1-бөлім **Раздел 1** **Section 1**

Математика **Математика** **Mathematics**

МРНТИ 27.29.17, 27.29.19; УДК 517.9 DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v108.i4.01

А.Н. Станжицкий*, Т.В. Шовкопляс
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Киев, Украина
*e-mail: ostanzh@gmail.com

УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И БИФУРКАЦИЯ ЕЕ РЕШЕНИЯ

В предлагаемой статье для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, коэффициенты которого действительны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы на отрезке, изучается вопрос разрешимости линейной неоднородной краевой задачи с возмущениям. Известно, что рассматриваемая в статье краевая задача не всегда разрешима, при условии, что порождающая ее краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, не имеет решений при произвольных неоднородностях. Установлена взаимосвязь между рассматриваемой линейной неоднородной краевой задачей с возмущением для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и алгебраической системой. Коэффициенты алгебраической системы состоят из коэффициентов линейной неоднородной краевой задачи с возмущением для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. На основе взаимосвязи между рассматриваемой краевой задачей и алгебраической системой найдено условие разрешимости линейной неоднородной краевой задачи с возмущением для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Оказалось, что при выполнении этого условия разрешимости существует хотя бы одно решение линейной неоднородной краевой задачи с возмущением для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, имеющее вид частичной суммы сходящегося ряда Лорана.

Ключевые слова: краевая задача с возмущением, порождающая краевая задача, критерий разрешимости, критический случай, бифуркация решения, алгебраическая система.

А.Н. Станжицкий*, Т.В. Шовкопляс
Тарас Шевченко атындағы Киев ұлттық университеті, Киев қ., Украина
*e-mail: ostanzh@gmail.com

Шеттік есептің шешілімділік шарты және оның шешімінің бифуркациясы

Ұсынылып отырған мақалада коэффициенттері кесіндіде нақты, үзіліссіз дифференциалданатын екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін ауытқуы бар сызықтық біртекті емес шеттік есебінің шешімділігі зерттеледі. Мақалада қарастырылған шеттік есеп оны туындайтын екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептің еркін оң жақтарға сәйкес шешімі жоқ болған жағдайларда әрқашан шешіле бермейтіні белгілі. Қарастырылып отырған екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін ауытқуы бар сызықтық біртекті емес шеттік есеп және арнайы алгебралық жүйе арасындағы өзара байланысы анықталды. Алгебралық жүйенің коэффициенттері екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін ауытқуы бар сызықтық біртекті емес шеттік есептің коэффициенттерінен тұрады. Қарастырылып отырған шеттік есеп пен алгебралық жүйенің арасындағы өзара байланысы негізінде екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін ауытқуы бар сызықтық біртекті емес шеттік есептің шешілімділік шарты табылды. Осы шешілімділік шарт орындалғанда екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін ауытқуы бар сызықтық біртекті емес шеттік есептің жинақты Лоран қатарының дербес қосындысы түріндегі ең болмаса бір шешімі бар болатыны шықты.

Түйін сөздер: ауытқуы бар шеттік есеп, туындайтын шеттік есеп, шешілімділік критерийі, кризистік жағдай, шешімнің бифуркациясы, алгебралық жүйе.

O.M. Stanzhytskyi*, T.V. Shovkoplyas
National Taras Shevchenko University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
*e-mail: ostanzh@gmail.com

Condition for solvability of a boundary value problem and bifurcation of its solution

In this paper, we study the solvability of a linear inhomogeneous boundary value problem with perturbations for a system of second-order ordinary differential equations whose coefficients are real, continuous, and continuously differentiable on a segment. It is known that the boundary value problem considered in this paper is not always solvable, provided that the boundary value problem generating it for a system of second-order ordinary differential equations has no solutions for arbitrary inhomogeneities. The relationship between the considered linear inhomogeneous boundary value problem with perturbation for a system of second-order ordinary differential equations and an algebraic system is established. The coefficients of an algebraic system consist of the coefficients of a linear inhomogeneous boundary value problem with perturbation for a system of second-order ordinary differential equations. Based on the relationship between the boundary value problem under consideration and the algebraic system, a condition for the solvability of a linear inhomogeneous boundary value problem with perturbation for a system of second-order ordinary differential equations is found. It turned out that if this solvability condition is met, there is at least one solution of a linear inhomogeneous boundary value problem with perturbation for a system of second-order ordinary differential equations, which has the form of a partial sum of a convergent Laurent series.

Key words: boundary problem with perturbation, generated boundary problem, the criterion of solvability, the critical case, the bifurcation of solution, algebraical system.

1 Введение. Постановка задачи

Вопрос определения условий разрешимости и отыскания решений разных типов краевых задач является актуальным в течение длительного времени. Изучению разных аспектов рассматриваемой проблемы посвящено много научных работ. Нетеровы краевые задачи рассматривались и исследовались в работе [1]. Изучению автономных краевых задач посвящены работы [2–5]. Слабонелинейные краевые задачи рассмотрены в [2]. На протяжении длительного периода времени остается актуальным вопрос определения условий разрешимости и нахождения решений разных типов краевых задач. Изучению разных аспектов рассматриваемого вопроса посвящено большое количество научных работ. Изучение условий разрешимости краевых задач с возмущением для систем линейных дифференциальных уравнений I-го порядка рассмотрено в [6–9]. Краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем интегро-дифференциальных уравнений, к которой применен метод усреднения, рассмотрена в [10]. Вырожденные краевые задачи, условия их разрешимости, бифуркации и разветвления решений рассмотрено в [11]. Условия разрешимости слабовозмущенных краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка определено в [12,13]. В данной работе рассматривается линейная неоднородная краевая задача с возмущением

$$(P(t)x')' - Q(t)x - \varepsilon Q_1(t)x = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$lx(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon l_1 x(\cdot,\varepsilon). \tag{2}$$

Тут $[a,b]$ – отрезок, на котором рассматривается линейная краевая задача с возмущением (1), (2), $x = x(t,\varepsilon)$ – n-измерима дважды непрерывно дифференцированная искомая векторная функция: $x(\cdot,\varepsilon) \in C^2([a,\ b] \times (0,\varepsilon_0])$, $x'(\cdot,\varepsilon)$, $x''(\cdot,\varepsilon) \in C^2([a,b] \times (0,\varepsilon_0])$.

$P(t),\ Q(t),\ Q_1(t)$ – квадратные $(n \times n)$– измеримые действительные матрицы-функции. Элементы матрицы $P(t)$ являются действительными, непрерывно-дифференцируемыми на отрезке $[a,b]$ функциями: $P(t) \in C^1([a,b])$; элементы матриц $Q(t)$ и $Q_1(t)$ являются непрерывными на отрезке $[a,b]$: $Q(t),\quad Q_1(t) \in C([a,b])$. Матрица $P(t)$ является невырожденной: $\det P(t) \neq 0$.

Элементы матрицы $P(t)$ являются действительными, непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[a,b]$ функциями: $P(t) \in C^1([a,b])$; элементы матриц $Q(t)$ и $Q_1(t)$ являются непрерывными на отрезке $[a,b]$ функциями: $Q(t),\quad Q_1(t) \in C([a,b])$. $f(t)$ – n-измеримая непрерывная на отрезке $[a,b]$ вектор-функция: $f(t) \in C([a,b])$. $l,\ l_1$ – линейные ограниченные m-измеримые векторные функционалы, определенные на пространстве n-измеримых кусочно-непрерывных векторных функций: $l,\ l_1$:$C([a,b]) \to R^m$. α – m-измеримый действительный вектор: $\alpha \in R^m$; ε – малый неотрицательный параметр.

У краевой задачи с возмущением (1), (2) есть порождающая краевая задача:

$$(P(t)x')' - Q(t)x = f(t), \quad t \in [a,\ b], \tag{3}$$

$$lx(\cdot,\varepsilon) = \alpha. \tag{4}$$

Система дифференциальных уравнений второго порядка (3) имеет общее решение вида: $x(t) = X(t)c + \bar{x}(t),\ \ c \in R^{2n}$, где $X(t)$ – $(n \times 2n)$-измеримая фундаментальная матрица однородной системы второго порядка (3), которая состоит из $2n$-линейно независимых решений однородной $(f(t) = 0)$ системы (3); вектор-функция $\bar{x}(t) = \displaystyle\int_a^b K(t,s)P^{-1}(s)f(s)ds$ является частным решением системы дифференциальных уравнений (3); $K(t,\ s)$-$(n \times n)$-измеримая матрица Коши [13, 14].

В результате действия линейного m-измеримого функционала l на фундаментальную матрицу $X(t)$ образуется $(m \times 2n)$-измеримая прямоугольная матрица D, $\operatorname{rank} \mathrm{D} = n_1,\ n_1 < \min(2n, m)$.

Матрица D^* есть транспонированной к матрице D. $(2n \times m)-$ измеримая матрица D^+ есть псевдообратной по Муру-Пенроузу к матрице D [7, 15].

Через P_D и P_{D^*} обозначим $(2n \times 2n)$- и $(m \times m)$-измеримые матрицы-ортопроекторы, проектирующие пространства $R^{2\,n}$ и R^m на ноль-пространства $N(D)$ и $N(D^*)$ соответственно: $P_D : R^{2n} \to N(D),\ N(D) = P_D R^{2n}$; $P_D : R^{2n} \to N(D),\ N(D^*) = P_{D^*} R^m$.

Размерность матрицы $N(D)$ равна r: $\dim N(D) = 2n - \operatorname{rank} D = 2n - n_1 = r$, а размерность матрицы $N(D^*)$ равна d: $\dim N(D^*) = m - \operatorname{rank} D = m - n_1 = d$. Откуда следует, что $\operatorname{rank} P_D = r$, а $\operatorname{rank} P_{D^*} = d$.

Это значит, что матрица P_D состоит из r линейно независимых столбцов, а матрица P_{D^*} состоит из d линейно независимых строк. Следовательно, $(2n \times 2n)$-измеримую матрицу P_D можна заменить $(2n \times r)-$измеримой матрицей P_{D_r}, которая состоит из r линейно независимых столбцов матрицы P_D; $(m \times m)$-измеримую матрицу P_{D^*} можна заменить $(d \times m)-$измермой матрицей $P_{D_d^*}$, которая состоит из полной системы d линейно независимых строк матрицы P_{D^*} [7].

Для порождающей краевой задачи (3), (4) справедливо утверждение [14].

Теорема 1 (Критический случай) *Пусть выполняется условие* $\operatorname{rank} D = n_1 < \min\{2n,\ m\}$. *Тогда однородная* $(f(t) = 0,\ \alpha = 0)$ *краевая задача* (3), (4) *имеет* r, $(r = 2n - n_1)$

и только r линейно независимых решений. Неоднородная краевая задача (3), (4) разрешима тогда и только тогда, когда вектор-функция $f(t) \in C([a,b])$ и постоянный вектор $\alpha \in R^m$ удовлетворяют условие разрешимости

$$P_{D_d^*}[\alpha - l\bar{x}(\cdot)] = 0, \quad (d = m - n_1). \tag{5}$$

При выполнении этих условий краевая задача (3), (4) имеет r-параметрическое семейство линейно независимых решений $x(t, c_r) = X_r(t)c_r + (G[f])(t) + X(t)D^+\alpha$, $t \in [a,b]$, $\forall\ c_r \in R^r$, где $X_r(t)$ – $(n \times r)$-измеримая матрица, столбики которой образуют полную систему r линейно независимых решений однородной системы второго порядка (3): $X_r(t) = X(t)P_{D_r}$; P_{D_r} – $(2n \times r)$-измеримая матрица-ортопроектор, состоящая из r линейно независимых столбиков матрицы P_D; c_r – произвольный вектор-столбец из пространства R^r; $(G[f])(t)$, $t \in [a,\ b]$, – обобщенный оператор Грина, который действует на произвольную вектор-функцию $f(t) \in C([a,\ b])$:

$$(G[f])(t) \stackrel{def}{=} \int_a^b K(t,s)P^{-1}(s)f(s)ds - X(t)D^+l\int_a^b K(\,\cdot\,,s)P^{-1}(s)f(s)ds.$$

Необходимо определить, существуют ли условия, при выполнении которых, краевая задача с возмущением (1), (2) будет разрешима в случае, что ее порождающая краевая задача (3), (4) не имеет решений.

2 Условия бифуркации решений краевой задачи

Рассматривается случай, когда порождающая краевая задача (3), (4) не имеет решений при произвольных неоднородностях $f(t) \in C([a,b])$ и $\alpha \in R^m$, то есть, выполняется критический случай ($\operatorname{rank} D = n_1 < n$) и в силу произвольного выбора неоднородностей $f(t) \in C([a,b])$ и $\alpha \in R^m$ критерий разрешимости (5) для порождающей краевой задачи (3), (4) не выполняется.

В публикации [13] рассмотрена линейная неоднородная краевая задача с возмущением (1), (2) в случае, когда ее порождающая краевая задача ($\varepsilon = 0$) (3), (4) не имеет решений. Тогда для рассматриваемой краевой задачи с помощью $(d \times r)$-измеримой матрицы

$$B_0 := P_{D_d^*}\{l_1X_r(\,\cdot\,) - l\int_a^b K(\,\cdot\,,s)P^{-1}(s)Q_1(s)X_r(s)ds\}, \tag{6}$$

построенной с помощью коэффициентов задачи (1), (2), были определены условие разрешимости и условие единственности решения, которое имеет вид сходящегося ряда Лорана при $k = -1$.

P_{B_0} – $(r \times r)$–измеримая матрица-ортопроектор, P_{B_0}:$R^r \to N(B_0)$; B_0^* – $(r \times d)$-измеримая матрица, сопряженная к матрице B_0, $P_{B_0^*}$ – $(d \times d)$-измеримая матрица-ортопроектор, $P_{B_0^*}$:$R^d \to N(B_0^*)$; $(r \times d)$ – измеримая матрица B_0^+ является псевдообратной по Муру-Пенроузу к матрице B_0 [13].

В работе [16] рассматривались условия бифуркации решения импульсной краевой задачи в случае, когда условие $P_{B_0^*} = 0$ не выполнялось. Поэтому была построена $(d \times r)$-измеримая матрица B_1:

$$B_1 := P_{D_d^*}\{l_1G_1(\,\cdot\,) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)G_1(s)ds\}, \tag{7}$$

где $(n \times r)$-измеримая матрица $G_1(t)$ имеет вид:

$$G_1(t) = (G[Q_1(s)X_r(s)])(t) + X(t)D^+ l_1 X_r(\cdot). \tag{8}$$

B_1^* – $(r \times d)$-измеримая матрица, транспонированная к матрице B_1; P_{B_1} – $(r \times r)$-измеримая матрица-ортопроектор, проектирующая r-измеримое эвклидово пространство R^r на ноль-пространство $N(B_1)$ матрицы B_1; $P_{B_1^*}$–$(d \times d)$-измеримая матрица-ортопроектор, проектирующая d-измеримое эвклидово пространство R^d на ноль-пространство $N(B_1^*)$ матрицы B_1^*.

В работе [16] с помощью матриц B_0 и B_1 были найдены условия бифуркации решения рассматриваемой импульсной краевой задачи. Доказано, что в случае, когда условие $P_{B_1^*}P_{B_0^*} = 0$ выполняется, рассматриваемая импульсная краевая задача разрешима и имеет решение в виде сходящегося ряда Лорана при $k = -2$.

В данной работе рассматривается случай, когда условия $P_{B_0^*} = 0$, $P_{B_1^*}P_{B_0^*} = 0$ не выполняются.

Поэтому построена $(d \times r)$-измеримая матрица $\overline{B_1} := -P_{B_0^*}B_1P_{B_0}$, при выполнении определенных условий на которую, задача (3), (4) будет разрешимой. В этом случае решение краевой задачи (3), (4) ищется с помощью метода Вишика-Люстерника [17] в виде части сходящегося ряда Лорана при $k = -3$.

Имеет место теорема.

Теорема 2 *Пусть порождающая краевая задача (3), (4) при произвольных неоднородностях $f(t) \in C([a, b])$ и $\alpha \in R^m$ не имеет решений и для краевой задачи с возмущением (1), (2) выполнены условия $P_{B_0^*} \neq 0$, $P_{B_1^*}P_{B_0^*} \neq 0$.*

Тогда краевая задача с возмущением (1), (2) разрешима, если выполняется условие

$$P_{\overline{B}_1^*}P_{B_0^*} = 0 \tag{9}$$

и ее решение при достаточно малой фиксированной величине $\varepsilon \in (0\ , \varepsilon_0]$ имеет вид части сходящегося ряда Лорана:

$$x(\cdot, \varepsilon) = \sum_{k=-3}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t) \tag{10}$$

коэффициенты x_k, $k \geq -3$, ряда (10) ищутся из соответствующих краевых задач, образованных после подстановки в задачу (1), (2) ряда (10) и приравнивания соответствующих коэффициентов при каждом из степеней ε.

Доказательство. Подставим ряд (10) в задачу (1), (2), и тогда при каждой степени ε получим соответстующую однородную краевую задачу.

При ε^{-3} имеем однородную краевую задачу:

$$(P(t)x'_{-3})' - Q(t)x_{-3} = 0, \quad t \in [a, b], \tag{11}$$

$$l\, x_{-3}(\cdot, \varepsilon) = 0.$$

По теореме 1 краевая задача (11) всегда разрешима и имеет r-параметрическое множество решений:

$$x_{-3}(t) = X_r(t)c_{-2}, \qquad c_{-2} \in R^r, \tag{12}$$

c_{-2} – произвольный r-измеримый вектор, который будет найден из условия разрешимости краевой задачи при ε^{-2}.

При ε^{-2} получаем неоднородную краевую задачу:

$$(P(t)x'_{-2})' - Q(t)x_{-2} = Q_1(t)x_{-3}, \quad t \in [a,b], \tag{13}$$

$$l\, x_{-2}(\cdot,\varepsilon) = l_1 x_{-3}(\cdot,\varepsilon).$$

Согласно теоремы 1 условие разрешимости неоднородной краевой задачи (13) имеет вид:

$$P_{D_d^*}\left\{l_1 x_{-3}(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)x_{-3}(s)ds\right\} = 0, \quad d = m - n_1. \tag{14}$$

Подставив в (14) значение вектора $x_{-3}(t,c_{-2})$, выраженное равенством (12), получим:

$$P_{D_d^*}\left\{l_1 X_r(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)X_r(s)ds\right\} c_{-2} = 0. \tag{15}$$

Учитывая обозначения (6), из (15) получим алгебраическую систему:

$$B_0 c_{-2} = 0. \tag{16}$$

Алгебраическая система (16) всегда разрешима, ее решением является r-измеримый вектор:

$$c_{-2} = P_{B_0} c_{-2r},\ c_{-2r} \in R^r. \tag{17}$$

Подставив (17) в (12), получим r-параметрическое множество решений краевой задачи (11):

$$x_{-3}(t) = X_r(t)P_{B_0}c_{-2r}, \quad c_{-2r} \in R^r. \tag{18}$$

По теореме 1 краевая задача (13) имеет r-параметрическое множество решений:

$$x_{-2}(t,\ c_{-1}) = X(t)c_{-1} + (G[Q_1(s)x_{-3}(s)])(t) + X(t)D^+ l_1 x_{-3}(\cdot,\varepsilon),\ \ c_{-1} \in R^r. \tag{19}$$

Подставим (18) в (19), тогда r-параметрическое множество решений краевой задачи (13) имеет вид:

$$x_{-2}(t,\ c_{-1}) = X(t)c_{-1} + G_1(t)P_{B_0}c_{-2r}, \quad c_{-1} \in R^r, \tag{20}$$

где матрица $G_1(t)$ имеет вид (8).

Неизвестный вектор c_{-1} будет найден на следующем шаге из условия разрешимости краевой задачи, образованной при ε^{-1}. При ε^{-1} имеем краевую задачу:

$$(P(t)x'_{-1})' - Q(t)x_{-1} = Q_1(t)x_{-2}, \quad t \in [a,b], \tag{21}$$

$$l\, x_{-1}(\cdot,\varepsilon) = l_1 x_{-2}(\cdot,\varepsilon).$$

Согласно теоремы 1 условие разрешимости краевой задачи (21) есть таким:

$$P_{D_d^*}\left\{l_1 x_{-2}(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)x_{-2}(s)ds\right\} = 0,\ \ d = m - n_1. \tag{22}$$

Подставим (20) в (22), откуда, учитывая обозначения (6) и (7), получим алгебраическую систему относительно неизвестного вектора $c_{-1} \in R^r$:

$$B_0 c_{-1} = -B_1 P_{B_0} c_{-2r}. \tag{23}$$

Условие разрешимости алгебраической системы (23) является таким:

$$P_{B_0^*}[-B_1 P_{B_0} c_{-2r}] = 0. \tag{24}$$

Обозначим за $(d \times r)$-измеримую матрицу $\overline{B}_1$ матрицу вида:

$$\overline{B}_1 := -P_{B_0^*} B_1 P_{B_0}. \tag{25}$$

Учитывая обозначения (25), равенство (24) перепишем в таком виде:

$$\overline{B}_1 c_{-2r} = 0. \tag{26}$$

Запишем r-параметрическое множество решений алгебраической системы (23):

$$c_{-1} = B_0^+[-B_1 P_{B_0} c_{-2r}] + P_{B_0} c_{-1r}, \quad c_{-1r} \in R^r. \tag{27}$$

Подставим (27) в (20), в результате получим r-параметрическое множество решений краевой задачи (13):

$$x_{-2}(t,\ c_{-1}) = X_r(t) P_{B_0} c_{-1r} + [X_r(t) B_0^+[-B_1] + G_1(t)] P_{B_0} c_{-2r}, \quad c_{-1r} \in R^r. \tag{28}$$

Согласно теоремы 1 r-параметричекое множество краевой задачи (21) является таковым:

$$x_{-1}(t,\ c_0) = X_r(t) c_0 + (G[Q_1(s) x_{-2}(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 x_{-2}(\cdot, \varepsilon), \quad c_0 \in R^r. \tag{29}$$

Обозначим через $(n \times r)$-измеримую матрицу $G_2(t)$ матрицу вида:

$$G_2(t) = (G[Q_1(s) G_1(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 G_1(\cdot), \tag{30}$$

тогда, применяя к (29) обозначения (8) и (30), получим:

$$x_{-1}(t,\ c_0) = X_r(t) c_0 + G_1(t) P_{B_0} c_{-1r} + [G_1(t) B_0^+[-B_1] + G_2(t)] P_{B_0} c_{-2r}. \tag{31}$$

(31) – r-параметрическое множество решений краевой задачи (21). Неизвестный вектор $c_0 \in R^r$ будет найден на следующем шаге. При ε^0 имеем неоднородную краевую задачу:

$$(P(t) x_0')' - Q(t) x_0 = Q_1(t) x_{-1} + f(t), \qquad t \in [a, b], \tag{32}$$

$$l\, x_0(\cdot, \varepsilon) = l_1 x_{-1}(\cdot, \varepsilon) + \alpha.$$

Согласно теоремы 1 условие разрешимости краевой задачи (32) таково:

$$P_{D_d^*}\left\{ l_1 x_{-1}(\cdot) + \alpha - l \int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) [Q_1(s) x_{-1}(s) + f(s)] ds \right\} = 0, \quad d = m - n_1. \tag{33}$$

В (33) подставим (31) и, выполнив соответствующие преобразования, получим алгебраическую систему относительно неизвестного вектора $c_0 \in R^r$:

$$B_0 c_0 = \varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{-1r} - [B_1 B_0^+[-B_1] + B_2] P_{B_0} c_{-2r}. \tag{34}$$

В (34) B_0 и B_1 – матрицы вида (6), (7) соответственно, $(d \times r)$-измеримая матрица B_2 и d-измеримая вектор-функция φ_0 определены таким образом:

$$B_2 := P_{D_d^*}\{l_1 G_2(\,\cdot\,) - l\int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) Q_1(s) G_2(s) ds\}, \;\; d = m - n_1, \tag{35}$$

$$\varphi_0 = P_{D_d^*}[\alpha - l\int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) Q_1(s) f(s) ds]. \tag{36}$$

Условие разрешимости алгебраической системы (34) таково:

$$P_{B_0^*}[\varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{-1r} - [B_1 B_0^+[-B_1] + B_2] P_{B_0} c_{-2r}] = 0. \tag{37}$$

Положим

$$B_{21} := B_1 B_0^+[-B_1] + B_2, \tag{38}$$

B_{21} – $(d \times r)$-измеримая матрица. Откуда,

$$-P_{B_0^*} B_1 P_{B_0} c_{-1r} = P_{B_0^*}[B_{21} P_{B_0} c_{-2r} - \varphi_0]. \tag{39}$$

В (39) произведение матриц $-P_{B_0^*} B_1 P_{B_0}$, согласно обозначения (25) является $(d \times r)$-измеримой матрицей $\overline{B_1}$, следовательно, условие (39) равносильно условию:

$$\overline{B_1} c_{-1r} = P_{B_0^*}[B_{21} P_{B_0} c_{-2r} - \varphi_0]. \tag{40}$$

Условие разрешимости алгебраической системы (40) таково:

$$P_{\overline{B_1^*}} P_{B_0^*}[B_{21} P_{B_0} c_{-2r} - \varphi_0] = 0, \tag{41}$$

условие (41) выполняется, если $P_{\overline{B_1^*}} P_{B_0^*} = 0$.

Условие разрешимости алгебраической системы (40) является условием разрешимости алгебраической системы (34). Следовательно, алгебраическая система (34) является разрешимой и имеет r-параметрическое множество решений:

$$c_0 = P_{B_0} c_{0r} + B_0^+[\varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{-1r} - B_{21} P_{B_0} c_{-2r}], \;\; c_{0r} \in R^r. \tag{42}$$

Значение вектора c_0 вида (42) подставим в (31), после чего r-параметрическое множество решений краевой задачи (21) является таковым:

$$\begin{aligned} x_{-1}(t, c_0) = X_r(t) P_{B_0} c_{0r} + \{X_r(t) B_0^+[-B_1] + G_1(t)\} P_{B_0} c_{-1r} + \{X_r(t) B_0^+[-B_{21}] + \\ + G_1(t) B_0^+[-B_1] + G_2(t)\} P_{B_0} c_{-2r} + X_r(t) B_0^+ \varphi_0, \;\; c_{0r} \in R^r. \end{aligned} \tag{43}$$

Согласно теоремы 1 краевая задача (32) имеет r-параметрическое множество решений:

$$x_0(t,\ c_1) = X(t)c_1 + (G[Q_1(s)x_{-1}(s) + f(s)])(t) + X(t)D^+(l_1 x_{-1}(\cdot) + \alpha),\ \ c_1 \in R^r. \tag{44}$$

Подставим $x_{-1}(t,\ c_0)$ в (44). Обозначим через $G_3(t)$ – $(n \times r)$-измеримую матрицу, а через $G_0^{(0)}(t)$ – n-измеримую векторную функцию:

$$G_3(t) := (G[Q_1(s)G_2(s)])(t) + X(t)D^+ l_1 G_2(\cdot), \tag{45}$$

$$G_0^{(0)}(t) := (G[f(s)])(t) + X(t)D^+\alpha. \tag{46}$$

Тогда r-параметрическое множество решений краевой задачи (32) является таковым:

$$\begin{aligned} x_0(t,\ c_1) = X(t)c_1 + G_1(t)P_{B_0}c_{0r} + \{G_1(t)B_0^+[-B_1] + G_2(t)\}P_{B_0}c_{-1r} + \\ + \{G_1(t)B_0^+[-B_{21}] + G_2(t)B_0^+[-B_1] + G_3(t)\}P_{B_0}c_{-2r} + G_1(t)B_0^+\varphi_0 + G_0^{(0)}(t),\ c_1 \in R^r. \end{aligned} \tag{47}$$

Вектор c_1 будет найден на следующем шаге. При ε^1 имеем неоднородную краевую задачу:

$$(P(t)x_1')' - Q(t)x_1 = Q_1(t)x_0, \quad t \in [a,b], \tag{48}$$

$$l\,x_1(\cdot,\varepsilon) = l_1 x_0(\cdot,\varepsilon).$$

Согласно теоремы 1, условие разрешимости краевой задачи есть таковым:

$$P_{D_d^*}\left\{l_1 x_0(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)x_0(s)ds\right\} = 0,\ \ d = m - n_1. \tag{49}$$

В (49) подставим (47). Используя обозначения (6), (7), (35), (38) получим алгебраическую систему относительно неизвестного вектора $c_1 \in R^r$:

$$B_0 c_1 = \varphi_1 - B_1 B_0^+\varphi_0 - B_1 P_{B_0}c_{0r} - B_{21}P_{B_0}c_{-1r} - B_{31}P_{B_0}c_{-2r}, \tag{50}$$

в (50) φ_1 является d-измеримой вектор-функцией, имеющей вид:

$$\varphi_1 = P_{D_d^*}[l_1 G_0^{(0)}(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)G_0^{(0)}(s)ds]. \tag{51}$$

В (50) $(d \times r)$-измеримая матрица B_{31} определена таким образом:

$$B_{31} := B_1 B_0^+[-B_{21}] + B_2 B_0^+[-B_1] + B_3. \tag{52}$$

Условие разрешимости алгебраической системы (50) есть таковым:

$$P_{B_0^*}[\varphi_1 - B_1 B_0^+\varphi_0 - B_1 P_{B_0}c_{0r} - B_{21}P_{B_0}c_{-1r} - B_{31}P_{B_0}c_{-2r}] = 0. \tag{53}$$

Откуда, используя обозначения (25), получаем:

$$\overline{B}_1 c_{0r} = P_{B_0^*}[B_{21}P_{B_0}c_{-1r} + B_{31}P_{B_0}c_{-2r} + B_1 B_0^+\varphi_0 - \varphi_1]. \tag{54}$$

(54) – алгебраическая система относительно вектора $c_{0r} \in R^r$.

Условие разрешимости алгебраической системы (54) следующее:

$$P_{\overline{B}_1^*} P_{B_0^*} [B_{21} P_{B_0} c_{-1r} + B_{31} P_{B_0} c_{-2r} + B_1 B_0^+ \varphi_0 - \varphi_1] = 0. \tag{55}$$

Условие разрешимости (55) алгебраической системы (54) выполняется, если имеет место равенство: $P_{\overline{B}_1^*} P_{B_0^*} = 0$.

Из условия разрешимости (55) алгебраической системы (54) следует разрешимость алгебраической системы (50) относительно неизвестного вектора $c_1 \in R^r$.

r-параметрическое множество решений алгебраической системы (50) таково:

$$c_1 = P_{B_0} c_{1r} + B_0^+ \{\varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{0r} - B_{21} P_{B_0} c_{-1r} - B_{31} P_{B_0} c_{-2r}\},\ c_{1r} \in R^r. \tag{56}$$

Подставим (56) в (47), в результате чего получим r-параметрическое множество решений краевой задачи (32):

$$\begin{aligned} x_0(t,\ c_1) &= X_r(t) P_{B_0} c_{1r} + [X_r(t) B_0^+ [-B_1] + G_1(t)] P_{B_0} c_{0r} + \\ &+ \{X_r(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_1(t) B_0^+ [-B_1] + G_2(t)\} P_{B_0} c_{-1r} + \\ &+ \{X_r(t) B_0^+ [-B_{31}] + G_1(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_2(t) B_0^+ [-B_1] + G_3(t)\} P_{B_0} c_{-2r} + \\ &+ X_r(t) B_0^+ [\varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0] + G_1(t) B_0^+ \varphi_0 + G_0^{(0)}(t),\ c_{1r} \in R^r. \end{aligned} \tag{57}$$

Согласно теоремы 1 краевая задача (48) имеет r-параметрическое множество решений:

$$x_1(t,\ c_2) = X(t) c_2 + (G[Q_1(s) x_0(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 x_0(\cdot), \qquad c_2 \in R^r. \tag{58}$$

(57) подставим в (58). Учитывая ранее введенные обозначения функций (8), (30), (45) и, обозначив за $G_4(t)$–$(n \times r)$-измеримую матрицу-функцию, за $G_0^{(1)}(t)$ – n-измеримую вектор-функцию вида:

$$G_4(t) := (G[Q_1(s) G_3(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 G_3(\cdot), \tag{59}$$

$$G_0^{(1)}(t) := (G[Q_1(s) G_0^{(0)}(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 G_0^{(0)}(\cdot), \tag{60}$$

из (58) получим r-параметрическое множество решений краевой задачи (48):

$$\begin{aligned} x_1(t,\ c_2) &= X_r(t) c_2 + G_1(t) P_{B_0} c_{1r} + \{G_1(t) B_0^+ [-B_1] + G_2(t)\} P_{B_0} c_{0r} + \\ &+ \{G_1(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_2(t) B_0^+ [-B_1] + G_3(t)\} P_{B_0} c_{-1r} + \\ &+ \{G_1(t) B_0^+ [-B_{31}] + G_2(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_3(t) B_0^+ [-B_1] + G_4(t)\} P_{B_0} c_{-2r} + \\ &+ G_1(t) B_0^+ \{\varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0\} + G_2(t) B_0^+ \varphi_0 + G_0^{(1)}(t), \quad c_2 \in R^r. \end{aligned} \tag{61}$$

Неизвестный вектор $c_2 \in R^r$ будет найден на следующем шаге из условия разрешимости краевой задачи, образованной при ε^2.

При ε^2 имеем неоднородную краевую задачу:

$$(P(t) x_2')' - Q(t) x_2 = Q_1(t) x_1, \quad t \in [a, b], \tag{62}$$

$l\,x_2(\cdot,\varepsilon) = l_1 x_1(\cdot,\varepsilon).$

Согласно теоремы 1 условие разрешимости краевой задачи (62) есть таковым:

$$P_{D_d^*}\left\{l_1 x_1(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)x_1(s)ds\right\} = 0. \tag{63}$$

Подставим (61) в (63). Учитывая обозначения (6), (7), (35), (38), (52), и, положив:

$$\varphi_2 := -P_{D_d^*}[l_1 G_0^{(1)}(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)G_0^{(1)}(s)ds], \tag{64}$$

$$B_{41} := B_1 B_0^+[-B_{31}] + B_2 B_0^+[-B_{21}] + B_3 B_0^+[-B_1] + B_4, \tag{65}$$

в (64) и (65) φ_2 – d-измеримая вектор-функция, B_{41} – $(d\times r)$-измеримая матрица, соответственно; тогда из (63) получим алгебраическую систему относительно неизвестного вектора $c_2 \in R^r$:

$$B_0 c_2 = -B_1 P_{B_0} c_{1r} - B_{21} P_{B_0} c_{0r} - B_{31} P_{B_0} c_{-1r} - B_{41} P_{B_0} c_{-2r} - \\ - B_1 B_0^+\{\varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0\} - B_2 B_0^+ \varphi_0 + \varphi_2. \tag{66}$$

Условие разрешимости алгебраической системы (66) является таковым:

$$P_{B_0^*}\{\varphi_2 - B_1 P_{B_0} c_{1r} - B_{21} P_{B_0} c_{0r} - B_{31} P_{B_0} c_{-1r} - B_{41} P_{B_0} c_{-2r} - \\ - B_1 B_0^+\{\varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0\} - B_2 B_0^+ \varphi_0\} = 0. \tag{67}$$

Откуда, учитывая, что $\overline{B}_1 := -P_{B_0^*} B_1 P_{B_0}$, равенство (67) имеет вид:

$$\overline{B}_1 c_{1r} = P_{B_0^*}\{B_{21} P_{B_0} c_{0r} + B_{31} P_{B_0} c_{-1r} + B_{41} P_{B_0} c_{-2r} - \\ - \varphi_2 + B_1 B_0^+\{\varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0\} + B_2 B_0^+ \varphi_0\}. \tag{68}$$

(68) – алгебраическая система относительно вектора $c_{1r} \in R^r$, ее условие разрешимости есть таковым:

$$P_{\overline{B}_1^*} P_{B_0^*}\{B_{21} P_{B_0} c_{0r} + B_{31} P_{B_0} c_{-1r} + B_{41} P_{B_0} c_{-2r} - \\ - \varphi_2 + B_1 B_0^+\{\varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0\} + B_2 B_0^+ \varphi_0\} = 0. \tag{69}$$

Условие (69) выполняется, если имеет место равенство:$P_{\overline{B}_1^*} P_{B_0^*} = 0$.

Запишем решение алгебраической системы (66):

$$c_2 = P_{B_0} c_{2r} + B_0^+\{\varphi_2 - B_1 P_{B_0} c_{1r} - B_{21} P_{B_0} c_{0r} - B_{31} P_{B_0} c_{-1r} - B_{41} P_{B_0} c_{-2r} - \\ - B_1 B_0^+\{\varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0\} - B_2 B_0^+ \varphi_0\}, \quad c_{2r} \in R^r, \tag{70}$$

(70) – решение алгебраической системы (66). Зная вектор c_2, можно записать r-параметрическое множество решений краевой задачи

$$x_1(t,\ c_2) = X_r(t)P_{B_0}c_{2r} + \{X_r(t)B_0^+[-B_1] + G_1(t)\}P_{B_0}c_{1r} + \{X_r(t)B_0^+[-B_{21}]+ \\ + G_1(t)B_0^+[-B_1] + G_2(t)\}P_{B_0}c_{0r}+ \\ + \{X_r(t)B_0^+[-B_{31}] + G_1(t)B_0^+[-B_{21}] + G_2(t)B_0^+[-B_1] + G_3(t)\}P_{B_0}c_{-1r}+ \\ + \{X_r(t)B_0^+[-B_{41}] + G_1(t)B_0^+[-B_{31}] + G_2(t)B_0^+[-B_{21}] + G_3(t)B_0^+[-B_1] + G_4(t)\}P_{B_0}c_{-2r}+ \\ + X_r(t)B_0^+\{\varphi_2 - B_1B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_2B_0^+\varphi_0\}+ \\ + G_1(t)B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} + G_2(t)B_0^+\varphi_0 + G_0^{(1)}(t). \quad (71)$$

Запишем r-параметрическое множество решений краевой задачи (62):

$$x_2(t,\ c_3) = X_r(t)c_3 + (G[Q_1(s)x_1(s)])(t) + X(t)D^+l_1X_1(\cdot), \quad c_3 \in R^r. \quad (72)$$

Подставим $x_1(t,\ c_2)$ в (72), используя ранее введенные обозначения (8), (30), (45), (59), и, обозначив через $(n\times r)$-измеримую матрицу-функцию $G_5(t)$ и через n-измеримую векторную функцию $G_0^{(2)}(t)$ следующие функции:

$$G_5(t) = (G[Q_1(s)G_4(s)])(t) + X(t)D^+l_1G_4(\cdot), \quad (73)$$

$$G_0^{(2)}(t) = (G[Q_1(s)G_0^{(1)}(s)])(t) + X(t)D^+l_1G_0^{(1)}(\cdot), \quad (74)$$

в результате подстановки r-параметрическое множество (72) решений краевой задачи (62) будет иметь вид:

$$x_2(t,\ c_3) = X_r(t)c_3 + G_1(t)P_{B_0}c_{2r} + \{G_1(t)B_0^+[-B_1] + G_2(t)\}P_{B_0}c_{1r}+ \\ + \{G_1(t)B_0^+[-B_{21}] + G_2(t)B_0^+[-B_1] + G_3(t)\}P_{B_0}c_{0r}+ \\ + \{G_1(t)B_0^+[-B_{31}] + G_2(t)B_0^+[-B_{21}] + G_3(t)B_0^+[-B_1] + G_4(t)\}P_{B_0}c_{-1r}+ \\ + \{G_1(t)B_0^+[-B_{41}] + G_2(t)B_0^+[-B_{31}] + G_3(t)B_0^+[-B_{21}] + G_4(t)B_0^+[-B_1] + G_5(t)\}P_{B_0}c_{-2r}+ \\ + G_1(t)B_0^+\{\varphi_2 - B_1B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_2B_0^+\varphi_0\}+ \\ + G_2(t)B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} + G_3(t)B_0^+\varphi_0 + G_0^{(2)}(t). \quad (75)$$

Вектор $c_3 \in R^r$ будет найден на следующем шаге.

Продолжая этот процесс, при ε^k, $k \geq 1$ получим неоднородную краевую задачу:

$$(P(t)x_k')' - Q(t)x_k = Q_1(t)x_{k-1}, \quad t \in [a,b], \quad (76)$$

$$l\,x_k(\cdot,\varepsilon) = l_1x_{k-1}(\cdot,\varepsilon),$$

которая, согласно теоремы 1 имеет условие разрешимости:

$$P_{D_d^*}\left\{l_1x_{k-1}(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)x_{k-1}(s)ds\right\} = 0, \quad (77)$$

из которой следует алгебраическая система относительно неизвестного вектора c_k:

$$B_0c_k = \varphi_k - B_1B_0^+\{\varphi_{k-1} - B_1B_0^+\{\varphi_{k-2} - B_1B_0^+\{\varphi_{k-3}-$$
$$- B_1B_0^+\{\varphi_{k-4} - ... - B_{k-4}B_0^+\varphi_0\} - \ldots - B_{k-2}B_0^+\varphi_0\} - \ldots - B_{k-2}B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\}-$$
$$- B_{k-1}B_0^+\varphi_0\} - \ldots - B_{k-1}B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_kB_0^+\varphi_0. \quad (78)$$

которая разрешима в том случае, когда выполняется условие

$$P_{\overline{B}_1^*}P_{B_0^*} = 0. \quad (79)$$

r-параметрическое множество решений алгебраической системы (78) имеет вид:

$$c_k = P_{B_0}c_{kr} + B_0^+[\varphi_k - B_1P_{B_0}c_{kr} - B_{21}P_{B_0}c_{(k-1)r} - ... - B_{k+2}P_{B_0}c_{-2r}-$$
$$- B_1B_0^+\{\varphi_{k-1} - B_1B_0^+\{\varphi_{k-2} - B_1B_0^+\{\varphi_{k-3} - B_1B_0^+\{\ldots\} - \ldots - B_{k-2}B_0^+\varphi_0\}-$$
$$- \ldots - B_{k-2}B_0^+\varphi_0\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_{k-1}B_0^+\varphi_0\} - \ldots - B_{k-1}B_0^+\varphi_0\}-$$
$$- \ldots - B_{k-2}B_0^+\varphi_0\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_kB_0^+\varphi_0], \quad c_{kr} \in R^r, \quad (80)$$

здесь

$$\varphi_k := -P_{D_d^*}[l_1G_0^{(k-1)}(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot, s)P^{-1}(s)Q_1(s)G_0^{(k-1)}(s)ds],$$
$$G_0^{(k)}(t) = (G[Q_1(s)G_0^{(k-1)}(s)])(t) + X(t)D^+l_1G_0^{(k-1)}(\cdot).$$

r-параметрическое множество решений краевой задачи (76) имеет вид:

$$x_k(t,\ c_{k+1}) = X_r(t)c_{k+1} + G_1(t)P_{B_0}c_{kr} + \{G_1(t)B_0^+[-B_1] + G_2(t)\}P_{B_0}c_{(k-1)r}+$$
$$+ \{G_1(t)B_0^+[-B_{21}] + G_2(t)B_0^+[-B_1] + G_3(t)\}P_{B_0}c_{(k-2)r} + ...+$$
$$+ \{G_1(t)B_0^+[-B_{(k+2)}] + G_2(t)B_0^+[-B_{(k+1)}] + \ldots + G_{k+2}(t)B_0^+[-B_1] + G_{k+3}(t)\}P_{B_0}c_{-2r}+$$
$$+ G_1(t)B_0^+ \cdot \{\varphi_k - B_1B_0^+\{\varphi_{k-1} - B_1B_0^+\{\varphi_{k-2} - B_1B_0^+\{\varphi_{k-3} - B_1B_0^+\{\ldots\} - \ldots -$$
$$- B_{k-2}B_0^+\varphi_0\} - \ldots - B_{k-2}\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_{k-1}B_0^+\varphi_0\} - \ldots -$$
$$- B_{k-1}B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_kB_0^+\varphi_0\}\} + G_2(t)B_0^+\{\varphi_{k-1}-$$
$$- B_1B_0^+\{\varphi_{k-2} - B_1B_0^+\{\varphi_{k-3} - B_1B_0^+\{\ldots\} - \ldots - B_{k-2}B_0^+\varphi_0\} - \ldots -$$
$$- B_{k-2}B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_{k-1}B_0^+\varphi_0\} - \ldots - B_{k-1}B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\}-$$
$$- B_kB_0^+\varphi_0\} + \ldots + G_k(t)B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} + G_{k+1}B_0^+\varphi_0 + G_0^{(k)}(t), \qquad c_{k+1} \in R^r. \quad (81)$$

С помощью метода математической индукции для произвольного натурального $k \geq 1$ можно доказать, что краевая задача вида (76), которая образована после подстановки ряда (10) в краевую задачу (1), (2) и приравнивания соответствующих коэффициентов при каждом из степеней ε^k, будет разрешима, если выполняется условие (79), и при этом имеет $r-$параметрическое множество решений (81).

Сходимость ряда Лорана доказывается с помощью традиционных методов мажорирования [17]. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 2 базируется на методе Вишика-Люстерника [17]. Полученные в работе результаты являются обобщением результатов, приведенных в [12, 13] и согласовываются с ранее полученными в теории краевых задач результатами [6–9, 13, 14].

Список литературы

[1] S.M. Chuiko and I.A. Boichuk. Autonomous Noetherian boundary-value problem in the critical case // Nonlin. Oscillat. – 2009. – V. 12, №3. – P. 417–428.

[2] A.A. Boichuk, S.M. Chujko. Autonomous weakly nonlinear boundary value problems // Differ. Equ. – 1992. – V. 28, №10. – P. 1353–1358.

[3] Chuiko S.M. Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary-value problem // Nonlin. Oscillat. – 2006. – V. 9, №3. – P. 405–422. DOI: https://doi.org/10.1007/s11072-006-0053-y

[4] Chuiko S.M., Boichuk I.A. & Pirus O.E. On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem by the Newton–Kantorovich method // J. Math. Sci. – 2013. – V. 189, №5. – P. 867–881. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-013-1225-9

[5] Чуйко С.М., Старкова О.В. Автономные краевые задачи в частном критическом случае // Динамические системы. – 2009. – Вып. 27. – С. 127–142.

[6] Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. – К.: Научн.мысль, 1990. – 96 с.

[7] Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Труды Института математики НАН Украины, 1995. – 318 с.

[8] Chuiko S.M. Bifurcation of solutions of a linear Fredholm boundary-value problem // Ukr. Math. J. – 2007. – V. 59, №8. – P. 1274–1279. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-007-0087-z

[9] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht, Boston: VPS. – 2004. – 317 p.

[10] Stanzhitskii A.N., Mynbayeva S.T. & Marchuk N.A. Averaging in Boundary-Value Problems for Systems of Differential and Integrodifferential Equations // Ukr. Math. J. – 2020. – V. 72, №2. – P. 277–301. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-020-01781-2

[11] A.A. Boichuk, L.M. Shegda. Bifurcation of Solutions of Singular Fredholm Boundary Value Problems // Differ. Equ. – 2011. – Vol. 47, № 4. – P. 453–461. DOI: https://doi.org/10.1134/S001226611104001X

[12] Шовкопляс Т.В. Достаточные условия возникновения решения слабовозмущенной краевой задачи // Динамические системы. – 2009. – Вып. 27. – С. 143–149. (На украинском).

[13] Шовкопляс Т.В. Слабовозмущенные линейные краевые задачи для систем дифференциальных уравнений второго порядка // Доклады НАН Украины. – 2002. – №4. – С. 31–36. (На украинском).

[14] Shovkoplyas T.S. A criterion for the solvability of A linear boundary-value problem for A system of the second order // Ukr. Math. J. – 2000. – V. 52, №6. – P. 987–991. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02591795

[15] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.

[16] Шовкопляс Т.В. Достаточные условия бифуркации решения импульсной краевой задачи с возмущением // Динамические системы. – 2010. – Вып. 28. – С. 141–152. (На украинском).

[17] M.I. Vishik, L.A. Lyusternik. The solution of some perturbation problems for matrices and selfadjoint or non-selfadjoint differential equations. I // Uspekhi Mat. Nauk. – 1960. – V. 15, №3. – P. 3–80; Russian Math. Surveys. – 1960. – V. 15, №3. – P. 1–73.

References

[1] S.M. Chuiko and I.A. Boichuk, "Autonomous Noetherian boundary-value problem in the critical case", *Nonlin. Oscillat.* **12**:3(2009), 417–428.

[2] A.A. Boichuk, S.M. Chujko, "Autonomous weakly nonlinear boundary value problems", *Differ. Equ.* **28**:10(1992), 1353–1358.

[3] Chuiko S.M., "Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary-value problem", *Nonlin. Oscillat.* **9**:3(2006), 405–422. DOI: https://doi.org/10.1007/s11072-006-0053-y

[4] Chuiko S.M., Boichuk I.A. & Pirus O.E., "On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem by the Newton–Kantorovich method", *J. Math. Sci.* **189**:5(2013), 867–881. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-013-1225-9

[5] Chuiko S. M., Starkova O. V., "Avtonomnye kraevye zadachi v chastnom kriticheskom sluchae [Autonomous boundary value problems in a particular critical case]", *Dynamic systems* **27**(2009), 127–142. [in Russian].

[6] Boichuk A. A., *Konstruktivnye metody analiza kraevyh zadach [Constructive methods of analysis of boundary value problems]* (K.: Scientific.thought, 1990) [in Russian].

[7] A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev and A. M. Samoilenko, *Obobshchenno-obratnye operatory i neterovy kraevye zadachi [Generalized inverse operators and Noether boundary-value problem]* (Kiyv: Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 1995) [in Russian].

[8] Chuiko S.M., "Bifurcation of solutions of a linear Fredholm boundary-value problem", *Ukr. Math. J.* **59**:8(2007), 1274–1279. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-007-0087-z

[9] Boichuk A.A., Samoilenko A.M., *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems* (Utrecht, Boston: VPS. 2004).

[10] Stanzhitskii A.N., Mynbayeva S.T. & Marchuk N.A., "Averaging in Boundary-Value Problems for Systems of Differential and Integrodifferential Equations", *Ukr. Math. J.* **72**:2(2020), 277–301. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-020-01781-2

[11] A.A. Boichuk, L.M. Shegda, "Bifurcation of Solutions of Singular Fredholm Boundary Value Problems", *Differ. Equ.* **47**:4(2011), 453–461. DOI: https://doi.org/10.1134/S001226611104001X

[12] Shovkoplyas T.V., "Dostatochnye usloviya vozniknoveniya resheniya slabovozmushchennoj kraevoj zadachi [Sufficient conditions for the emergence of a solution to a weakly confused boundary value problem]", *Dynamical systems* **27**(2009), 143–149 [in Ukrainian].

[13] Shovkoplyas T.V., "Slabovozmushchennye linejnye kraevye zadachi dlya sistem differencial'nyh uravnenij vtorogo poryadka [Weakly confused linear boundary value problems for systems of second-order differential equations]", (Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, 4(2002), 31–36) [in Russian].

[14] Shovkoplyas T.S., "A criterion for the solvability of A linear boundary-value problem for A system of the second order", *Ukr. Math. J.* **52**:6(2000), 987–991. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02591795

[15] Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A., *Matricy i vychisleniya [Matrices and computations]* (M.: Science, 1984) [in Russian].

[16] Shovkoplyas T.V., "Dostatochnye usloviya bifurkacii resheniya impul'snoj kraevoj zadachi s vozmushcheniem [Sufficient bifurcation conditions for the solution of a pulsed boundary value problem with perturbation]", *Dynamical Systems* **28**(2010), 141–152 [in Ukrainian].

[17] M.I. Vishik, L.A. Lyusternik, "The solution of some perturbation problems for matrices and selfadjoint or non-selfadjoint differential equations. I", *Russian Math. Surveys* **15**:3(1960), 1–73.