ISSN 1563–0277, eISSN 2617–4871 JMMCS. №3(107). 2020 https://bm.kaznu.kz

2-бөлім **Раздел 2** **Section 2**

Механика **Механика** **Mechanics**

МРНТИ 30.19.31 DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v107.i3.04

Ш.А. Алтынбеков*, А.Д. Ниязымбетов
Южно-Казахстанский государственный педагогический университет, г. Шымкент, Казахстан
*e-mail: sh.altynbekov@mail.ru

МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ В РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ КОНСОЛИДАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ НАСЛЕДСТВЕННО-СТАРЕЮЩИХ ГРУНТОВ

Вопросы совершенствования существующих методов прогноза осадки оснований сооружений, алгоритмизация решения их задачи ещё не сняты с повестки дня научных исследований. Подтверждением этому служат ежегодно проводимые международные конференции, симпозиумы и конгрессы в сфере промышленного, нефтепромышленного, гражданского и гидротехнического строительства. Основной целью исследования явилось совершенствование существующих методов фильтрационной теорий консолидации применительно к неоднородным грунтам и применение её для решения задачи. Сформулирована математическая постановка пространственной квазилинейной краевой задачи консолидации неоднородного наследственно-стареющего грунта. Здесь, неоднородность грунта обусловлена изменением его модуля деформации, мера ползучести и коэффициента бокового давления в процессе консолидации согласно экспоненциальному закону по глубине. Квазилинейность краевой задачи определена через коэффициент фильтрации. В работе принято, что коэффициент фильтрации зависит от коэффициента пористости. При учете неоднородности грунта не всегда удается получить аналитические решения задачи. Применение метода Фурье оставляет нас на полпути. Чтобы выйти из этой ситуации предложена функция аппроксимации. Исследована его погрешность. При малых значениях параметров неоднородности точность аппроксимации высока. Для решения задачи применены: метод итерации, метод наименьших квадратов, метод введения новой неизвестной функции, метод преобразования неоднородных граничных условий в однородные, метод Фурье, метод аппроксимации, метод введение новых переменных, метод разложение по собственным функциям, а для расчета осадок основании сооружений - метод В.А. Флорина.

Ключевые слова: консолидация, грунт, коэффициент фильтрации, уплотнения, аппроксимация.

Ш.А. Алтынбеков*, А.Д. Ниязымбетов
Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық университеті, Шымкент қ., Қазақстан
*e-mail: sh.altynbekov@mail.ru

Біртекті емес тұқым қуалайтын-қартайған топырақтар консолидация теориясының есептерін шешудегі қолданбалы математика әдістері

Құрылыс іргетастарының шөгу процесін болжаудың қолданыстағы әдістерін жетілдіру, олардың есептерін шешуді алгоритмдеу мәселелері ғылыми зерттеулердің күн тәртібінен алынған жоқ. Мұны өнеркәсіптік, мұнай, азаматтық және гидротехникалық құрылыс саласындағы жыл сайынғы халықаралық конференциялар, симпозиумдар мен конгрестер растайды. Зерттеудің негізгі мақсаты бір текті емес топырақтарға қолданылатын консолидациясының фильтрациялау теорияларының бар әдістерін жетілдіру және оны есепті шешу үшін қолдану болып табылады. Бір текті тұқым қуалайтын-қартайған топырақты біріктірудің кеңістіктік квазисызықты шеттік есебінің математикалық қойылымы қалыптастырылды. Мұнда топырақтың біртектілігі оның деформация Модулінің өзгеруімен, тереңдігі бойынша экспоненциалды заңға сәйкес консолидация процесіндегі бүйірлік қысым коэффициентінің және сырғу өлшемімен байланысты. Квазисызықты шеттік есеп фильтрация коэффициенті арқылы анықталған. Жұмыста фильтрациялық коэффициенті кеуектілік коэффициентіне тәуелді болған . Топырақтың біркелкі еместігін есепке алу кезінде есептің аналитикалық шешімдерін алу әрдайым мүмкін емес. Фурье әдісін қолдану бізді жолда қалдырады. Осы жағдайдан шығу үшін аппроксимация функциясы ұсынылады. Оның қателігі зерттелді. Параметрлердің аз мәндерінде аппроксимация дәлдігі жоғары. Есепті шешу үшін: Итерация әдісі, ең кіші квадраттар әдісі, жаңа белгісіз функцияны енгізу әдісі, біртекті емес шекаралық шарттарды біртекті етіп түрлендіру әдісі, Фурье әдісі, аппроксимация әдісі, жаңа айнымалыларды енгізу әдісі, өз функциялары бойынша жіктеу әдісі, ал құрылыстар негізінде шөгінділерді есептеу үшін В. А. Флорин әдісі қолданылды.Мақалада әр текті топырақтар консолидация теориясының жасына және уақытқа қатысты шекаралық бейсызықты есебін шешудің жуық әдістері ұсынылады.

Түйін сөздер: консолидация, топырақ, фильтрация коэффициенті, нығыздалу, аппроксимация.

S.A. Altynbekov*, A.D. Niyazymbetov
South Kazakhstan state pedagogical university, Shymkent city, Kazakhstan
*e-mail: sh.altynbekov@mail.ru

Methods of applied mathematics in solving the problem of the theory of consolidation of inhomogeneous hereditary-aging soils

The issues of improving the existing methods of forecasting the precipitation of the foundations of structures, algorithmization of the solution of their problems have not yet been removed from the agenda of scientific research. This is confirmed by the annual international conferences, symposiums and congresses in the field of industrial, oil, civil and hydraulic engineering construction. The main goal of the study was to improve the existing methods of filtration theory of consolidation in relation to inhomogeneous soils and use it to solve the problem. A mathematical formulation of the spatial quasi-linear boundary value problem of consolidation of heterogeneous hereditary-aging soil is formulated. Here, the heterogeneity of the soil is due to changes in its deformation modulus, a measure of creep and lateral pressure coefficient during consolidation according to the exponential depth law. The quasilinearity boundary value problem is defined via the filtration coefficient. It is assumed that the filtration coefficient depends on the porosity coefficient. When taking into account the heterogeneity of the soil, it is not always possible to obtain analytical solutions to the problem. The application of the Fourier method leaves us on the way. To get out of this situation, the approximation function is proposed. Its error is investigated. For small values of inhomogeneity parameters, the approximation accuracy is high. To solve the problem, we used the iteration Method, the least squares method, the method of introducing a new unknown function, the method of converting inhomogeneous boundary conditions into homogeneous ones,the Fourier method, the approximation method, the method of introducing new variables, the method of decomposition by eigenfunctions, and the method of V. A. Florin for calculating the sedimentation of structures.

Key words: consolidation, soil, filtration coefficient, compaction, approximation.

1 Введение

Введение состоит из следующих элементов: •Обоснование выбора темы и его актуальность; В обосновании выбора темы связано применение методов прикладной математики к задачам теории консолидации. Актуальность темы определяется общим интересом к изучению процесса консолидации грунтов с учетом их физико-механических свойств. •Определение оъекта исследование, целей, задач, методов. Целью исследования явилась совершенствование существующих методов теории консолидации применительно к неоднородным грунтам и применение её для решения задачи.

2 Обзор литературы

Методом решение задачи теории консолидации грунтов посвящены множество работ [1–13]. Однако, в этих работах недостаточно исследовано вопросы применение этих методов для изучения уплотнении наследственно стареющих неоднородных грунтов. А ведь, область применение методов определяется в зависимости от физико-механических свойств и параметров изучаемого процесса. В данной работе эти вопросы находит свои ответ. Они относятся в большой степени к решению краевых задач консолидации неоднородных грунтов с учетом их нелинейной наследственной ползучести, переменности коэффициентов фильтрации, бокового давления, объемной сжатия и мгновенного уплотнения.

Решения краевых задач консолидации этих перечисленных условиях весьма сложны. Поэтому точное аналитическое и полуаналитическое решение удалось получить в настоящее время для весьма ограниченного круга задач. В этой связи первостепенной задачей, стоящей перед аналитической и полуаналитической теорией консолидации, являются разработка и обоснование методов решения нелинейной теории консолидации наследственно стареющих неоднородных грунтов.

3 Материал и методы

Материалы исследование и обоснованные методы позволяет качественные и количественные изучения процесса консолидации неоднородных грунтов. В работе [16] не дано универсальный алгоритм решение проблемой. При учете неоднородность грунта не всегда удается получить аналитическое решения краевых задач консолидации неоднородных грунтов. Применение метода Фурье оставляет нас на пол пути. Чтобы выйти из этой ситуации предлагется метод аппроксимации. Этот метод способствует развитию методов и алгоритмизацию задачи теории консолидации грунтов.

4 Результаты и обсуждение

С целью теоретического исследования данного вопроса рассмотрим следующую задачу.

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим методику решения трехмерного интегро-дифференциального уравнения процесса консолидации наследственно-стареющих неоднородных грунтов

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C^*_{vn}(x,t,H)L^*(H) - C_{1n}(x,t,H)\times$$

$$\times\left\{\int_{\tau_1}^{t} f(\tau,H)K_1(t,\tau)dt + f(t,H)K_2(t,t)\right\} + C_{2n}(x,t,H) \tag{1}$$

при следующих краевых условиях

$$H(x,\tau_1) = \frac{\theta^*_0}{n\gamma} + H^*_0, \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} h_1^{(1)}\frac{\partial H}{\partial x_1} - h_1^{(2)}H\Big|_{x_1=-1} = \psi_1(x_2,x_3,t), \\ h_1^{(3)}\frac{\partial H}{\partial x_1} + h_1^{(4)}H\Big|_{x_1=+1} = \psi_2(x_2,x_3,t); \end{array}\right\}, \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} h_2^{(1)}\frac{\partial H}{\partial x_2} - h_2^{(2)}H\Big|_{x_2=-1} = \psi_3(x_1,x_3,t), \\ h_2^{(3)}\frac{\partial H}{\partial x_2} + h_2^{(4)}H\Big|_{x_2=+1} = \psi_4(x_1,x_3,t); \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} h_3^{(1)}\frac{\partial H}{\partial x_3} - h_3^{(2)}H\Big|_{x_3=0} = \psi_5(x_1,x_2,t), \\ h_3^{(3)}\frac{\partial H}{\partial x_3} + h_3^{(4)}H\Big|_{x_3=1} = \psi_6(x_1,x_2,t), \end{array}\right\} \tag{5}$$

где:

$$L^* = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_s}\left(K_{\Phi S}\frac{\partial}{\partial x_s}\right), K_1(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau}\right), K_2(t,t) = \left.\left(\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau}\right)\right|_{\tau=t}.$$

Здесь уравнение состояния скелета наследственно-стареющих неоднородных грунтов представлено в следующем виде:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\tau_1) - \frac{1}{1+(n-1)\xi(x)}\times$$

$$\times\left\{(\alpha_1 + \alpha_2\eta_1(x))\,a_0(t)\theta(t) - \int_{\tau_1}^{t}\theta(\tau)K(t,\tau,x,\theta(\tau))d\tau\right\}, \tag{6}$$

$$K(t,\tau,x,\theta(\tau)) =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2\eta_1(x))\frac{\partial a_0(\tau)}{\partial t} + (\alpha_3 + \alpha_4\eta_2(x))\frac{f(\tau,\theta(\tau))}{\theta(\tau)} \cdot \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}, \tag{7}$$

$$a_0(t) = \frac{1}{E_0(1-\beta_E e^{-a_E t})}, E_0 > 0, \tag{8}$$

$$C(t,\tau) = t^{\alpha_5-\alpha_6}\frac{C_0(t,\tau)}{(t-\tau+\alpha_7)^{1-\alpha_6}}. \tag{9}$$

Причем функция $C_0(t,\tau)$, входящая в (9), определяется одним из нижеуказанных соотношений [1-3]:

$$C_0(t,\tau) = \varphi(\tau)\sum_{k=1}^{\infty} a_k(1-e^{-\gamma_k(t-\tau)}), \tag{10}$$

$$C_0(t,\tau) = \psi(\tau)(1-e^{-\gamma_1(t-\tau)}) + (\varphi(\tau)-\psi(\tau))\cdot(1-e^{-\gamma_2(t-\tau)}), \tag{11}$$

$$C_0(t,\tau) = A_c\varphi(\tau)(t-\tau)^{m_c}, \tag{12}$$

$$C_0(t-\tau) = A_c\varphi(\tau)(t-\tau)^{m_c}(Ba^{n_c}+1). \tag{13}$$

Старение среды описывается одним из следующих выражений:

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_0}{\tau^k+B_0}, \psi(\tau) = C_1 + \frac{A_1}{\tau^k+B_1}, k > 0, \tag{14}$$

$$\varphi(\tau) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{\tau^k}, \varphi(\tau) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\tilde{\gamma}_{k(t-\tau)}}. \tag{15}$$

Функция $f(\tau,\theta(\tau))$, входящая в (7), представлена в следующем виде:

$$f(\tau,\theta(\tau)) = \beta_1(\tau)\theta(\tau) + \beta_2(\tau)\theta^m(\tau), m > 0, \tag{16}$$

$$\beta_1(\tau) = \beta_{10} + \frac{\beta_{11}}{\tau^k+\beta_{12}}, \beta_2(\tau) = \beta_{20} + \frac{\beta_{21}}{\tau^k+\beta_{22}}, k > 0.$$

Вид функций $C^*_{vn}(x,t,H)$, $C_{1n}(x,t,H)$, $C_{2n}(x,t,H)$ в (1) обусловлен зависимостями (6)-(16), приведенными в данной работе. При этом коэффициент фильтрации, характеризующий сопротивление пористой среды движущейся жидкости согласно [4] аппроксимирован выражением:

$$K_{\Phi s}(\varepsilon(t)) = K_{\Phi s0}\left(\frac{\varepsilon(t)-\varepsilon_k}{\varepsilon_0-\varepsilon_k}\right)^{n_s}, n_s \geq 1.$$

Опишем принятые здесь обозначения: H– напор поровой жидкости; $\hat{P}_0 = \gamma \hat{H}_0$ – величина атмосферного давления; $\varepsilon(t)$ – коэффициент пористости; $\theta(t)$– сумма главных тотальных напряжений; θ^* и H^*– соответственно сумма нормальных напряжений и напор поровой жидкости, соответствующие полной стабилизации; $n = 1, 2, 3$ в зависимости от мерности рассматриваемой задачи: $x = (x_1, x_2, x_3)$– пространственные координаты; $\eta_1(E)$ и $\eta_2(E)$ – функции, характеризующие неоднородности грунтов; $\xi(E)$– функция, характеризующая изменения коэффициента бокового давления грунта в процессе его деформации; γ – удельный вес воды; $h_n^{(\alpha)}$ и $h_n^{(\alpha+1)}$ $(\alpha = 1, 2, 3;\ \ n = 1, 2, 3)$ – коэффициенты водоотдачи; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – параметры неоднородности; $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_k, \gamma_k, A_c$ и m_c– параметры ползучести; $a,\ B$ – амплитуда и параметр колебаний; C_0 и C_1– предельные значения меры ползучести; $k, A_0, B_0, A_1, B_1, A_k, \gamma_k$ – некоторые параметры, зависящие от свойства и условий старения среды; $E_0, \beta_E, \alpha_E,\ k, m, \beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{22}$– опытные данные; $K_{\Phi S0}$– начальный коэффициент фильтрации; ϵ_0 и ε_k – соответственно начальный и конечный коэффициент пористости.

4.2 Метод введения новой неизвестной функции. Метод преобразования неоднородных граничных условий в однородное

Задача может быть решена различными методами численного анализа и уравнений математической физики. Здесь предпочтение отдается методу введения новой неизвестной функции, методу преобразования неоднородных граничных условий в неоднородные, методу итерации, методу наименьших квадратов, методу аппроксимации, методу введения новых переменных и теореме разложения для собственных функций.

Введем новую неизвестную функцию $W(x, t)$

$$H(x, t) = \psi(x, t) + W(x, t), \tag{17}$$

представляющее собой отклонение от известной функции $\psi(x, t)$, характеризующей напор некоторого водоносного слоя, примыкающего к рассматриваемому участку. Эта функция $W(x, t)$ будет определяться как решение уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial t} = C^*_{vn}(x, t, W) L^*(W) - C_{1n}(x, t, W) \times$$

$$\times \left\{ \int_{\tau_1}^{t} f(\tau, W) K_1(t, \tau) d\tau + f(t, W) K_2(t, t) \right\} + C_{2n}(x, t, W) + D_n(x, t) \tag{18}$$

с нулевыми граничными условиями:

$$\left.\begin{array}{l} h_1^{(1)} \frac{\partial W}{\partial x_1} - h_1^{(2)} W \Big|_{x_1=-1} = 0, \\ h_1^{(3)} \frac{\partial W}{\partial x_2} + h_1^{(4)} W \Big|_{x_1=+1} = 0; \end{array}\right\}, \tag{19}$$

$$\left.\begin{array}{l} h_2^{(1)} \frac{\partial W}{\partial x_2} - h_2^{(2)} W \Big|_{x_2=-1} = 0, \\ h_2^{(3)} \frac{\partial W}{\partial x_2} + h_2^{(4)} W \Big|_{x_2=+1} = 0; \end{array}\right\}, \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} h_3^{(1)}\frac{\partial W}{\partial x_3} - h_3^{(2)}W\Big|_{x_3=0} = 0,\\ h_3^{(3)}\frac{\partial W}{\partial x_3} + h_3^{(4)}W\Big|_{x_3=1} = 0. \end{aligned}\right\}, \tag{21}$$

При этом начальное условие (2) будет выглядеть следующим образом:

$$W(x,\tau_1) = \frac{\theta_0^*}{n\gamma} + H_0^* - \psi(x,\tau_1). \tag{22}$$

Представив функцию $\psi(x,t)$ в виде

$$\psi(x_1,x_2,x_3,t) = (\alpha_1^{(1)}x_1 + \beta_1^{(1)})\psi_1(x_2,x_3,t) + (\alpha_2^{(1)}x_1 + \beta_2^{(1)})\psi_2(x_2,x_3,t) +$$

$$+(\alpha_1^{(2)}x_2 + \beta_1^{(2)})\psi_3(x_1,x_3,t) + (\alpha_2^{(2)}x_2 + \beta_2^{(2)})\psi_4(x_1,x_3,t) +$$

$$+(\alpha_1^{(3)}x_3 + \beta_1^{(3)})\psi_5(x_1,x_2,t) + (\alpha_2^{(3)}x_3 + \beta_2^{(3)})\psi_6(x_1,x_2,t), \tag{23}$$

потребуем, чтобы она удовлетворяла условиям видов (19)-(21). Тогда коэффициенты $\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_2^{(3)}, \beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \beta_1^{(3)}, \beta_2^{(1)}, \beta_2^{(2)}, \beta_2^{(3)}$ в (23) определяются однозначно

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{h_1^{(4)}}{h_1^*}, \beta_1^{(1)} = -\frac{h_1^{(3)} + h_1^{(4)}}{h_1^*}, \alpha_2^{(1)} = \frac{h_1^{(2)}}{h_1^*}, \beta_2^{(1)} = \frac{h_1^{(1)} - h_1^{(2)}}{h_1^*},$$

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{h_2^{(4)}}{h_2^*}, \beta_1^{(2)} = -\frac{h_2^{(3)} + h_2^{(4)}}{h_2^*}, \alpha_2^{(2)} = \frac{h_2^{(2)}}{h_2^*}, \beta_2^{(2)} = \frac{h_2^{(1)} + h_2^{(2)}}{h_2^*},$$

$$\alpha_1^{(3)} = \frac{h_3^{(4)}}{h_3^*}, \beta_1^{(3)} = -\frac{h_3^{(3)} + h_3^{(4)}}{h_3^*}, \alpha_2^{(3)} = \frac{h_3^{(2)}}{h_3^*}, \beta_2^{(3)} = \frac{h_3^{(1)}}{h_3^*},$$

где

$$h_1^* = h_1^{(1)}h_1^{(3)} + 2h_1^{(2)}h_1^{(4)} + h_1^{(1)}h_1^{(4)},$$

$$h_2^* = h_2^{(2)}h_2^{(3)} + 2h_2^{(2)}h_2^{(4)} + h_2^{(1)}h_2^{(4)},$$

$$h_3^* = h_3^{(1)}h_3^{(3)} + h_3^{(2)}h_3^{(4)} + h_3^{(1)}h_3^{(4)}.$$

В дальнейшем в качестве функций $\psi_1(x_2,x_3,t)$, $\psi_2(x_2,x_3,t)$,$\psi_3(x_1,x_3,t)$, $\psi_4(x_1,x_2,t)$, $\psi_5(x_1,x_2,t)$, $\psi_6(x_1,x_2,t)$ берем следующие зависимости:

$$\psi_1(x_2,x_3,t) = \tilde{\varphi}_1(t)(1-x_2^2)^{n_1} f_1(x_2) x_3^{m_1}(1-x_3)^{k_1} f_1^*(x_3),$$

$$\psi_2(x_2,x_3,t) = \tilde{\varphi}_2(t)(1-x_2^2)^{n_2} f_2(x_2) x_3^{m_2}(1-x_3)^{k_2} f_2^*(x_3),$$

$$\psi_3(x_1,x_2,t) = \tilde{\varphi}_3(t)(1-x_1^2)^{n_3} f_3(x_1) x_3^{m_3}(1-x_3)^{k_3} f_3^*(x_3),$$

$$\psi_4(x_1,x_3,t) = \tilde{\varphi}_4(t)(1-x_1^2)^{n_4} f_4(x_1) x_3^{m_4}(1-x_3)^{k_4} f_4^*(x_3),$$

$$\psi_5(x_1,x_2,t) = \tilde{\varphi}_5(t)(1-x_1^2)^{n_5} f_5(x_1)(1-x_2^2)^{m_5} f_5^*(x_2),$$

$$\psi_6(x_1,x_2,t) = \tilde{\varphi}_6(t)(1-x_1^2)^{n_6} f_6(x_1)(1-x_2^2)^{m_6} f_6^*(x_2),$$

где: $n_i \geq 2$, $m_i \geq 2$, $k_j \geq 2$, $\tilde{\varphi}_i(t)$, $f_i(x)$, $f_i^*(x)$ $(i = 1,2,3,\ldots,6;\ j = 1,2,3,4)$ – заданные параметры и функции.

4.3 Метод итерации. Метод наименьших квадратов. Метод аппроксимации. Метод новых переменных

Задача (18)-(22) может быть решена методом итерации, обоснованным в работе [5]. Согласно этому методу перепишем задачу (18)-(22) в виде

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} = C_{vn}(t)\frac{1+(n-1)\xi(x)}{\alpha_1+\alpha_2\eta_1(x)}L(W_k) + \Phi(x,t,W_{k-1}), \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} h_1^{(1)}\tfrac{\partial W_k}{\partial x_1} - h_1^{(2)}W_k\Big|_{x_1=-1} &= 0,\\ h_1^{(3)}\tfrac{\partial W_k}{\partial x_1} + h_1^{(4)}W_k\Big|_{x_1=+1} &= 0; \end{aligned}\right\}, \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} h_2^{(1)}\tfrac{\partial W_k}{\partial x_2} - h_2^{(2)}W_k\Big|_{x_2=-1} &= 0,\\ h_2^{(3)}\tfrac{\partial W_k}{\partial x_2} + h_2^{(4)}W_k\Big|_{x_2=+1} &= 0; \end{aligned}\right\}, \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} h_3^{(1)}\tfrac{\partial W_k}{\partial x_3} - h_3^{(2)}W_k\Big|_{x_3=0} &= 0,\\ h_3^{(3)}\tfrac{\partial W_k}{\partial x_3} + h_3^{(4)}W_k\Big|_{x_3=1} &= 0. \end{aligned}\right\}, \tag{27}$$

$$W_k(x,\tau_1) = \frac{\theta_0^*}{n\gamma} + H_0^* - \psi(x,\tau_1). \tag{28}$$

$$L = \sum_{s=1}^{n} K_{\Phi S0}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, C_{vn}(t) = \frac{1}{n\gamma a_0(t)}.$$

Здесь коэффициент фильтрации $K_{\Phi S}(\varepsilon(t))$ согласно методу наименьших квадратов заменен линейной функцией

$$K_{\Phi S}(\varepsilon(t)) = K_{\Phi S0}\left(\frac{\varepsilon(t)-\varepsilon_k}{\varepsilon_0-\varepsilon_k}\right)^{n_s} \approx K_{\Phi S}(A+B\varepsilon(t)),$$

где A и B – известные константы, определяемые из условия

$$f_m = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_k}\left\{\left[\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_k-\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_0-\varepsilon_k}\varepsilon(t)\right]^{n_s} - -(A+B\varepsilon(t))\right\}^2 d\varepsilon = \min.$$

Затем выбрав в качестве функций $\xi(x)$ и $\eta_1(x)$ соответственно следующие зависимости:

$$\xi(x) = \xi_0 e^{\alpha_8 x_n}, \eta_1(x) = e^{-\alpha_8 x_n}$$

согласно методу аппроксимации, обоснованной в работе [6], функцию $1+(n-1)\xi_0\exp(\alpha_8 x_n)$ приближенно заменяем функцией $\bar{\xi}(x_n)$, а функцию $\alpha_1+\alpha_2\eta_1(x) = \alpha_1+\alpha_2\exp(-\alpha_9 x_n)$ функцией $\tilde{\eta}_1(x_n)$, т.е.

$$1+(n-1)\xi_0 e^{\alpha_8 x_n} \approx (1+(n-1)\xi_0)\exp\left(\left(\ln\frac{1+(n-1)\xi_0 e^{\alpha_8}}{1+(n-1)\xi_0}\right) x_n\right), \tag{29}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_9 x_n} \approx (\alpha_1 + \alpha_2) \exp\left(\left(\ln \frac{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_9}}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) x_n\right). \tag{30}$$

Имея в виду (29) и (30), функцию $f_1(x_n) = \frac{1+(n-1)\xi_0 e^{\alpha_8 x_n}}{\alpha_1+\alpha_2 e^{-\alpha_9 x_n}}$ приближенно заменяем функцией $\tilde{f}_1(x_n)$:

$$\frac{1+(n-1)\xi_0 e^{\alpha_8 x_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_9 x_n}} \approx \frac{(1+(n-1)\xi_0}{\alpha_1 + \alpha_2} e^{\alpha x_n}. \tag{31}$$

Здесь $\alpha = \ln \frac{(1-(n-1)\xi_0 e^{\alpha_8})(\alpha_1+\alpha_2)}{(1-(n-1)\xi_0)\left(\alpha_1+\alpha_2 e^{-\alpha_8}\right)}$

Нетрудно заметить, что при$x_n = 0$ и $x_n = 1$ аппроксимация вида (31) абсолютно точная. Внутри точек интервала (0;1) сравним исходные значения $f_1(x_n)$ с соответствующими значениями $\tilde{f}_1(x_n)$, полученными из приближенной формулы (31). Соответствующие результаты, вычисленные на ПЭВМ при различных значениях параметров $\xi_0, \alpha_8, \alpha_1, \alpha_2$ и α_9, показывают, что функция $f_1(x_n)$ с высокой точностью $(10^{--2} \ldots 10^{--3})$ точностью аппроксимирована функцией $\tilde{f}_1(x_n)$.(См. Табл. 1 - Табл. 3)Следовательно, аппроксимация вида (31) для малых значений α_8 и α_9 вполне приемлема в практических расчетах.

Таблица 1 – $\boldsymbol{\alpha}_3 = 1527 \cdot 10^{-1}$

$\mathbf{F}_1$ $(\mathbf{x}_3)$	$\mathbf{F}_2$ $(\mathbf{x}_3)$	$\|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\|$
6.7185243000E-03	6.7185243000E-03	0.0000000000E+00
6.3544726410E-03	6.4342890858E-03	7.9816444767E-05
6.0273268951E-03	6.1620787826E-03	1.3475188754E-04
5.7333457074E-03	5.9013846622E-03	1.6803895482E-04
5.4691670048E-03	5.6517195187E-03	1.8255751387E-04
5.2317695460E-03	5.4126167579E-03	1.8084721196E-04
5.0184383694E-03	5.1836295258E-03	1.6519115636E-04
4.8267337440E-03	4.9643298726E-03	1.3759612858E-04
4.6544632578E-03	4.7543079538E-03	9.9844686019E-05
4.4996567944E-03	4.5531712638E-03	5.3514469336E-05
4.3605439022E-03	4.3605489022E-03	0.0000000000E+00

4.4 Метод разложении по собственным функциям к решение задачи

Далее с учетом (31), вводим последовательно новые переменные

$y = -\frac{\alpha}{2} x_8 + \frac{1}{2} \ell n \frac{4\lambda^2}{\alpha^2 K_{\$S}}$ и $z = e^y$ тогда дифференциальное уравнение $Z^{//}(x_3) + (\lambda^2 e^{-\alpha x_3} - (\nu^2 + \rho^2)) Z(x_3) = 0$легко сводится к уравнению Бесселя [14, 15], общее решение которого известно.

Таблица 2 – $\boldsymbol{\alpha}_3 = 0,1527 \cdot 10^{-3}$

$\mathbf{F}_1$ $(\mathbf{x}_3)$	$\mathbf{F}_2$ $(\mathbf{x}_3)$	$\lvert\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\rvert$
6.7185243000E-03	6.7185243000E-03	0.0000000000E+00
6.7146878012E-03	6.7146963932E-03	8.5920035531E-08
6.7108554011E-03	6.7108706674E-03	1.5766316211E-08
6.7070270952E-03	6.7070471213E-03	2.0026106995E-08
6.7032028792E-03	6.7032257537E-03	2.2874480976E-08
6.6993827488E-03	6.6994065634E-03	2.3814564543E-08
6.6955666995E-03	6.6955895490E-03	2.7849498293E-08
6.6917547270E-03	6.6917747094E-03	1.9982394406E-08
6.6879468269E-03	6.6879620433E-03	1.5216372162E-08
6.9841929949E-03	6.6841515495E-03	8.5545366346E-09
6.7181404656E-03	6.7181404656E-03	0.0000000000E+00

Таблица 3 – $\boldsymbol{\alpha}_3 = 0,1527 \cdot 10^{-5}$

$\mathbf{F}_1$ $(\mathbf{x}_3)$	$\mathbf{F}_2$ $(\mathbf{x}_3)$	$\lvert\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\rvert$
6.7185243000E-03	6.7185243000E-03	0.0000000000E+00
6.7184859147E-03	6.7184859156E-03	8.5265128291E-13
6.7184475298E-03	6.7184475314E-03	1.5347723092E-12
6.7184091454E-03	6.7184091474E-03	2.0108359422E-12
6.7183707613E-03	6.7183707636E-03	2.2879476091E-12
6.7183323772E-03	6.7183323800E-03	2.3945290195E-12
6.7182939944E-03	6.7182939967E-03	2.2879476091E-12
6.7182556116E-03	6.7182556136E-03	2.0108359422E-12
6.7182172292E-03	6.7182172307E-03	1.5347723092E-12
6.1781788472E-03	6.7181788480E-03	8.6686213763E-13
6.7181404656E-03	6.7181404656E-03	0.0000000000E+00

Пользуясь предложенным методом [5, 6] и аппроксимацией вида (31), будем искать решение задачи (24)-(28) в виде

$$W_k(x,t) = \sum_{i_1}^{\infty}\sum_{i_2}^{\infty}\sum_{i_3}^{\infty} T_{k_{i_1 i_2 i_3}}(t) \cdot (\cos\mu_{i_1}x_1 + A^*_{i_1}\sin\mu_{i_1}x_1)\times$$

$$\times(\cos\mu_{i_2}x_2 + C^*_{i2}\sin\mu_{i_2}x_2)\cdot V_{vi_1 i_2}\left(\frac{2\lambda_{i_1 i_2 i_3}}{\alpha_{10}\sqrt{K_{\Phi S0}}}e^{-\frac{\alpha_{10}}{2}x_n}\right). \qquad (32)$$

Здесь $T_{k_{i_1 i_2 i_3}}(t)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ – некоторые неизвестные функции от t подлежащие определению; $V_{v_{i_1 i_2}}\left(\frac{2\lambda_{i_1 i_2 i_3}}{\alpha_{10}\sqrt{K_{\Phi S0}}}e^{-\frac{\alpha_{10}}{2}x_n}\right)$ – функция из комбинации функции Бесселя первого и второго рода индекса; $v_{i_1 i_2}$, $\lambda_{i_1 i_2 i_3}$– положительные корни уравнения, составленного из комбинаций функций Бесселя; μ_{i_1} и μ_{i_2}– положительные корни уравнения, составленного из комбинаций тригонометрических функций; $A^*_{i_1}, C^*_{i_1}, \alpha_{10}$ – известные коэффициенты.

Предположим, что функция $\Phi(x, t, W_{k-1})$ может быть разложена в ряд Фурье-Бесселя

$$\Phi(x, t, W_{k-1}) = \sum_{i_1}^{\infty}\sum_{i_2}^{\infty}\sum_{i_3}^{\infty} \tilde{\Phi}^{(k-1)}_{i_1 i_2 i_3}(t) \cdot (\cos\mu_{i_1}x_1 + A^*_{i_1}\sin\mu_{i_1}x_1)\times$$

$$\times(\cos\mu_{i_2}x_2 + C^*_{i_2}\sin\mu_{i_2}x_2) \cdot V_{v_{i_1 i_2}}\left(\frac{2\lambda_{i_1 i_2 i_3}}{\alpha_{10}\sqrt{K_{\Phi S0}}}e^{-\frac{\alpha_{10}}{2}x_n}\right), \tag{33}$$

где $\tilde{\Phi}^{(k-1)}_{i_1 i_2 i_3}(t)$– известная функция.

Подставляя ряд (32) в уравнение (24) и принимая во внимание (33), получим

$$T'_{k_{i_1 i_2 i_3}}(t) + \lambda^2_{i_1 i_2 i_3}!_{vn}(t)T_{k_{i_1 i_2 i_3}}(t) = \tilde{\Phi}^{(k-1)}_{i_1 i_2 i_3}(t). \tag{34}$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (34) с начальным условием (28), находим

$$T_{k_{i_1 i_2 i_3}}(t) = \left\{\int_0^t \tilde{\Phi}^{(k-1)}_{i_1 i_2 i_3}(\tau)e^{\lambda_{i_1 i_2 i_3}\int C_{vn}(\tau)d\tau}d\tau + C_{i_1 i_2 i_3}\right\} \cdot e^{\lambda^2_{i_1 i_2 i_3}\int C_{vn}(t)dt},$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots \tag{35}$$

Подставив (35) в (32), получим решение задачи (24)-(28).

Полученный ряд вида (32) сходится. Значение функции $T_{k_{i_1 i_2 i_3}}(t)(k = 1, 2, 3)$, определяемое по формуле (35), уменьшается как с увеличением i_1, i_2 и $\lambda_{i_1 i_2 i_3}$, так и с течением времени. Следовательно, последовательность $\{W_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ сходится к решению задачи (18)-(21) при$k \to \infty$.

Подставив функцию $W(x, t)$ в (17), получим решение поставленной задачи (1)-(5).

4.5 Расчет осадок грунтового основания

Расчет осадок грунтового основания согласно методу описанному в [1] и полученным результатам легко определить осадок грунтовых основания вызванной нагрузки q:

$$S(t) = \frac{s\gamma a_0}{1+\varepsilon_0}\int_0^h \frac{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_8 x_3}}{1 + 2\xi e^{-\alpha_9 x_3}}\left(\frac{\theta^*}{n\gamma} + H^*_0 - H_k(x, t)\right)dx_3 \tag{36}$$

Предварительные расчеты по формуле (36) показали:

1. Нагрузка приложенная на верхней поверхности слоя земной массы, со временем переносится на его каркас.

2. При больших значениях параметра α_8 и малых значениях параметровα_1, α_2 уплотнение грунта не зависят от времени

3. С увеличением коэффициента бокового давления осадок грунтовых оснований уменьшается.

4. Слой отложений неоднородных грунтовых оснований с увеличением параметра α_3увеличивается, а затем постоянно уменьшается.

5. Возраст скелета достаточно заметно влияет на характер уплотнения грунтовых оснований. Это влияние может быть незначительным только для$A_0,\ A_1,\ A_k,\ \beta_{10},\ \beta_{11},\ \beta_{20},\ \beta_{21} \to 0$

6. Деформация неоднородных грунтов обусловленных их консолидацией, от типа краевых условий. В зависимости от краевых условий может происходит набухания грунта, что вызывает после некоторых времени незначительный осадок.

5 Заключение

Разработанная модель и обоснованные методы дают возможность анализа количественного и качественного влияния коэффициентов водонасыщенности грунта и растворимости соли и жидкости, параметров упругомгновенной деформации, линейной и нелинейной ползучести, функции, характеризующей изменение возраста скелета грунта в зависимости от пространственных координат, параметров линейной и нелинейной зависимости и между начальным градиентом напора и коэффициентом пористости, а также краевых условий на процесс осадки грунтовых оснований сооружений.

Статья посвящена одному из недостаточно изученных вопросов уплотнения неоднородных наследственно стареющих грунтов. Метод аппроксимации является вкладом в прикладную механику грунтов.

Полученные результаты и расчетная формула (36) дают нам возможность количественного и качественного анализа осадки грунтовых оснований.

Список литературы

[1] Флорин В.А. Основы механики грунтов.– М.:Стройиздат,1959, 1961.–Т.1-2.

[2] Месчян С.Р. Ползучесть глинистых грунтов.– Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1967.– 318 с.

[3] Гольдин А.Л., Месчян С.Р., Рустамян Г.Ф. //ДАН Арм.ССР. – 1985, №2.– С.78-81.

[4] Цытович Н.А., Зарецкий Ю.К., Малышев М.В., Абелев М.Ю., Тер-Мартиросян З.Г. Прогноз скорости осадок оснований сооружений. – М.: Строй издат, 1967. – 238 с.

[5] Алтынбеков Ш., Ширинкулов Т.Ш. //ДАН РУз. Математика. Технические науки. Естествознание.– 1996, №1-2.– С.25-27.

[6] Алтынбеков Ш. //Проблемы механики.– 1995, №3-4.– С.5-7.

[7] Дасибеков А., Юнусов А.А., Айменов Ж.Т., Алибекова Ж.Д. //Успехи современного Естествознания. 2014, №4. – С.87 -95.

[8] Дасибеков А., Юнусов А.А., Сайдуллаева Н.С., Юнусова А. А. //Международный журнал экспериментального образования.-М.,2012.-№8.-С. 67-72.

[9] Парамонов В.Н. //Интернет –журнал «Реконструкция городов и геотехнического строительства» 1999.-№1.-1-8.

[10] Парамонов В.Н. Метод конечных элементов при решении нелинейных задач геотехники. Санкт-Петербург; Группа компаний Геореконструкция. 2012. – 264 с.

[11] Давыдов О.П. /Российский государственный университет НЕФТИ и ГАЗА. М.:- 2012. – С.33-40.

[12] Князева С.А. //Геотехника.DOI 10.23968/1999-5571-2018-15-3-77-83.

[13] Алтынбеков Ш.,Ниязымбетов А.Д. //Наука и жизнь Казахстана.2019.-№5/2.-С. 104-109.

[14] Коренов Б.Г. Некоторые задачи упругости и теплопроводности, решаемые в Бесселевых функциях. М.: Физматгиз. 1960.-438 с.

[15] Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функции – М. Наука, 1961.- 287с.

[16] Баршевский Б.Н. Одномерная задача консолидации для грунтов с переменными по глубине модулем деформации //В сб.: Некоторые вопросы машиностроения и строительной механикй. – Ленинград, 1967 Вып.68. ч.III. –С.55-61.

References

[1] Florin V.A. "Osnovy mehaniki gruntov. [Fundamentals of soil mechanics]".- Moscow: Stroizdat,1959, 1961.- Vol. 1-2.

[2] Meschyan S.R. "Polzuchest glinistyh gruntov.[Creep of clay soils]". – Yerevan: Publishing house of the Armenian Academy of Sciences, 1967.– 318 p.

[3] Gol'din A.L., Meschyan S.R., Armen Rustamyan, G.F. //DOKLADY Arm.SSR. - 1985, No. 2.– Pp. 78-81.

[4] Tsytovich N.A., Zaretsky Yu.K., Malyshev M.V., Abelev M.Yu., Ter-Marti-Rosen Z.G. "Prognoz skorosti osadok osnovanii soorujenii[Prediction of sediment speed of construction bases.]". - M.: Stroypublications, 1967. – 238 p.

[5] Altynbekov S., Shirinkulov T.S. //DOKLADY of the Republic of Uzbekistan. Mathematics.Technical sciences. Natural science.- 1996, no. 1-2.- Pp. 25-27.

[6] Altynbekov Sh. //Problems of mechanics.- 1995, no. 3-4.- P. 5-7.

[7] Tasibekov A., Yunusov A.A., Iminov J.T., Alibekova J.D. //Progress in modern Natural science. 2014, no. 4. - C. 87 -95.

[8] Tasibekov A., Yunusov A.A., Saidullaeva N. With., Yunusov A.A. //Internationaljournal of experimental education.- Moscow, 2012.- No. 8.- Pp. 67-72.

[9] Paramonov V.N. // Online magazine "Reconstruction of cities and geotechnical construction"1999.- No. 1.- 1-8.

[10] Paramonov V.N. "Metod konechnyh elementov pri reshenii nelineinyh zadach geotehniki.[finite element Method for solving nonlinear problems geotechnics.]"// Saint Petersburg; Georeconstruction Group of companies. 2012. – 264 PP.

[11] Davydov O.P. / Russian state University of OIL and GAS. Moscow: - 2012. - P. 33-40.

[12] Knyazeva S.A. /Geotechnical Engineering.DOI 10.23968/1999-5571-2018-15-3-77-83.

[13] Altynbekov Sh., Niyazymbetov A.D. / Science and life of Kazakhstan.2019.- No. 5/2.-Pp. 104-109.

[14] Korenov B.G. "Nekotorye zadachi uprugosti i teploprovodnosti, reshaemye v Besselevyh funkciyah. [Some problems of elasticity and thermal conductivity solved in Bessel functions.] "Moscow: Fizmatgiz. 1960.-438 p.

[15] Korenev B.G. "Vvedenie v teoriyu besselevyh funkcii. [Introduction to the theory of Bessel functions.] M. Nauka, 1961.- 287c.

[16] Баршевский Б.Н. "Odnomernaya zadacha konsolidacii dlya gruntov s peremennymi po glubine modulem deformacii [One-Dimensional problem of consolidation for soils with variable depth modulus of deformation] "//in SB.: Some questions of mechanical engineering and construction mechanics. - Leningrad, 1967 Issue 68. CH. III. - P. 55-61.