УДК 517.946

А.У. Серикбаев

Казахский национальный аграрный университет, Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: aserikbayev@rambler.ru

К задаче об определении коэффициента дифференциального уравнения

Методы интегральных уравнений, позволяющие сводить обратные задачи для уравнений в частных производных к интегральным уравнениям давно стали классическими в математической физике. Они находят широкое применение при построении математических моделей различных явлений, для доказательства однозначной разрешимости полученных задач, а также служат теоретической основой разработки алгоритмов исследования этих задач, в частности численными методами. В работе методом интегральных уравнений исследуется обратная задача определения коэффициента возмущения, входящего в уравнение эллиптического типа. Исследуемая обратная задача сведена к интегральным уравнениям первого рода, ядром которого является «обратные квадраты расстояний» т.е. ядром потенциала типа Рисса. Предполагается, что искомая функция неизвестна в некоторой заданной области и принимает известные постоянные значения вне этой области. В классе ограниченных, непрерывных функций, независящих от одной из пространственных переменных доказана единственность решения рассматриваемой обратной задачи.
Ключевые слова: уравнение эллиптического типа, потенциал Кеплера, фундаментальное решение.

A.U. Serikbaev

On the problem of determining coefficient the differential equation

The method of integral equations that allow to reduce the inverse problems for partial differential equations to integral equations have long since become classics in mathematical physics. They are widely used in the construction of mathematical models of various phenomena, in order to prove the unique solvability of the resulting problem, and also serve as a theoretical basis for the development of algorithms studies of these problems, in particular numerical methods. In this paper the method of integral equations of the inverse problem of determining the coefficient perturbations appearing in the equations of elliptic type. Investigated the inverse problem is reduced to integral equations of the first kind whose kernel is the «inverse square of the distance» i.e., kernel Riesz potential type. It is assumed that the desired function is not known in a predetermined area and adopts the known constant values outside this region. In the class of bounded continuous functions that are independent of one of the spatial variables is proved that the solution to the inverse problem.
Key words:elliptic equations, potential Kepler, a fundamental solution.

А.У. Серікбаев

Дифференциалдық теңдеудің коэффициентін анықтау туралы есепке

Дербес туындылы теңдеулер үшін кері есепті интегралдық теңдеулерге келтіретін интегралдық теңдеулер әдісі математикалық физика ертеректен классикалық болып қалыптасты. Олар әртүрлі құбылыстардың математикалық моделін тұрғызу кезінде, алынған есептердің бірмәнді шешілімдігін дәлелдеу үшін, сонымен қатар осы есептерді зерттеу алгоритмін әзірлеудің теориялық негізі ретінде, жекелей сандық әдістермен кеңінен қолданыс тапты. Жұмыста интегралдық теңдеу әдісімен эллиптикалық типті теңдеуге кіретін, ауытқу коэффициентін анықтау кері есебі зерттеледі. Зерттелінетін кері есеп ядросы «арақашықтықтың кері квадраты» болып табылатын, яғни Рисс типтегі потенциал ядросы болатын, бірінші текті интегралдық теңдеуге келтірілген. Ізделінді функция қандай да бір берілген облыста белгісіз және осы облыстың сыртында тұрақты мәнді қабылдайды деп болжалданады. Шектелген, үзіліссіз, кеңістік айнымалылардың біреуіне тәуелсіз функциялар класында қарастырылған кері есептің шешімі жалғыздығы дәлелденді.
Түйін сөздер: эллиптикалық типті теңдеу, Кеплер потенциалы, іргелі шешім.

Введение

Пусть $u = u(x, x_0, k, \lambda)$ – решение уравнения

$$\Delta u - k^2 u + \lambda^2 a(x) u = \delta(x - x_0) \tag{1}$$

такое, что $u = u_0 + v$, где

$$u_0 = u_0(x, x_0, k, \lambda) = \frac{\exp(-\sqrt{k^2 - \lambda^2}|x - x_0|)}{4\pi|x - x_0|} \tag{2}$$

фундаментальное решение метагармонического оператора $\Delta - (k^2 - \lambda^2)$.

Рассмотрим обратную задачу для (1) в следующей постановке.

Задача(A). Восстановить функцию $b(x)$ $\quad (a(x) = 1 + b(x))$ зная, что $v(x, x_0, k, \lambda)$ удовлетворяет следующему условию

$$v(x, x_0, k, \lambda) = g_0(x, x_0, k, \lambda), x \in \mathcal{D}_1, x_0 \in \mathcal{D}_2, \tag{3}$$

здесь $\mathcal{D}_i (i = 1, 2)$ – заданные области $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}_1$ $\mathcal{D}_1 \bigcap \mathcal{D} = \emptyset$, $\mathcal{D}_1 \bigcap \mathcal{D}_2 = \emptyset$, $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$, $\lambda_0 < \lambda_1$.

Теорема. Пусть b — непрерывная ограниченная функция, причем

$$\frac{\partial b}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial c}{\partial x_i} \equiv 0 \qquad (i\text{–фиксированное число})$$

тогда решение обратной задачи(A) единственно.

Доказательство. Согласно (1) и (2) функция v удовлетворяет уравнению

$$\Delta v - (k^2 - \lambda^2) v = -\lambda^2 b(x)(u_0 + v).$$

Отсюда, обращая оператор $\Delta - (k^2 - \lambda^2)$, получим

$$v(x, x_0, k, \lambda) = -\frac{\lambda^2}{4\pi} \int\limits_{\mathcal{D}} b(y) \frac{\exp(-\sqrt{k^2 - \lambda^2}|x - y|)}{|x - y|} \cdot \left(\frac{\exp(-\sqrt{k^2 - \lambda^2}|x_0 - y|)}{4\pi|x_0 - y|} + v(y, x_0, k, \lambda) \right) dy. \tag{4}$$

В силу аналитичности v по λ мы можем по функции $g(x, x_0, k, \lambda)$ однозначно найти функцию

$$f(x, x_0, k) = -16\pi^2 \lim_{\lambda \to 0} \frac{g(x, x_0, k, \lambda)}{\lambda^2}$$

Так как $v(x, x_0, k, \lambda) = 0$ то с учетом (3), (4) имеем

$$f(x, x_0, k) = \int\limits_{\mathcal{D}} b(y) \frac{\exp(-k|y - x_0|)}{|y - x_0|} \cdot \frac{\exp(-k|y - x|)}{|y - x|} dy. \tag{5}$$

Таким образом, мы получили интегральное уравнение первого рода относительно неизвестной функции $b(x)$. Если $x = x_0$, то (5) является потенциалом типа Кеплера с ядром

$$\frac{\exp(-2k|x - y|)}{|x - y|^2}.$$

Пусть $x \neq x_0 \quad (\mathcal{D}_1 \bigcap \mathcal{D}_2 = \emptyset)$, кроме того x_0 – некоторая фиксированная точка в области $\mathcal{D}_2$, введем обозначение:

$$\mu(y, x_0, k) = b(y) \frac{\exp(-k|y - x_0|)}{|y - x_0|}, \tag{6}$$

тогда (5) имеет вид:

$$f(x, x_0, k) = \int\limits_{\mathcal{D}} \mu(y, x_0, k) \cdot \frac{\exp(-k|y - x|)}{|y - x|} dy.$$

Допустим, что $g(x, x_0, k, \lambda) \equiv 0$, т.е. $f \equiv 0$, тогда для любой метагорманической функции $U(y)$ в области $\Omega \supset \bar{\mathcal{D}}$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \mu(y, x_0, k) U(y) dy = 0, \qquad x_0 \in \mathcal{D}_2, \tag{7}$$

справедливость которого следует из леммы Новикова [1].

Предположим, что $\mu \neq 0$ для $y \in \mathcal{D}$, $x_0 \in \mathcal{D}_2$, тогда из (6) следует, что $b(y)$ не имеет постоянного знака на $\partial\mathcal{D}$. Действительно, если бы, например знак функции b был бы положительным на $\partial\mathcal{D}$, то функция $\mu > 0$ для $y \in \mathcal{D}$. Выбирая в равенстве (7) в качестве $U(y)$ положительное решение уравнения $\Delta U - k^2 U = 0$ в области $\mathcal{D}$, получим противоречие. Следовательно, $sign\mu \neq const$, $y \in \partial\mathcal{D}$. Предположим $b(y) \not\equiv 0$. Возьмем в равенстве (7)

$$U(y) = \frac{\partial H(y)}{\partial y_i},$$

где $H(y)$— метагармоническая функция в области $\Omega \supset \bar{\mathcal{D}}$, получим равенство

$$\Im(H) = \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \mu(y, x_0, k) H(y)(q, n_y) ds - \int\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial \mu(y, x_0, k)}{\partial y_i} H(y) dy, \tag{8}$$

где q — единичный вектор, направление которого совпадает с направлением оси Oy_i, n_y — единичный вектор внешней нормали в точку $y \in \partial\mathcal{D}$.

Пусть область $\mathcal{D}_2$ расположена так, что $y_i - x_{0i} > 0$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{e^{-k|y - x_0|}}{|y - x_0|} \right) < 0 \qquad \text{для} \quad y \in \mathcal{D}.$$

Введем обозначение:

$$\begin{aligned} &\partial\mathcal{D}^+ = \{y \in \partial\mathcal{D}, \quad \mu(y, x_0, k) \quad (q, n_y) > 0\}, \\ &\partial\mathcal{D}^- = \{y \in \partial\mathcal{D}, \quad \mu(y, x_0, k) \quad (q, n_y) \leq 0\}, \\ &\mathcal{D}_{b^+} = \{y \in \mathcal{D}, \quad b(y) \geq 0\}, \\ &\mathcal{D}_{b^-} = \{y \in \mathcal{D}, \quad b(y) > 0\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Определим на поверхности $\partial\mathcal{D}$ функцию следующим образом:

$$\varphi(y)=\begin{cases}1, & y\in\partial\mathcal{D}^+\\ 0, & y\in\partial\mathcal{D}^-\end{cases} \tag{10}$$

Распространяя равенство (8) на функцию $H_\varphi(y)$, метагармоническую в области $\mathcal{D}$ и на границе $\partial\mathcal{D}$, принимающую почти всюду значения (10), получим

$$\Im(H_\varphi)=\int\limits_{\partial\mathcal{D}^+}\mu(y,x_0,k)H(y)(q,n_y)ds-$$

$$\int\limits_{\mathcal{D}_{b^+}}H_\varphi(y)\frac{\partial\mu(y,x_0,k)}{\partial y_i}dy-\int\limits_{\mathcal{D}_{b^-}}H_\varphi(y)\frac{\partial\mu(y,x_0,k)}{\partial y_i}dy=0. \tag{11}$$

Из (9), а также из структуры функции μ имеем

$$\frac{\partial\mu(y,x_0,k)}{\partial y_i}>0,\qquad y\in\mathcal{D}_{b^-}$$

$$\frac{\partial\mu(y,x_0,k)}{\partial y_i}\le 0\qquad y\in\mathcal{D}_{b^+}.$$

Обозначим через $\partial\mathcal{D}_{b^-}$ — границу $\mathcal{D}_{b^-}$, а также обозначим

$$\partial\mathcal{D}^+_{b^-}=\{y\in\partial\mathcal{D}_{b^-},(q,n_y)<0;$$

$$\partial\mathcal{D}^-_{b^-}=\{y\in\partial\mathcal{D}_{b^-},(q,n_y)\ge 0.$$

Так как $0<H_\varphi(y)<1$, $y\in\mathcal{D}$, то

$$\int\limits_{\mathcal{D}_{b^+}}H_\varphi(y)\frac{\partial\mu(y,x_0,k)}{\partial y_i}dy>-\int\limits_{\mathcal{D}_{b^+}}\frac{\partial\mu(y,x_0,k)}{\partial y_i}dy=\int\limits_{\partial\mathcal{D}_{b^-}}\mu(y,x_0,k)(q,n_y)ds=$$

$$-\int\limits_{\partial\mathcal{D}^+_{b^-}}\mu(y,x_0,k)(q,n_y)ds-\int\limits_{\partial\mathcal{D}^-_{b^-}}\mu(y,x_0,k)(q,n_y)ds. \tag{12}$$

Из (11) и (12) имеем

$$\Im(H_\varphi)\ge\left[\int\limits_{\partial\mathcal{D}^+}\mu(y,x_0,k)(q,n_y)ds-\int\limits_{\partial\mathcal{D}^+_{b^-}}\mu(y,x_0,k)(q,n_y)ds\right]+$$

$$+\left[-\int\limits_{\partial\mathcal{D}^-_{b^-}}\mu(y,x_0,k)(q,n_y)ds\right]+\left[-\int\limits_{\mathcal{D}_{b^+}}H_\varphi(y)\frac{\partial\mu(y,x_0,k)}{\partial y_i}dy\right]. \tag{13}$$

Из (9) и из свойства функции μ следует, что в правой части (13) каждое из трех слагаемых в квадратных скобках неотрицательно, следовательно, $\Im(H_\varphi)>0$ что противоречит

(11). Теорема доказана.

Заключение

Методом интегральных уравнений исследована обратная задача определения коэффициента возмущения, входящего в уравнение эллиптического типа и в классе ограниченных, непрерывных функций, независящих от одной из пространственных переменных доказана единственность решения.

Литература

[1] *Кирейтов В.Р.* Прямые и обратные задачи Дирихле для потенциала Кеплера.- Новосибирск: Издательский дом «Манускрипт», 2002.-240 с.

[2] *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа - Москва. 1957, 256 с.

[3] *Петровский И.Г.* Лекции по теории интегральных уравнений - Москва. 1965, 127 с.

References

[1] *Kreitov B.R* Primi i obratnie Dirixle dly potensiala Keplera.- Novosibirsk: «Manuskript», 2002.-240 c.

[2] *Miranda K.* Yravnenia s chastnimi proizvodnimi elliptizheskogo typa - Moskva. 1957, 256 c.

[3] *Petrovski I.G.* Leksi po teori integralnix yravneni - Moskva. 1965, 127 c.