

УДК 004.051

А.А. Исахов \*, Е.Р. Хан, Н. Темірбекұлы

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы

\* E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

**Моделирование процесса отрыва течения за обратным уступом в канале**

В работе приводятся численные решения двумерного ламинарного течения за обратным уступом в канале для чисел Рейнольдса не превышающих 400. Для решения двумерных несжимаемых уравнений Навье-Стокса, описывающие течение за обратным уступом, применяется k-ε модель турбулентности на основе RANS и решается данная модель численным методом "маркеров и ячеек" который использует разнесенную сетку. Полученное уравнение Пуассона, удовлетворяющее дискретному уравнению неразрывности, решается на каждом шаге по времени итерационным методом Гаусс-Зейделя. Разностные уравнения для движения, кинетической энергии турбулентности и ее диссипации решаются простым явным методом. Это предполагает, что давление, кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации определяется на пересечении сетки, а компоненты скорости на границах. Для адекватного моделирования течения за обратным уступом с помощью k-ε модель турбулентности применяются пристеночные функции. Полученные численные решения ламинарного течения за обратным уступом сравниваются с экспериментальными и численными результатами, приведенные в списке литературы. Целью численного исследования является расширить знания о течении за обратным уступом для углубления знания о внутреннем течении.

**Ключевые слова:** обратный уступ, k-ε модель турбулентности, RANS, канал, метод "маркеров и ячеек" разделение и воссоединение потоков, отрывное течение.

A. Issakhov, Y. Khan, N. Temirbekuli

**Modeling separated flow structure over a backward-facing step**

Numerical solutions of 2-D laminar channel flow over a backward-facing step at Reynolds number up to 400 are presented in this work. The governing 2-D incompressible Navier-Stokes equations that describe flow over a backward-facing step are solved with the k-ε turbulence model and numerical method MAC, which uses staggered grids. Poisson equation that satisfies the discrete continuity equation is solved at each time step by iterative Gauss-Seidel method. Difference equations for the motion, turbulent kinetic energy and its dissipation solved by a simple explicit method. This implies that the pressure, turbulent kinetic energy and dissipation rate is determined at the intersection of the grid, and the velocity components at the boundaries. For an adequate simulation flow over backward-facing step by k-ε turbulence model applied wall functions. Present numerical solutions of the laminar flow over a backward-facing step are compared with experimental and numerical results found in literature. The objective of the numerical investigation is to add to the existing knowledge of the backward-facing step flow to deepen our understanding of the internal flow.

**Key words:** backward-facing step, channel, k-ε turbulence model, RANS, MAC method, flow separation and reattachment, separated flow.

А.А. Исахов, Е.Р. Хан, Н. Темірбекұлы  
Каналдағы кері кертпешті ағысының бөлігін моделдеу үрдісі

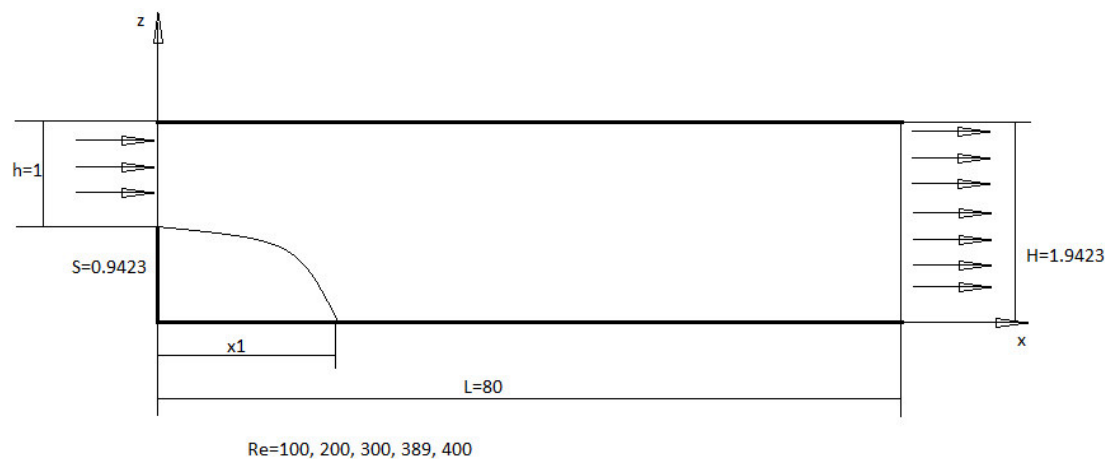
Жұмыста 400 ден аспайтын Рейнольдс саны үшін кері кертпеш каналдағы екі өлшемді ламинарлы ағысты сандық шешімі келтірілген. Кері кертпешті сипаттайтын сығылмайтын екі өлшемді Навье-Стокс теңдеуін шешу үшін, RANS негізінде турбуленттіліктің k-ε моделі қолданылады және аталған модель "маркер және ұяшық" сандық әдісімен шешіледі. Үзіліссіз дискретті теңдеуді қанағаттандыратын алынған Пуассон теңдеуі уақыт бойынша әр қадамда Гаусс-Зейдель итерациялық әдісімен шығарылады. Қозғалыстың, кинетикалық энергиясының турбуленттілігі мен диссипациясы үшін айырымдылық теңдеулер қарапайым айқын әдіспен шығарылады. Бұдан қысым, кинетикалық энергияның турбуленттілігі мен диссипациясының жылдамдығы тордық қиылысатын жерінде анықтылатынын, ал жылдамдық компоненттері шекарада анықталатындығын болжауға болады. Турбуленттіліктің k-ε моделі көмегімен кері кертпешті ағысты нақты моделдеу үшін қабырға функциялары қолданылады. Кері кертпешті ламинарлы ағыс үшін алынған сандық шешімдер әдебиеттер тізіміндегі эксперименталды және сандық нәтижелермен салыстырылады. Сандық зерттеудің мақсаты ішкі ағыстар туралы білімді тереңдетуде кері кертпештің ағысы туралы білімді көейту болып табылады.

**Түйін сөздер:** кері кертпеш, турбуленттіліктің k-ε моделі, RANS, канал, "маркер және ұяшық" әдісі, ағындарды бөлу және біріктіру, үзілмелі ағыс.

## Введение

Движение жидкости с разделением и воссоединением потоков встречается во многих задачах механики жидкости и газа. Одними из них являются задачи о переносе тепла, течения в естественных каналах, течение вокруг препятствия и т.д. Важность данного процесса говорит о количестве публикаций, где особое внимание уделялось построению оборудования [1-3] и разработке экспериментальных и теоретических методов для детального изучения течений с областями разделения [4-6]. После построения оборудования и проведения экспериментов появилась возможность детального изучения внутреннего течения с разделением и воссоединением потоков и разработки численных моделей, которые бы правильно описывали всю физику процесса. До настоящего времени известны много работ, посвященных численному моделированию процесса для течений разных геометрий. Среди них заслуживает особого внимания течение за уступом в канале, ввиду легкости своей геометрии. Однако, несмотря на свою простоту, в ней наблюдаются все процессы, происходящие во внутреннем течении в зависимости от числа Рейнольдса ( $Re$ ) и геометрических параметров, таких как высота уступа и высота канала [7-8]. Одним из важных экспериментальных данных течения за уступом являются экспериментальные данные Армали и др. [9]. В их эксперименте отношение высоты канала к высоте канала без высоты уступа, т. е.  $H/h$  (Рисунок 1) равен 1.9423. Также Ли и др. [16] проводили эксперименты течения за уступом с отношением  $H/h$  равное 1.17 и 2.0. В списке литературы приведены немало статей, в которых получены численные результаты двумерного устойчивого несжимаемого течения за уступом. Например, в работах [10-12], перечисленных в списке литературы, которые являются только частью аналогичных работ, показаны результаты для чисел  $Re$  меньше 800. Кроме работ [10-12, 15] и многих других, Рамсак и др. [17] приводят численные решения для устойчивого течения за уступом при  $Re = 1000$ . А в работе [18] получено устойчивое численное решение течения за уступом с помощью метода конечных элементов при числах  $Re$  меньше

5500. В работах [17] и [18] показано, что можно получить численные решения при числах  $Re$  намного превосходящих  $Re = 800$ . Также немало работ посвящено исследованию численной устойчивости течения за уступом. К примеру Фортин и др. [19] изучали устойчивость двумерного несжимаемого течения за уступом до числа  $Re = 1600$ . Баркли и др. [20] провели численный анализ устойчивости течения за уступом с отношением  $H/h = 2$ . Они продолжили свои исследования до числа  $Re = 1500$  и установили что течение остается линейно устойчивым к двумерным возмущениям. Ертурк и др. [21] представляют эффективный, быстрый и устойчивый численный метод для устойчивых несжимаемых уравнений Навье-Стокса, при котором возможно использование сгущенной сетки в их численном решении. Данный метод был протестирован на задаче о каверне. Впоследствии численный метод из работы [21] был применен для задачи двумерных устойчивых несжимаемых течений за уступом при больших числах Рейнольдса, которая описана в работе [14] и представлены ее подробные результаты с отношениями  $H/h$  равными 1.942 и 2.0, сравниваемые с экспериментальными данными. Далее в данной работе приведена математическая модель и граничные условия, представлена численная модель и приводятся полученные численные результаты, после чего дается заключение о проделанной работе. Данная работа направлена на углубления знания о течении за уступом (Рисунок 1) и расширении представления о внутреннем течении и процессов разделения и воссоединения потоков с помощью изучения распределения скоростей при различных числах Рейнольдса. Для изучения внутреннего течения за уступом применена  $k - \epsilon$  модель турбулентности на основе RANS и численный метод "маркеров и ячеек". Сравниваются численные результаты с экспериментальными данными Армали и др. [9] и с численными данными Ертурк и др. [14] и Чианг и др. [22] при разных числах Рейнольдса.



**Рисунок 1**—Схематическое представление течения за уступом.

### Математическая постановка задачи течения жидкости за уступом

Математическая модель, представляющая двумерные нестационарные несжимаемые турбулентные течения за уступом, описываются уравнениями Навье-Стокса, где рейнольдсовы напряжения можно представить в виде

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u_i u_j} = \rho \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k,$$

где  $\rho \overline{u_i u_j}$  - рейнольдсовы напряжения [Па],  $\rho$  - плотность жидкости [ кг/м3 ],  $\nu_t$  - вихревая вязкость [ м2/с ],  $k = (1/2) \overline{u_i^2}$ , - кинетическая энергия турбулентности [ м2 / с2 ],  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Система уравнений движения и неразрывности двумерной несжимаемой жидкости в тензорном виде принимает вид

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right]$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

где  $U_i$  - вектор скорости [м/с],  $p$  - давление [Па],  $\nu$  - кинематическая вязкость [ м2 / с]. Вихревая вязкость  $\nu_t$  является функцией от  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{2}$$

где  $C_\mu$  - безразмерная постоянная,  $f_\mu$  - пристеночная функция.

Уравнения для  $k$  и  $\varepsilon$  имеют следующий вид:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\tau_{ij}}{\rho} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \tag{3}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} \frac{\tau_{ij}}{\rho} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t / \sigma_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \tag{4}$$

где  $f_1$  и  $f_2$  - пристеночные функции,  $C_{\varepsilon 1}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$  - безразмерные константы.

Пристеночные функции имеют вид

$$f_\mu = \exp \left[ \frac{-3.4}{(1 + R_T/50)^2} \right], \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 1 - 0.3 \exp(-R_T^2), \quad R_T = k^2 / \nu \varepsilon.$$

Безразмерные постоянные принимают стандартные значения  $C_\mu = 0.09$ ,  $\sigma_k = 1$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ .

Система уравнений переменных  $U_i$ ,  $p$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$  имеет следующий безразмерный вид

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{1}{Re} + C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right]$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{1}{Re} + C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} / \sigma_k \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{1}{Re} + C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} / \sigma_\varepsilon \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (7)$$

### Граничные условия

Граничные условия на непроницаемых стенках:

Логарифмический профиль скорости вблизи стенки в безразмерных переменных записывается как

$$U_p = U_\tau \left( \frac{1}{K} \ln y_\tau^* + B \right),$$

где  $y_\tau^* \equiv \frac{y_p U_\tau}{\nu}$ ,  $B=5.5$ ,  $K=0.41$  - константа Кармана,  $U_\tau$  - динамическая скорость на стенке.  $U_\tau \equiv C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}$  ( $k_p$  - величина кинетической энергии турбулентности), скорость диссипации кинетической энергии турбулентности  $\varepsilon_p = C_\mu^{3/4} k_p^{3/2} / k y_p$ .

Граничные условия на входе:

$$U_1 = U_0(y, t), \quad U_2 = 0, \quad k = k_0(y, t), \quad \varepsilon = \varepsilon_0(y, t)$$

Граничные условия на выходе:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = 0, \quad U_2 = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$$

### Численный метод

Для решения данной задачи использовался численный метод "маркеров и ячеек" [23], который использует разнесенную сетку. Это предполагает, что давление, кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации определяется на пересечении сетки, а скорости на границах (Рисунок 2).

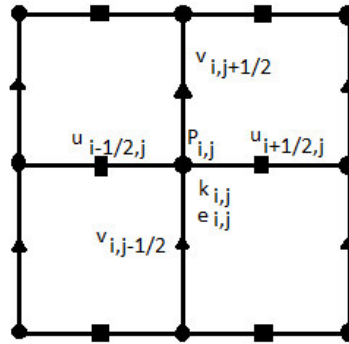


Рисунок 2 – Разнесенная сетка.

Примем обозначения  $U_1 = u$ ,  $U_2 = v$  тогда разностное уравнение неразрывности (5) на разнесенной сетке примет вид:

$$\frac{u_{j+1/2,k}^{n+1} - u_{j-1/2,k}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{j,k+1/2}^{n+1} - v_{j,k-1/2}^{n+1}}{\Delta y} = 0 \tag{8}$$

разностное уравнение компоненты скорости  $u$  (5) на разнесенной сетке примет вид

$$u_{j+1/2,k}^{n+1} = F_{j+1/2,k}^n - \Delta t \left( \frac{p_{j+1,k}^{n+1} - p_{j,k}^{n+1}}{\Delta x} \right) \tag{9}$$

где

$$F_{j+1/2,k}^n = u_{j+1/2,k}^n + \Delta t \left[ \left( \frac{1}{Re} + C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \left( \frac{u_{j+3/2,k} - 2u_{j+1/2,k} + u_{j-1/2,k}}{\Delta x^2} + \frac{u_{j+1/2,k+1} - 2u_{j+1/2,k} + u_{j+1/2,k-1}}{\Delta y^2} \right) - \frac{(u^2)_{j+1,k} - (u^2)_{j,k}}{\Delta x} - \frac{(uv)_{j+1/2,k+1/2} - (uv)_{j+1/2,k-1/2}}{\Delta y} \right]^n$$

Неопределенные на разнесенной сетке члены находятся следующим образом

$$u_{j+1,k} = \frac{u_{j+1/2,k} + u_{j+3/2,k}}{2}$$

$$(uv)_{j+1/2,k+1/2} = \frac{u_{j+1/2,k} + u_{j+1/2,k+1}}{2} \cdot \frac{v_{j,k+1/2} + v_{j+1,k+1/2}}{2}$$

Аналогичным образом получается разностная аппроксимация для компоненты скорости  $v$  (5) на разнесенной сетке

$$v_{j,k+1/2}^{n+1} = G_{j,k+1/2}^n - \Delta t \left( \frac{p_{j,k+1}^{n+1} - p_{j,k}^{n+1}}{\Delta y} \right) \tag{10}$$

где

$$G_{j,k+1/2}^n = v_{j,k+1/2}^n + \Delta t \left[ \left( \frac{1}{Re} + C_{\mu} f \mu \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \left( \frac{v_{j+1,k+1/2} - 2v_{j,k+1/2} + v_{j-1,k+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{v_{j,k+3/2} - 2v_{j,k+1/2} + v_{j,k-1/2}}{\Delta y^2} \right) - \frac{(uv)_{j+1/2,k+1/2} - (uv)_{j-1/2,k+1/2}}{\Delta x} - \frac{(v^2)_{j,k+1} - (v^2)_{j,k}}{\Delta y} \right]^n$$

В уравнениях (9) и (10) давление входит неявно. Оно определяется до вычисления (9) и (10) следующим образом:

$$\frac{p_{j+1,k}^{n+1} - 2p_{j,k}^{n+1} + p_{j-1,k}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{p_{j,k+1}^{n+1} - 2p_{j,k}^{n+1} + p_{j,k-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{F_{j+1/2,k}^n - F_{j-1/2,k}^n}{\Delta x} + \frac{G_{j,k+1/2}^n - G_{j,k-1/2}^n}{\Delta y} \right] \quad (11)$$

Полученное уравнение Пуассона, удовлетворяющее дискретному уравнению неразрывности, решается на каждом шаге по времени итерационным методом Гаусс-Зейделя [23].

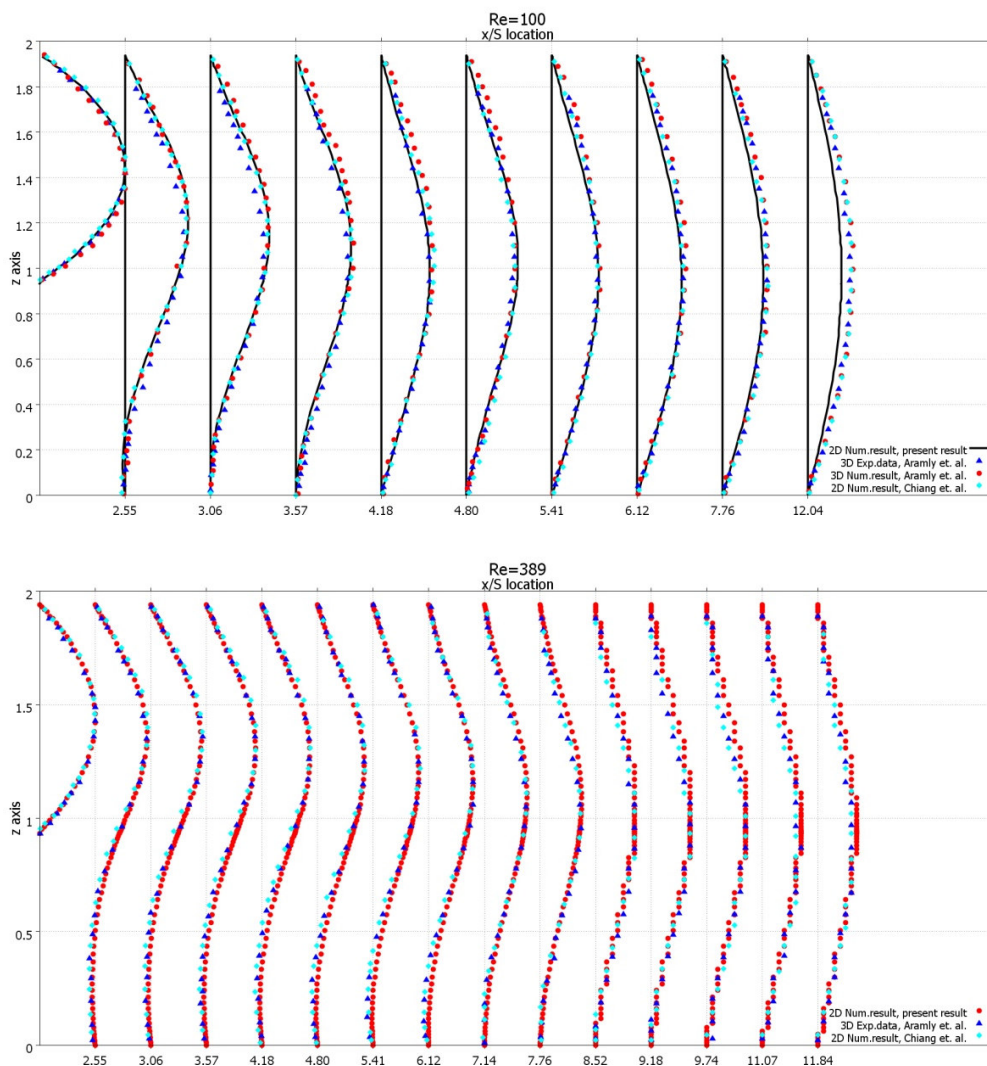
Разностные уравнения для кинетической энергии турбулентности и ее диссипации решаются простым явным методом [23] на разнесенной сетке и имеют вид:

$$\begin{aligned} & \frac{k_{j,k}^{n+1} - k_{j,k}^n}{\Delta t} + u_{j+1/2,k}^{n+1} \frac{k_{j+1,k}^n - k_{j,k}^n}{\Delta x} + v_{j,k+1/2}^{n+1} \frac{k_{j,k+1}^n - k_{j,k}^n}{\Delta y} = \\ & C_{\mu} f \mu \frac{k_{j,k}^{n2}}{\varepsilon_j^n} \left( \frac{u_{j+1/2,k}^n - u_{j-1/2,k}^n}{\Delta x} + \frac{u_{j+1/2,k}^n - u_{j-1/2,k}^n}{\Delta x} \right) \frac{u_{j+1/2,k}^n - u_{j-1/2,k}^n}{\Delta x} \\ & C_{\mu} f \mu \frac{k_{j,k}^{n2}}{\varepsilon_j^n} \left( \frac{u_{j+1/2,k+1}^n - u_{j+1/2,k}^n}{\Delta y} + \frac{v_{j+1,k+1/2}^n - v_{j,k+1/2}^n}{\Delta x} \right) \frac{u_{j+1/2,k+1}^n - u_{j+1/2,k}^n}{\Delta y} \\ & C_{\mu} f \mu \frac{k_{j,k}^{n2}}{\varepsilon_j^n} \left( \frac{v_{j+1,k+1/2}^n - v_{j,k+1/2}^n}{\Delta x} + \frac{u_{j+1/2,k+1}^n - u_{j+1/2,k}^n}{\Delta y} \right) \frac{v_{j+1,k+1/2}^n - v_{j,k+1/2}^n}{\Delta x} \\ & C_{\mu} f \mu \frac{k_{j,k}^{n2}}{\varepsilon_j^n} \left( \frac{v_{j,k+1/2}^n - v_{j,k-1/2}^n}{\Delta y} + \frac{v_{j,k+1/2}^n - v_{j,k-1/2}^n}{\Delta y} \right) \frac{v_{j,k+1/2}^n - v_{j,k-1/2}^n}{\Delta y} - \varepsilon_{j,k}^n \\ & + \frac{1}{Re} \left( \frac{k_{j+1,k}^{n2} - 2k_{j,k}^{n2} + k_{j-1,k}^{n2}}{\Delta x^2} \right) + \frac{C_{\mu} f \mu}{\sigma_k} \left( \frac{k_{j+1,k}^{n2}}{\varepsilon_{j+1,k}^n} \frac{k_{j+1,k}^n - k_{j,k}^n}{\Delta x^2} - \frac{k_{j,k}^{n2}}{\varepsilon_{j,k}^n} \frac{k_{j,k}^n - k_{j-1,k}^n}{\Delta x^2} \right) \\ & + \frac{1}{Re} \left( \frac{k_{j,k+1}^{n2} - 2k_{j,k}^{n2} + k_{j,k-1}^{n2}}{\Delta y^2} \right) + \frac{C_{\mu} f \mu}{\sigma_k} \left( \frac{k_{j,k+1}^{n2}}{\varepsilon_{j,k+1}^n} \frac{k_{j,k+1}^n - k_{j,k}^n}{\Delta y^2} - \frac{k_{j,k}^{n2}}{\varepsilon_{j,k}^n} \frac{k_{j,k}^n - k_{j,k-1}^n}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_{j,k}^{n+1} - \varepsilon_{j,k}^n}{\Delta t} + u_{j+1/2,k}^{n+1} \frac{\varepsilon_{j+1,k}^n - \varepsilon_{j,k}^n}{\Delta x} + v_{j,k+1/2}^{n+1} \frac{\varepsilon_{j,k+1}^n - \varepsilon_{j,k}^n}{\Delta y} = \\ & C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon_{j,k}^{n2}}{k_{j,k}^n} \left[ C_{\mu} f \mu \frac{k_{j,k}^{n2}}{\varepsilon_j^n} \left( \frac{u_{j+1/2,k}^n - u_{j-1/2,k}^n}{\Delta x} + \frac{u_{j+1/2,k}^n - u_{j-1/2,k}^n}{\Delta x} \right) \frac{u_{j+1/2,k}^n - u_{j-1/2,k}^n}{\Delta x} \right. \\ & C_{\mu} f \mu \frac{k_{j,k}^{n2}}{\varepsilon_j^n} \left( \frac{u_{j+1/2,k+1}^n - u_{j+1/2,k}^n}{\Delta y} + \frac{v_{j+1,k+1/2}^n - v_{j,k+1/2}^n}{\Delta x} \right) \frac{u_{j+1/2,k+1}^n - u_{j+1/2,k}^n}{\Delta y} \\ & C_{\mu} f \mu \frac{k_{j,k}^{n2}}{\varepsilon_j^n} \left( \frac{v_{j+1,k+1/2}^n - v_{j,k+1/2}^n}{\Delta x} + \frac{u_{j+1/2,k+1}^n - u_{j+1/2,k}^n}{\Delta y} \right) \frac{v_{j+1,k+1/2}^n - v_{j,k+1/2}^n}{\Delta x} \\ & \left. C_{\mu} f \mu \frac{k_{j,k}^{n2}}{\varepsilon_j^n} \left( \frac{v_{j,k+1/2}^n - v_{j,k-1/2}^n}{\Delta y} + \frac{v_{j,k+1/2}^n - v_{j,k-1/2}^n}{\Delta y} \right) \frac{v_{j,k+1/2}^n - v_{j,k-1/2}^n}{\Delta y} \right] - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon_{j,k}^{n2}}{k_{j,k}^n} \\ & + \frac{1}{Re} \left( \frac{\varepsilon_{j+1,k}^{n2} - 2\varepsilon_{j,k}^{n2} + \varepsilon_{j-1,k}^{n2}}{\Delta x^2} \right) + \frac{C_{\mu} f \mu}{\sigma_{\varepsilon}} \left( \frac{k_{j+1,k}^{n2}}{\varepsilon_{j+1,k}^n} \frac{\varepsilon_{j+1,k}^n - \varepsilon_{j,k}^n}{\Delta x^2} - \frac{k_{j,k}^{n2}}{\varepsilon_{j,k}^n} \frac{\varepsilon_{j,k}^n - \varepsilon_{j-1,k}^n}{\Delta x^2} \right) \\ & + \frac{1}{Re} \left( \frac{\varepsilon_{j,k+1}^{n2} - 2\varepsilon_{j,k}^{n2} + \varepsilon_{j,k-1}^{n2}}{\Delta y^2} \right) + \frac{C_{\mu} f \mu}{\sigma_{\varepsilon}} \left( \frac{k_{j,k+1}^{n2}}{\varepsilon_{j,k+1}^n} \frac{\varepsilon_{j,k+1}^n - \varepsilon_{j,k}^n}{\Delta y^2} - \frac{k_{j,k}^{n2}}{\varepsilon_{j,k}^n} \frac{\varepsilon_{j,k}^n - \varepsilon_{j,k-1}^n}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

### Численные результаты

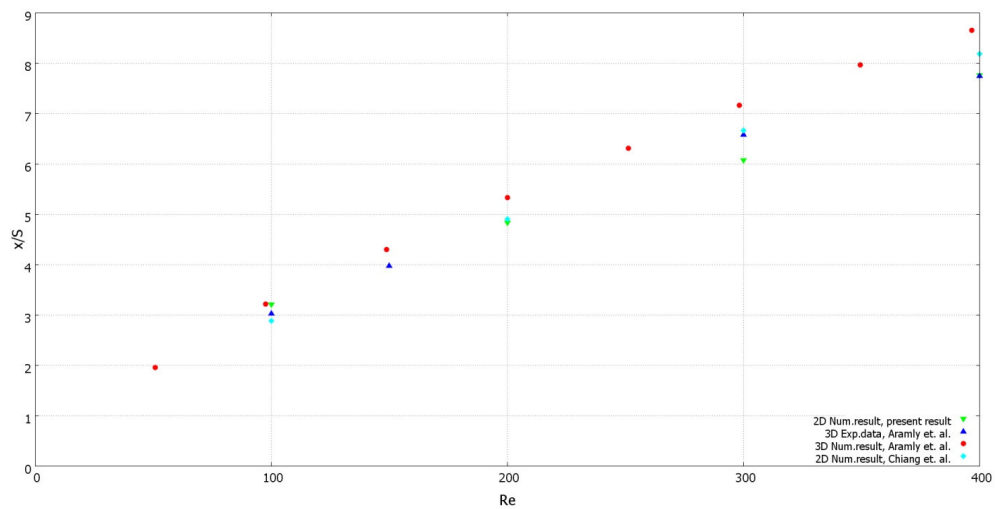
При геометрических параметрах, показанных на Рисунок 1: длина канала  $L=80$ , высота канала  $H=1.9423$ , высота уступа  $S=0.9423$  были получены численные результаты для чисел  $Re=100, 200, 300, 389, 400$  при которых наблюдается ламинарный режим течения [9]. Для чисел Рейнольдса меньше 400 экспериментальные и численные данные не приводят к появлению вторичной зоны присоединения оторвавшегося потока. На Рисунок 3а показаны сравнения продольных профилей скорости данной работы с экспериментальными и численными данными Армали и др. [9] и численными данными Чианг и др. [22] для числа Рейнольдса  $Re=100$  и на Рисунок 3б приведены результаты для числа Рейнольдса  $Re=389$ .



**Рисунок 3**– Сравнение численных результатов продольных профилей скорости данной работы с численными и экспериментальными результатами Армали и др. [9] и численными результатами Чианг и др. [33]: (а)  $Re=100$ ; (б)  $Re=389$ .

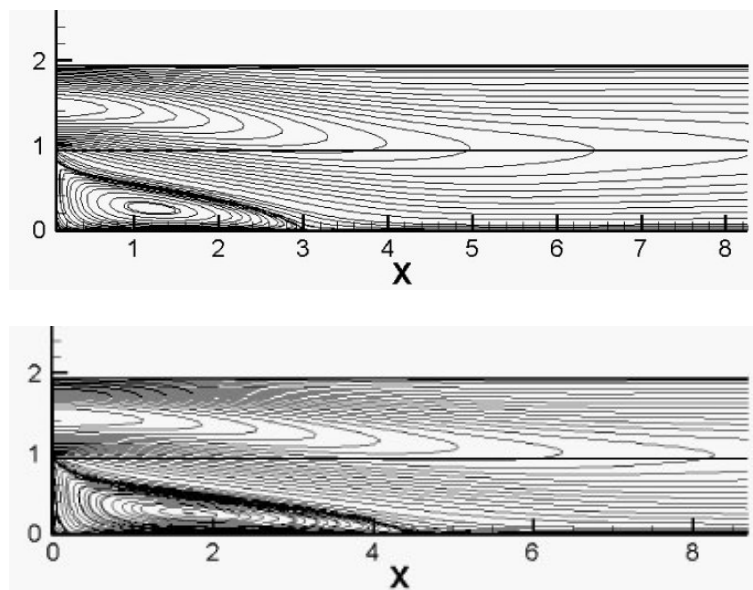
На рисунке 4 показана зависимость числа Рейналодса от размера области присое-





**Рисунок 4**– Зависимость чисел Рейнольдса ( $Re=100, 200, 300, 389, 400$ ) от размера области присоединения потоков.

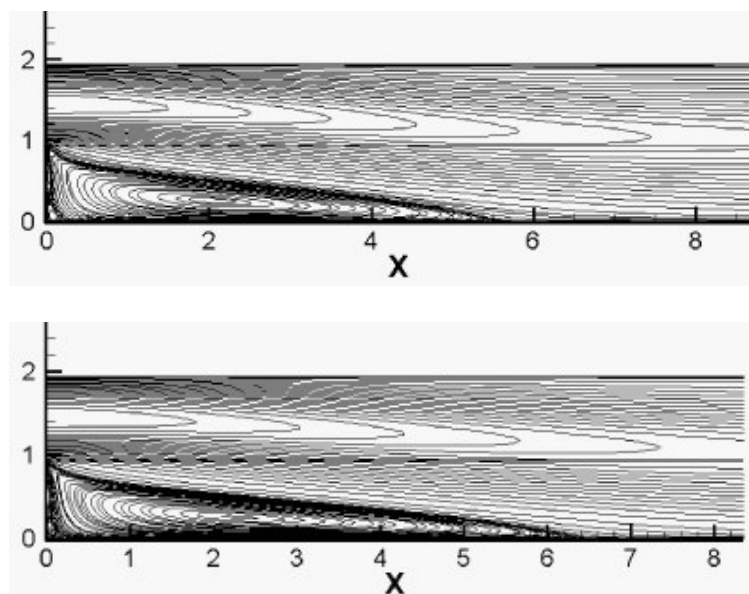
единения потоков. Для более глубокого понимания течения за уступом на рисунках 5,6 можно наблюдать развитие течения за уступом во времени: зарождение и процесс развития области воссоединения потоков для различных чисел Рейнольдса.



**Рисунок 5**– Профиль распределения скорости при  $t=100$ : (а)  $Re=100$ ; (б)  $Re=200$ .

## Заключение

Были выполнены численные исследования ламинарного течения с зоной присоединения потоков за уступом. Это дало более глубокое представление о внутреннем течении за уступом и процессах воссоединения потоков, что в свою очередь дало представление о дальнейшем появлении вторичной и т. д. зон присоединения оторвавшегося потока



**Рисунок 6**– Профиль распределения скорости при  $t=100$ : (а)  $Re=300$ ; (б)  $Re=389$ .

при увеличении числа Рейнольдса. Расстояние от уступа до границы канала взято в 4 раза больше высоты канала, для более детального изучения течений за уступом [9, 22]. Численные данные распределения скорости показали образование первичной зоны воссоединения потоков за уступом для чисел Рейнольдса меньше 400 и увеличение ее размеров в зависимости от времени. График зависимости числа Рейнольдса от размера образовавшейся зоны воссоединения потоков за уступом показывает строгую зависимость размера образовавшейся зоны воссоединения потоков от числа Рейнольдса. Для решения разностного уравнения скоростей в методе "маркеров и ячеек" была применена явная схема, как и для решения разностного уравнения кинетической энергии турбулентности и ее диссипации. Из графиков видно, что реализованный численный метод дает маленькую погрешность в сравнении с результатами из других работ для чисел Рейнольдса меньше 400. Было обнаружено, что постановка граничных условий немаловажный процесс.

### Литература

- [1] Abbott D.E., Kline S.J. Experimental investigations of subsonic turbulent flow over single and double backward-facing steps // J. Basic Engng. – 1962. – V.84. – P. 317.
- [2] Sebanr A. Heat transfer to the turbulent separated flows of air downstream of a step in the surface of a plate // J. Heat Transfer. – 1964. – V.86. – P. 259.
- [3] Goldsteinr J., Eriksenv L., Olsonr M., Eckerte R.G. Laminar separation, reattachment and transition of flow over a downstream-facing step // J. Basic Engng. – 1970. – V.92. – P. 732.
- [4] Durst F., Whitelawj H. Aerodynamic properties of separated gas flows: existing measurements techniques and new optical geometry for the laser-Doppler anemometer // Prog. Heat Mass Transfer. – 1971. – V.4. – P. 311.
- [5] Gosmana D., Punw M. Lecture notes for course entitled: 'Calculation of recirculating flow' // Heat Transfer Rep. – 1974. – V.74. – P. 2.

- [6] Kumara, Yajnikk S. Internal separated flows at large Reynolds number // *J. Fluid Mech.* – 1980. – V.97. – P. 27.
- [7] Denhama K., Patrick A. Laminar flow over a downstream-facing step in a two-dimensional flow channel // *Trans. Inst. Chem. Engrs.* – 1974. – V.52. – P. 361.
- [8] Etheridged W., Kemp P.H. Measurements of turbulent flow downstream of a backward-facing step // *J. Fluid Mech.* – 1978. – V.86. – P. 545.
- [9] Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schoenung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow // *J. Fluid Mech.* – 1983. – V.127. – P. 473–96.
- [10] Guj G., Stella F. Numerical solutions of high Reynolds number recirculating flows in vorticity–velocity form // *Int J Numer Methods Fluids.* – 1988. – V.8. – P. 405–16.
- [11] Keskar J., Lyn D.A. Computations of a laminar backward-facing step flow at  $Re = 800$  with a spectral domain decomposition method // *Int J Numer Methods Fluids.* – 1999. – V.29. – P. 411–27.
- [12] Gartling D.K. A test problem for outflow boundary conditions – flow over a backward-facing step // *Int J Numer Methods Fluids.* – 1990. – V.11. – P. 953–67.
- [13] Papanastasiou T.C., Malamataris N., Ellwood K. A new outflow boundary condition // *Int J Numer Methods Fluids.* – 1992. – V.14. – P. 587–608.
- [14] Erturk E. Numerical solutions of 2-D steady incompressible flow over a backward-facing step, Part I: High Reynolds number solutions // *J. Comp. & Fluids.* – 2008. – V.37. – P. 633–655.
- [15] Gresho P.M., Gartling D.K., Torczynski J.R., Cliffe K.A., Winters K.H., Garratt T.J., et al. Is the steady viscous incompressible two-dimensional flow over a backward-facing step at  $Re = 800$  stable? // *Int J Numer Methods Fluids.* – 1993. – V.17. – P. 501–41.
- [16] Lee T., Mateescu D. Experimental and numerical investigation of 2-D backward-facing step flow // *J. Fluids Struct.* – 1998. – V.12. – P. 703–16.
- [17] Ramsak M., Skerget L.A. Subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function–vorticity formulation // *Int J Numer Methods Fluids.* – 2004. – V.46. – P. 815–47.
- [18] Cruchaga M.A. A study of the backward-facing step problem using a generalized streamline formulation // *Commun Numer Methods Eng.* – 1998. – V.14. – P. 697–708.
- [19] Fortin A., Jardak M., Gervais J.J., Pierre R. Localization of Hopf bifurcations in fluid flow problems // *Int J Numer Methods Fluids.* – 1997. – V.24. – P. 1185–210.
- [20] Barkley D., Gomes M.G.M., Henderson R.D. Three-dimensional instability in flow over a backward-facing step // *J. Fluid Mech.* – 2002. – V.473. – P. 167–90.
- [21] Erturk E., Corke T.C., Gokcol C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // *Int J Numer Methods Fluids.* – 2005. – V.48. – P. 747–74.
- [22] Chiang T.P., Tony W.H., Sheu, Fang C.C. Numerical investigation of vortical evolution in backward-facing step expansion flow // *Appl. Math.* – 1999. – V.23. – P. 915–932.
- [23] Fletcher C.A.J. *Computational techniques for fluid dynamics 2* // Springer-Verlag New York. – 1988. – V.1. – P. 387.

## References

- [1] Abbott D.E., Kline S.J. Experimental investigations of subsonic turbulent flow over single and double backward-facing steps // *J. Basic Engng.* – 1962. – V.84. – P. 317.
- [2] Sebanr A. Heat transfer to the turbulent separated flows of air downstream of a step in the surface of a plate // *J. Heat Transfer.* – 1964. – V.86. – P. 259.
- [3] Goldstein J., Eriksen L., Olson M., Eckert R.G. Laminar separation, reattachment and transition of flow over a downstream-facing step // *J. Basic Engng.* – 1970. – V.92. – P. 732.

- 
- [4] Durst F., Whitelaw J. H. Aerodynamic properties of separated gas flows: existing measurements techniques and new optical geometry for the laser-Doppler anemometer // *Prog. Heat Mass Transfer*. – 1971. – V.4. – P. 311.
- [5] Gosmana D., Punw M. Lecture notes for course entitled: ‘Calculation of recirculating flow’ // *Heat Transfer Rep.* – 1974. – V.74. – P. 2.
- [6] Kumara, Yajnikk S. Internal separated flows at large Reynolds number // *J. Fluid Mech.* – 1980. – V.97. – P. 27.
- [7] Denhama K., Patrick A. Laminar flow over a downstream-facing step in a two-dimensional flow channel // *Trans. Inst. Chem. Engrs.* – 1974. – V.52. – P. 361.
- [8] Etheridged W., Kemp P.H. Measurements of turbulent flow downstream of a backward-facing step // *J. Fluid Mech.* – 1978. – V.86. – P. 545.
- [9] Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schoenung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow // *J. Fluid Mech.* – 1983. – V.127. – P. 473–96.
- [10] Guj G., Stella F. Numerical solutions of high Reynolds number recirculating flows in vorticity–velocity form // *Int J Numer Methods Fluids.* – 1988. – V.8. – P. 405–16.
- [11] Keskar J., Lyn D.A. Computations of a laminar backward-facing step flow at  $Re = 800$  with a spectral domain decomposition method // *Int J Numer Methods Fluids.* – 1999. – V.29. – P. 411–27.
- [12] Gartling D.K. A test problem for outflow boundary conditions – flow over a backward-facing step // *Int J Numer Methods Fluids.* – 1990. – V.11. – P. 953–67.
- [13] Papanastasiou T.C., Malamataris N., Ellwood K. A new outflow boundary condition // *Int J Numer Methods Fluids.* – 1992. – V.14. – P. 587–608.
- [14] Erturk E. Numerical solutions of 2-D steady incompressible flow over a backward-facing step, Part I: High Reynolds number solutions // *J. Comp. & Fluids.* – 2008. – V.37. – P. 633–655.
- [15] Gresho P.M., Gartling D.K., Torczynski J.R., Cliffe K.A., Winters K.H., Garratt T.J., et al. Is the steady viscous incompressible two-dimensional flow over a backward-facing step at  $Re = 800$  stable? // *Int J Numer Methods Fluids.* – 1993. – V.17. – P. 501–41.
- [16] Lee T., Mateescu D. Experimental and numerical investigation of 2-D backward-facing step flow // *J. Fluids Struct.* – 1998. – V.12. – P. 703–16.
- [17] Ramsak M., Skerget L.A. Subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function–vorticity formulation // *Int J Numer Methods Fluids.* – 2004. – V.46. – P. 815–47.
- [18] Cruchaga M.A. A study of the backward-facing step problem using a generalized streamline formulation // *Commun Numer Methods Eng.* – 1998. – V.14. – P. 697–708.
- [19] Fortin A., Jardak M., Gervais J.J., Pierre R. Localization of Hopf bifurcations in fluid flow problems // *Int J Numer Methods Fluids.* – 1997. – V.24. – P. 1185–210.
- [20] Barkley D., Gomes M.G.M., Henderson R.D. Three-dimensional instability in flow over a backward-facing step // *J. Fluid Mech.* – 2002. – V.473. – P. 167–90.
- [21] Erturk E., Corke T.C., Gokcol C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // *Int J Numer Methods Fluids.* – 2005. – V.48. – P. 747–74.
- [22] Chiang T.P., Tony W.H., Sheu, Fang C.C. Numerical investigation of vortical evolution in backward-facing step expansion flow // *Appl. Math.* – 1999. – V.23. – P. 915–932.
- [23] Fletcher C.A.J. *Computational techniques for fluid dynamics 2* // Springer-Verlag New York. – 1988. – V.1. – P. 387.