярно возмущенной начальной задачи и позволяет получать главный член асимптотики. Для широкого класса сингулярно возмущенных начальных и краевых задач были разработаны различные асимптотические методы, позволяющие строить равномерные асимптотические приближения по малому параметру. В первую очередь здесь следует назвать метод пограничных функций [3-6]. Он заключается в том, что асимптотика решения возмущенной задачи разыскивается в виде: $x(t,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\overline{x}_k(t)+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\Pi_k x(\tau)$, $\tau=t/\varepsilon$, $x=(z,y)$ Однако в приложениях встречаются задачи, в которых производные от решения при стремлении малого параметра к нулю становится неограниченным в граничной точке [7-8]. Такие задачи называются задачами с начальными скачками. В [9,10]выделены классы сингулярно возмущенных краевых задач, обладающие явлениями начальных скачков, где краевые условия вырождаются в краевые условия, упорядоченные относительно старших производных. В работе [11] предложен новый алгоритм исследования сингулярно возмущенных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с общими линейными краевыми условиями не упорядоченные относительно старших производных, а сингулярно возмущенные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными краевыми условиями не упорядоченные относительно старших производных требует дальнейшего исследования. Итак, рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\varepsilon y'''+A_1(t,y)y''+A_2(t,y)y'+A_3(t,y)=0 \tag{1}$$

$$R_i(y(0,\varepsilon),y'(0,\varepsilon))=\alpha_i,\ \ i=1,2,\ \ R_3(y(1,\varepsilon),y'(1,\varepsilon),y''(1,\varepsilon))=\alpha_3, \tag{2}$$

где $\varepsilon>0$ – малый параметр. Предположим, что выполнены следующие условия: 1. $A_k(t,y)\in C^{N+3}(\Omega)$, $\Omega=\{(t,y):0\le t\le 1,\ |y|<\infty\}$; 2. $A_1(t,y)\ge\gamma>0$, $(t,y)\in\Omega$. 3. $R_i(y,y')\in C^{N+3}(D_0)$, $R_3(y,y',y'')\in C^{N+3}(D_1)$, где $D_0=\{(y,y'):|y|<\infty,\ |y'|<\infty\}$, $D_1=\{(y,y',y''):y,y''\in D_0,\ |y''|<\infty\}$. 4. Задача

$$A_1(t,y_0)y_0''+A_2(t,y_0)y_0'+A_3(t,y_0)=0, \tag{3}$$

$$y_0\big|_{t=0}=y_0(0),\ \ y_0'\big|_{t=0}=y_0'(0) \tag{4}$$

при произвольных ограниченных начальных данных $y_0(0)$, $y_0'(0)$ имеет единственное решение $y_0(t)$ на отрезке $0\le t\le 1$. Задача заключается в построении асимптотики и в исследовании асимптотического поведения решения задачи (1), (2).

Алгоритм построения асимптотического разложения

Предварительно рассмотрим вспомогательную задачу Коши:

$$\varepsilon y'''+A_1(t,y)y''+A_2(t,y)y'+A_3(t,y)=0; \tag{5}$$

$$y(0,\varepsilon)=a(\varepsilon),\ \ y'(0,\varepsilon)=b(\varepsilon),\ \ y''(0,\varepsilon)=\frac{c(\varepsilon)}{\varepsilon}, \tag{6}$$

где $a(\varepsilon)=a_0+\varepsilon a_1+\ldots$, $b(\varepsilon)=b_0+\varepsilon b_1+\ldots$, $c(\varepsilon)=c_0+\varepsilon c_1+\ldots$, причем параметры a, b, c, a_k, b_k, c_k подлежат определению. Асимптотическое разложение решения задачи (5), (6) будем строить в виде:

$$y(t,\varepsilon)=y_\varepsilon(t)+\varepsilon W_\varepsilon(\tau),\ \ \tau=t/\varepsilon, \tag{7}$$

где

$$y_\varepsilon(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \ldots + \varepsilon^k y_k(t) + \ldots, \tag{8}$$

$$W_\varepsilon(\tau) = W_0(\tau) + \varepsilon W_1(\tau) + \ldots + \varepsilon^k W_k(\tau) + \ldots. \tag{9}$$

Подставим (7) в (5) и приравняем выражения, зависящие от t и τ по отдельности:

$$\varepsilon y_\varepsilon'''(t) + A_1(t, y_\varepsilon) y_\varepsilon''(t) + A_2(t, y_\varepsilon) y_\varepsilon'(t) + A_3(t, y_\varepsilon) = 0, \tag{10}$$

$$\begin{array}{l} \dddot{W}_\varepsilon(\tau) + A_1(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau) + \varepsilon W_\varepsilon(\tau))\ddot{W}_\varepsilon(\tau) + \varepsilon A_2(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau) + \varepsilon W_\varepsilon(\tau))\dot{W}_\varepsilon(\tau) + \\ +\varepsilon[A_1(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau) + \varepsilon W_\varepsilon(\tau)) - A_1(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau))]y_\varepsilon''(\varepsilon\tau) + \\ +\varepsilon[A_2(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau) + \varepsilon W_\varepsilon(\tau)) - A_2(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau))]y_\varepsilon'(\varepsilon\tau) + \\ +\varepsilon[A_3(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau) + \varepsilon W_\varepsilon(\tau)) - A_3(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau))], \end{array} \tag{11}$$

где точки над $W_\varepsilon(\tau)$ означают производную по τ от $W_\varepsilon(\tau)$. Подставляя разложение (8) в (10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$A_1(t, y_0) y_0'' + A_2(t, y_0) y_0' + A_3(t, y_0) = 0, \tag{12}$$

$$A_1(t, y_0) y_k'' + A_2(t, y_0) y_k' + \sum_{i=1}^{3} A_{iy}'(t, y_0) y_0^{(3-i)} y_k = P_k, \tag{13}$$

где $P_k(t)$ выражаются через $y_i(t)$, $i < k$. Теперь подставим (9) в (11) и представим $A_i(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau) + \varepsilon W_\varepsilon(\tau))$, $A_i(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau))$, i=1, 2, 3, $y_\varepsilon''(\varepsilon\tau)$, $y_\varepsilon'(\varepsilon\tau)$, $y_\varepsilon(\varepsilon\tau)$ в ряды по степеням ε. Тогда собирая члены с одинаковыми степенями ε, получим

$$\dddot{W}_0(\tau) + A_1(0, y_0(0))\ddot{W}_0(\tau) = 0, \tag{14}$$

$$\dddot{W}_k(\tau) + A_1(0, y_0(0))\ddot{W}_k(\tau) = F_k(\tau), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

Здесь $F_k(\tau)$ выражаются $\widetilde{y}_i(\tau)$ $(i < k)$ и $\widetilde{\widetilde{y}}_i(\tau)$, $i < k$, где

$$\widetilde{\widetilde{y}}_k(\tau) = \widetilde{y}_k(\tau) + W_{k-1}(\tau), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \widetilde{y}_k(\tau) = y_k(\tau) + \sum_{j=1}^{k} \frac{y_{k-j}^{(j)}(\tau)\tau^j}{j!}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Рассмотрим уравнения (14) и (15). Как обычно [12], потребуем, чтобы

$$W_k^{(j)}(\tau) \to 0 \;\; (j = 0, 1) \text{ при } \tau \to \infty. \tag{17}$$

Интегрируя последовательно уравнения (14) и (15) с учетом (17) от 0 до τ получаем решения

$$W_0^{(3-j)}(\tau) = \frac{\ddot{W}_0(0)}{\mu^{j-1}} \cdot e^{\mu\tau}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \tau \geq 0 \tag{18}$$

$$W_k^{(3-i)}(\tau) = \frac{\ddot{W}_k(0)}{\mu^{i-1}} \cdot e^{\mu\tau} + e^{\mu\tau} F_k^i(\tau), \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

уравнений (14), (15) и условия связи

$$\mu^{j-1}W_0^{(3-j)}(0)=\ddot{W}_0(0),\ \ j=1,2,3, \tag{20}$$

$$W_k^{(3-i)}(0)-\frac{\ddot{W}_k(0)}{\mu^{i-1}}=T_k^{i-1},\ \ i=2,3,\ \ k=1,2,\dots, \tag{21}$$

где

$$\begin{gathered}\mu=-A_1(0,y_0(0))<0,\ \ F_k^1(\tau)=-\int\limits_0^{\tau}F_k^0(s)ds,\ \ \tau\ge 0,\\ T_k^{i-1}=-\int\limits_0^{\infty}e^{\mu s}F_k^{i-1}(s)ds,\ \ e^{\mu\tau}F_k^i(\tau)=-\int\limits_0^{\infty}e^{\mu s}F_k^{i-1}(s)ds.\end{gathered} \tag{22}$$

Здесь $F_k^{i-1}(\tau)$ – некоторый известный многочлен относительно τ. Таким образом, если начальные значения $W_k^{3-j}(0)$, $j=1,2,3$ из некоторой ограниченной области их изменения удовлетворяют условиям связи (20), (21). Тогда из (18) и (19) в силу условия 2 получаем, что $W_k^{(j)}(\tau)$, $j=0,1,2$ удовлетворяют оценке

$$\left|W_k^{(j)}(\tau)\right|\le K\cdot e^{\mu\tau},\ \ j=0,1,2. \tag{23}$$

Для однозначного определения $W_k^{(j)}(\tau)$ подставим (7) – (9) в (6):

$$\begin{aligned}&y_0(0)+\varepsilon y_1(0)+\ldots+\varepsilon^k y_k(0)+\ldots+\varepsilon(W_0(0)+\varepsilon W_1(0)+\ldots+\varepsilon^{k-1}W_{k-1}(0)+\ldots)=\\&=a_0+\varepsilon a_1+\ldots+\varepsilon^k a_k+\ldots,\\&y_0'(0)+\varepsilon y_1'(0)+\ldots+\varepsilon^k y_k'(0)+\ldots+\dot{W}_0(0)+\varepsilon\dot{W}_1(0)+\ldots+\varepsilon^k\dot{W}_k(0)+\ldots=\\&=b_0+\varepsilon b_1+\ldots+\varepsilon^k b_k+\ldots,\\&y_0''(0)+\varepsilon y_1''(0)+\ldots+\varepsilon^k y_k''(0)+\ldots+\frac{1}{\varepsilon}(\ddot{W}_0(0)+\varepsilon\ddot{W}_1(0)+\ldots+\varepsilon^{k-1}\ddot{W}_{k-1}(0)+\ldots)=\\&=\frac{c_0+\varepsilon c_1+\ldots+\varepsilon^k c_k+\ldots}{\varepsilon},\end{aligned} \tag{24}$$

Отсюда приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$y_0(0)=a_0,\ \ y_0'(0)=b_0-\dot{W}_0(0),\ \ \ddot{W}_0(0)=c_0 \tag{25}$$

$$y_k(0)=a_k-W_{k-1}(0),\ \ y_k'(0)=b_k-\dot{W}_k(0),\ \ \ddot{W}_k(0)=c_k-y_{k-1}''(0). \tag{26}$$

Теперь, используя (25), (26) и условия связи (20), (21) из (18), (19) можем однозначно определить $W_0^{(j)}(\tau)$, $W_0^{(j)}(0)$, $W_k^{(j)}(\tau)$, $W_k^{(j)}(0)$, $j=0,1,2:$

$$W_0^{(3-j)}(\tau)=\frac{c_0}{\mu^{j-1}}\cdot e^{\mu\tau},\ \ j=1,2,3,\ \ \tau\ge 0; \tag{27}$$

$$W_0(0)=\frac{c_0}{\mu^2},\ \ \dot{W}_0(0)=\frac{c_0}{\mu},\ \ \ddot{W}_0(0)=c_0; \tag{28}$$

$$W_k^{(3-i)}(\tau) = \frac{c_k - y''_{k-1}(0)}{\mu^{i-1}} \cdot e^{\mu\tau} + e^{\mu\tau} F_k^i(\tau),\ i = 1,2,3,\ k = 1,2,\ldots; \tag{29}$$

$$W_k^{(3-i)}(0) = \frac{c_k - y''_{k-1}(0)}{\mu^{i-1}} = T_k^{i-1},\ i = 2,3,\ k = 1,2,\ldots. \tag{30}$$

Тогда из (25) и (26) с учетом (28), (30) получаем

$$y_0(0) = a_0,\ \ y'_0(0) = b_0 - \frac{c_0}{\mu}, \tag{31}$$

$$y_k(0) = a_k - W_{k-1}(0),\ \ y'_k(0) = b_k - T_k^1 - \frac{c_k - y''_{k-1}(0)}{\mu},\ k = 1,2,\ldots. \tag{32}$$

Уравнение (12) вместе с условиями (31) в силу условия 4 определяет решение $y_0(t) = y_0(t, a_0, c_0, b_0)$. Уравнения (13) вместе с условиями (32) определяют решения $y_k(t) = y_k(t, a_k, c_k, b_k)$. Тем самым определены все члены разложения (8), (9).

Обоснование асимптотики решения вспомогательной задачи

Определим члены разложений (8), (9) до номера $N+1$ включительно и образуем частичную сумму $Y_N(t,\varepsilon)$ разложения (7):

$$Y_N(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k y_k(t) + \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{N+1} u_k(t/\varepsilon)\varepsilon^k. \tag{33}$$

Лемма 1 *Пусть выполняются условия 1 – 4 . Тогда функция $Y_N(t,\varepsilon)$, выражаемая формулой (33), на отрезке $0 \le t \le 1$ является приближенным решением сингулярной возмущенной задачи (5), (6) с точностью порядка*

$$\begin{aligned} &L_\varepsilon Y_N(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}); \\ &Y_N(0,\varepsilon) - a = O(\varepsilon^{N+1}),\ Y'_N(0,\varepsilon) - b = O(\varepsilon^{N+1}),\ Y''_N(1,\varepsilon) - \frac{c(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} O(\varepsilon^{N+2}) \end{aligned} \tag{34}$$

Доказательство леммы непосредственно следует из самого способа построения функций $y_k(t)$, $W_k(\tau)$. Пусть $R(t,\varepsilon) = y - Y_N(t,\varepsilon)$, где $y(t,\varepsilon)$ решение задачи (5), (6). Подставляя $y = R(t,\varepsilon) + Y_N(t,\varepsilon)$ в (5), (6), в силу (34), получим для $R(t,\varepsilon)$ задачу:

$$\begin{aligned} &\widetilde{L}_\varepsilon R \equiv \varepsilon R''' + A_1(t,y_0)R'' + A_2(t,y_0)R' + \widetilde{A}_3(t,y_0)R = F(R) \\ &R(0,\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}),\ \ R'(0,\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}),\ \ R''(0,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} O(\varepsilon^{N+2}) \end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned} &\widetilde{A}_3(t,y_0) = A'_{1y}(t,y_0)y''_0 + A_{2y}(t,y_0)y'_0 + A'_{3y}(t,y_0), \\ &F(R) = F(R,R',R'',\varepsilon) = A_1(t,y_0)R'' + A_2(t,y_0)R' + \widetilde{A}_3(t,y_0)R - \\ &-A_1(t,Y_N+R)(Y''_N+R'') - A_2(t,Y_N+R)(Y'_N+R') - A_3(t,Y_N+R) - \varepsilon Y'''_N, \end{aligned} \tag{36}$$

причем функция $F(R,R',R'',\varepsilon)$ в точке $R=0$, $R'=0$, $R''=0$ при $\varepsilon \to 0$ в силу (34) имеет оценку

$$F(0,0,0,\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}). \tag{37}$$

Применяя теперь к задаче (35) теорему из [11], заключаем, что на отрезке $0 \le t \le 1$ решение задачи (35) существует, единственно имеет место: $|R^{(q)}(t,\varepsilon)| \le K \cdot \varepsilon^{N+1}$, $q = \overline{0, n-1}$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1 *Пусть выполнены условия 1 – 4. Тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *на сегменте* $0 \le t \le 1$ *решение задачи (5), (6) существует, единственно и удовлетворяет оценке*

$$|y^{(q)}(t,\varepsilon) - Y_N^{(q)}(t,\varepsilon)| \le K \cdot \varepsilon^{N+1}, \ \ q = 0,1,2, \ \ 0 \le t \le 1, \tag{38}$$

где K *– независящая от* t *и* ε *постоянная.*

Чтобы окончательно найти разложения (7), (8), (9) нужно знать параметры c_k, b_k и a_k. Их можно последовательно определить. Для этого формально подставим (7) с учетом (8), (9) в (2), после чего представим (2) также в виде разложения по ε. При этом надо учесть, что $y(1,\varepsilon) = y_\varepsilon(1)$, так как члены $W_k^{(j)}(t/\varepsilon)$, $j = 0,1,2$ при $t = 1$ экспоненциально малы и их можно отбросить, поскольку они более высокого порядка малости, чем любая степень ε. Таким образом,

$$R_i(a(\varepsilon), b(\varepsilon)) = R_i^0 + \varepsilon R_i^1 + \ldots + \varepsilon^k R_i^k + \ldots, \ \ i = 1,2,$$

$$R_3(y(1,a(\varepsilon),b(\varepsilon),c(\varepsilon),\varepsilon), y'(1,a(\varepsilon),b(\varepsilon),c(\varepsilon),\varepsilon), y''(1,a(\varepsilon),b(\varepsilon),c(\varepsilon),\varepsilon)) =$$
$$= R_3^0 + \varepsilon R_3^1 + \ldots + \varepsilon^k R_3^k + \ldots$$

Отсюда имеем

$$R_3^k = 0, \ R_i^k = 0, \ i = 1,2, \ k = 1,2,\ldots. \tag{39}$$

При $k = 0$ имеем

$$\begin{array}{l} R_i^0 = R_i(a_0, b_0) = \alpha_i, \ \ i = 1,2, \\ R_3^0 = R_3(y_0(1,a_0,b_0,c_0), y_0'(1,a_0,b_0,c_0), y_0''(1,a_0,b_0,c_0)) = \alpha_3. \end{array} \tag{40}$$

В этой системе в качестве неизвестных можно взять a_0, b_0, c_0. Так как $y_0(1)$, $y_0'(1)$, $y_0''(1)$ в силу (31) являются известными функциями параметров a_0, b_0, c_0. 5. Пусть система (40) относительно a_0, b_0, c_0 имеет решение $a_0 = \overline{a}_0$, $b_0 = \overline{b}_0$, $c_0 = \overline{c}_0$, и функциональный определитель

$$\frac{D(R_1^0, R_2^0, R_3^0)}{D(a_0, b_0, c_0)}\Big|_{a_0=\overline{a}_0, b_0=\overline{b}_0, c_0=\overline{c}_0} = \Delta_0\Big|_{a_0=\overline{a}_0, b_0=\overline{b}_0, c_0=\overline{c}_0} = \Delta_0^0 \ne 0. \tag{41}$$

Найдя $a_0 = \overline{a}_0$, $b_0 = \overline{b}_0$, $c_0 = \overline{c}_0$, можно из задачи (12), (31) окончательно определить $y_0(t) = y_0(t, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$. Рассмотрим систему (39), где R_i^k представляет собой линейное выражение относительно a_k и $y_k(1, c_k, a_k)$:

$$\begin{array}{l} R_i^k \equiv \dfrac{\partial R_i}{\partial a} \cdot a_k + \dfrac{\partial R_i}{\partial b} \cdot b_k = r_k^i, \ \ i = 1,2; \\ R_3^k \equiv \dfrac{\partial R_3}{\partial y} y_k(1,a_k,b_k,c_k) + \dfrac{\partial R_3}{\partial y'} y_k'(1,a_k,b_k,c_k) + \dfrac{\partial R_3}{\partial y''} y_k''(1,a_k,b_k,c_k) = r_k^3 \end{array} \tag{42}$$

в котором неоднородность r_k^i, $i = 1,2,3$ зависит от y_j, y_j', y_j'' $(j < k)$. Теперь, заметив, что решение $y_k(t, a_k, b_k, c_k)$ линейной задачи (13), (32) линейно зависит от параметров a_k, b_k и c_k получаем

$$\Delta_k\Big|_{a_0=\overline{a}_0, b_0=\overline{b}_0, c_0=\overline{c}_0} = \Delta_k^0 = \Delta_0^0 \ne 0.$$

Значить, в силу 5 система (39) разрешима относительно a_k, b_k, c_k Пусть $a_k = \overline{a}_k$, $b_k = \overline{b}_k$, $c_k = \overline{c}_k$.

Построение асимптотики решения краевой задачи

Теперь, рассмотрим исходную краевую задачу (1), (2). Как уже было показано, вспомогательная задача (5), (6) имеет на отрезке $0 \le t \le 1$ единственное решение $y(t, a, b, c, \varepsilon)$. Построим функцию $Y_N(t, \varepsilon)$ определяемая формулой (33).

Теорема 2 *При выполнении условии 1 – 5 в некоторой малой окрестности точки* $(\overline{a}_0, \overline{b}_0, \overline{c}_0)$ *найдется единственная точка* $(a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon))$ *такая, что решение* $y(t, a, b, c, \varepsilon)$ *задачи (5), (6) является единственным решением* $y(t, \varepsilon)$ *краевой задачи (1), (2), и на отрезке* $0 \le t \le 1$ *при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *имеет место следующая оценка*

$$y^{(j)}(t, a(\varepsilon), c(\varepsilon), \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k y_k^{(j)}(t) + \varepsilon^{1-j} \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k V_k^{(j)}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^{N+1}). \tag{43}$$

Доказательство. Воспользуемся построенной асимптотикой решения $y(t, a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon), \varepsilon)$, вспомогательной задачи Коши (5), (6). Параметры $a(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$, $c(\varepsilon)$ подберем так, чтобы $y(t, a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon), \varepsilon)$ удовлетворяло краевым условиям (2). Это приводит к следующей системе уравнений относительно $a(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$ и $c(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} &R_i(a(\varepsilon), b(\varepsilon)) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \\ &R_3(y(1, a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon), \varepsilon), y'(1, a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon), \varepsilon), y''(1, a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon), \varepsilon)) = \alpha_3. \end{aligned} \tag{44}$$

Исследуем $R_i(a, b)$, $i = 1, 2$, $R_3(y(1, a, b, c, \varepsilon), y'(1, a, b, c, \varepsilon), y''(1, a, b, c, \varepsilon))$ как функцию a, b, c, ε. Обозначим через Δ функциональный определитель $D(R_1, R_2, R_3)/D(a, b, c)$. Легко доказать, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место следующее асимптотическое представление

$$\Delta(a, b, c, \varepsilon) = \Delta_0(a, b, c) + O(\varepsilon), \tag{45}$$

где $\Delta_0(a, b, c)$ – определитель $D(R_1^0, R_2^0, R_3^0)/D(a, b, c)$, который был введен выше, но только в данном случае аргумент обозначен через a и c вместо a_0, b_0, c_0. Следовательно, из (45) будем иметь

$$\Delta(a, b, c, \varepsilon) \ne 0 \text{ при } a = \overline{a}_0,\ b = \overline{b}_0,\ c = \overline{c}_0,\ \varepsilon = 0. \tag{46}$$

Рассмотрим теперь решение $y(t, \overline{a}_0, \overline{b}_0, \overline{c}_0, \varepsilon)$ уравнения (5) с начальными условиями

$$y(0, \varepsilon) = \overline{a}_0,\ y'(0, \varepsilon) = \overline{b}_0,\ y''(0, \varepsilon) = \frac{\overline{c}_0}{\varepsilon}.$$

Эта задача того же типа, что и задача (5), (6). Она удовлетворят всем условиям теоремы 1. Строим для её решения асимптотику точно так же, как и для задачи (5), (6). Тогда для него при $t = 1$ с учетом равенств

$$R_i^0 = R_i(\overline{a}_0, \overline{b}_0) = \alpha_i, \quad i = 1, 2,$$

$$R_3^0 = R_3(y_0(1, \overline{a}_0, \overline{b}_0, \overline{c}_0), y_0'(1, \overline{a}_0, \overline{b}_0, \overline{c}_0), y_0''(1, \overline{a}_0, \overline{b}_0, \overline{c}_0)) = \alpha_3.$$

получаем

$$R_i(\overline{a}_0,\overline{b}_0)=\alpha_i,\ \ i=1,2,$$

$$R_3(y_0(1,\overline{a}_0,\overline{b}_0,\overline{c}_0,\varepsilon),y_0'(1,\overline{a}_0,\overline{b}_0,\overline{c}_0,\varepsilon),y_0''(1,\overline{a}_0,\overline{b}_0,\overline{c}_0,\varepsilon))=$$

$$=R_3(y_0(1,\overline{a}_0,\overline{b}_0,\overline{c}_0),y_0'(1,\overline{a}_0,\overline{b}_0,\overline{c}_0),y_0''(1,\overline{a}_0,\overline{b}_0,\overline{c}_0))+O(\varepsilon)=\alpha_3+O(\varepsilon).$$

Таким образом, решение $y(t,\overline{a}_0,\overline{b}_0,\overline{c}_0,\varepsilon)$ удовлетворяет краевым условиям (2) с точностью порядка $O(\varepsilon)$. В силу (46) функциональный определитель $\Delta(a,b,c,\varepsilon)\neq 0$ в некоторой малой окрестности точки $\overline{a}_0$, $\overline{b}_0$, $\overline{c}_0$ при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, в достаточно малой окрестности точки $(\overline{a}_0,\overline{b}_0,\overline{c}_0,)$ найдется единственная точка $(a(\varepsilon),b(\varepsilon),c(\varepsilon))$ такая, что будут выполнены равенства

$$\begin{array}{l} R_i(a(\varepsilon),b(\varepsilon))=\alpha_i,\ \ i=1,2,\\ R_3(y(1,a(\varepsilon),b(\varepsilon),c(\varepsilon),\varepsilon),y'(1,a(\varepsilon),b(\varepsilon),c(\varepsilon),\varepsilon),y''(1,a(\varepsilon),b(\varepsilon),c(\varepsilon),\varepsilon))=\alpha_3. \end{array} \tag{47}$$

причем $a=\overline{a}_0+O(\varepsilon)$, $b=\overline{b}_0+O(\varepsilon)$, $c=\overline{c}_0+O(\varepsilon)$. Таким образом, существует единственное решение $y(t,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2). Докажем теперь оценку (41). Для этого рассмотрим решение уравнения (1) с начальными условиями

$$y(0,\varepsilon)=\overline{a}(\varepsilon),\ y'(0,\varepsilon)=\overline{b}(\varepsilon),\ y''(0,\varepsilon)=\frac{\overline{c}(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

где параметры $\overline{a}(\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{N}\varepsilon^k\overline{a}_k$, $\overline{b}(\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{N}\varepsilon^k\overline{b}_k$, $\overline{c}(\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{N}\varepsilon^k\overline{c}_k$ известные величины. Из способа построения $y_k^{(j)}(t)$ следует, что решение $y(t,\overline{a},\overline{b},\overline{c},\varepsilon)$ удовлетворяет краевым условиям (2) с точностью порядка $O(\varepsilon^{N+1})$:

$$\begin{array}{l} R_i(\overline{a}(\varepsilon),\overline{b}(\varepsilon))=\alpha_i+O(\varepsilon^{N+1}),\ \ i=1,2,\\ R_3(y(1,\overline{a},\overline{b},\overline{c},\varepsilon),y'(1,\overline{a},\overline{b},\overline{c},\varepsilon),y''(1,\overline{a},\overline{b},\overline{c},\varepsilon))=\alpha_3+O(\varepsilon^{N+1}). \end{array} \tag{48}$$

Используя (47) и (48) находим, что

$$a(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k\overline{a}_k+O(\varepsilon^{N+1}),\ \overline{b}(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k\overline{b}_k+O(\varepsilon^{N+1}),\ \overline{c}(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k\overline{c}_k+O(\varepsilon^{N+1})$$

С помощью которых, в силу теоремы 1 получим представление (43). Теорема доказана. Свою очередь из теоремы 2 последует, что решение задачи (1), (2) обладает явлением начального скачка первого порядка:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y(t,\varepsilon)=y_0(t),\ 0\le t\le 1;\ \lim_{\varepsilon\to 0}y'(t,\varepsilon)=y_0'(t),\ \ \lim_{\varepsilon\to 0}y''(t,\varepsilon)=y_0''(t),\ 0<t\le 1,$$

причем величина начального скачка определяется по формуле

$$\Delta=\lim_{\varepsilon\to 0}y'(0,\varepsilon)-y_0'(0)=\overline{a}_0-\overline{b}_0+\frac{\overline{c}_0}{\mu}.$$

Литература

[1] *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра.// - Матем. сб. 1948, Т.22 (64), №2, с.193-204.

[2] *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. Сб., 1952, Т.31 (73), №3, с. 575-586.

[3] *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957, Т. 212, № 5. - С. 3-122.

[4] *Васильева А.Б.* Асимптотика решений некоторых краевых задач для квазилинейных уравнений с малым параметром при старшей производной. - ДАН СССР, 1958, 123, №4, с.583-586.

[5] *Иманалиев М.И.* Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Фрунзе, Илим, 1962, 2, С. 21-39.

[6] *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // ДАН СССР. -1960. -Т. 132, №6. -С. 1242-1245.

[7] *Касымов К.А.* Об асимптотике решения задачи Коши с большими начальными условиями для нелиненых обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // УМН. 1962, Т.17, №5, С. 187-188.

[8] *Дауылбаев М.К.* Асимптотические оценки решений интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром. // Математический журнал. Институт математики МОН РК. -Т.8, 2008, №4(30),

[9] *Касымов К.А., Нургабыл Д.Н.* Асимптотические оценки решения сингулярно возмущенной краевой задачи с начальным скачком для линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. Москва, 2004. Т.40. № 4 - С 597-607.

[10] *Нургабыл Д.Н.* Построение решения сингулярно возмущенной краевой задачи имеющего начальный скачок // Вестник Киргизского государственного Национального университета. 2001. сер.3., вып.6., С.173-177.

[11] *Нургабыл Д.Н.* Полувырождение для сингулярно возмущенных краевых задач // Тезисы докл. межд. конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения". -Алматы, 2001. -С. 51-52.

[12] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. -272с.

References

[1] *Tikhonov A.N.* On independence of the solutions of differential equations froma small parameter, Matem.sb., Vol. 22 (64) No. 2 (1948) 193-204.

[2] *Tikhonov A.N.* O granichnykh skachkakh lineynykh differentsialnykh uravneny s malym parametrom pri starshikh proizvodnykh // Vestnik ZhGU im. I. Zhansugurova. 2012. № 4. p. 17-21.Systems of differential equations containing a small parameter within derivatives, Matem.sb., Vol.31 (73) No. 31 (1952) 575-586.

[3] *Vishik M.I., Lyusternik L.A.* Regular extinction and boundary layer for linear differential equations with a small parameter, UMN, Vol.212, No. 5. (1957) 3-122.

[4] *Vasilyeva A.B.* Asymptotics of the solutions of some boundary value problems for quasilinear equations within a small parameter and a senior derivative, RCS USSR, Vol. 123 No.4 (1958) 583-586.

[5] *Imanaliev M.I.* Asymptotic methods in the theory of singular perturbed integer-differential systems//Researches on the integer-differential equations.// -Frunze : Ilim, 1962. -T 2. -P. 21-39.

[6] *Vishik M.I., Lyusternik L.A.* On initial jump for non-linear differential equations containing a small parameter, RCS USSR, Vol. 132 No. 6. (1960) 1242-1245.

[7] *Kasymov K.A.* On asymptotic of the solutions of Cauchy problem with boundary conditions for non-linear ordinary differential equations containing a small parameter, UMN, Vol. 17 No. 5 (1962) 187-188.

[8] *Dauylbaev M.K.* Asymptotic estimates of solutions of the integro-differential equations with small parameter // Mathematical Journal. Vol.8. No4 (2008).

[9] *Kasymov K.A., Nurgabyl D.N.* Asymptotic estimates of the solution of a singularly perturbed boundary value problem with initial jump for linear differential equations, Differential equations, Vol. 40 No. 4 (2004). pp. 597-607.

[10] *Nurgabyl D.N.* Construction of solution of the singularly perturbed boundary problem with initial jump // Vestnik of Kirghiz State National University. - 2001. - Vol.3., №6. - C.173-177.

[11] *Nurgabyl D.N.* Semidegenerate for singularly perturbed boundary value problems // Abstracts of the International Conference "Differential Equations and Their Applications."Almaty, 2001.-C. 51-52.

[12] *Vasilyeva A.B., Butuzov V.F.* Asymptotic decomposition of Solutions it is Singularly Perturbed equations, Moscow, Nauka (1973) -p.272.