МРНТИ 27.29.21, УДК 517.984+517.928 DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v108.i4.02

Х.К. Ишкин*, Р.И. Марванов
Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия
*e-mail: Ishkin62@mail.ru

НЕСЕКТОРИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

Впервые уравнения Штурма-Лиувилля с комплексным потенциалом изучал М.А. Наймарк. М.А. Наймарку удалось найти достаточные условия на комплексный потенциал, когда соответствующий оператор Штурма-Лиувилля на полуоси имеет дискретный спектр. В дальнейшем результат М.А.Наймарка был усилен в работах В.Б. Лидского. Условия на комплексный потенциал, приведенные В.Б. Лидским, гарантируют аккретивность исследуемых операторов Штурма-Лиувилля. Актуальным оставался вопрос о существовании неаккретивных операторов Штурма-Лиувилля с дискретным спектром. В предлагаемой статье дается ответ на указанный вопрос. Для уравнения Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом построено специальное решение, которое убывает на бесконечности и при каждом фиксированном значении независимой переменной является целой функцией спектрального параметра. Используя это решение, получено обобщение известной теоремы В.Б. Лидского об условиях на потенциал, при которых спектр соответствующего оператора Штурма-Лиувилля дискретен, а система корневых векторов полна и минимальна. В отличие от работы В.Б. Лидского, вместо ограниченности снизу вещественной части или полуограниченности мнимой части потенциала требуется лишь, чтобы область значений потенциала лежала вне некоторого угла произвольного раствора с биссектрисой по отрицательной вещественной полуоси.

Ключевые слова: спектральная неустойчивость, локализация спектра, уравнение Штурма–Лиувилля, тривиальная монодромия.

Х.К. Ишкин*, Р.И. Марванов
Башқұрт мемлекеттік университеті, Уфа қ., Ресей
*e-mail: Ishkin62@mail.ru

Дискретті спектрі бар Штурм–Лиувилль секторлық емес операторы

Алғаш рет комплекс потенциалды Штурм-Лиувилль теңдеулерін М.А. Наймарк зерттеді. М.А. Наймарк комплекс потенциал үшін оған сәйкес келетін Штурм-Лиувилль операторының жартылай өсте дискретті спектрі болған жағдайда жеткілікті шарттарды таба алды. Кейін М.А. Наймарктың нәтижесі В.Б. Лидскийдің жұмыстарында күшейтілді. Комплекс потенциалға В.Б. Лидскиймен келтірген шарттар Штурм-Лиувилль операторларының аккретивтілігіне кепілдік береді. Дискретті спектрі бар Штурм-Лиувилльдің аккретивті емес операторларының бар болуы туралы мәселе өзекті болып қала берді. ұсынылып отырған мақалада көрсетілген сұраққа жауап беріледі. Комплекс потенциалды Штурм-Лиувилль теңдеуі үшін шексіздікте кемитін және тәуелсіз айнымалының әр бір бекітілген мәнінде спектрлік параметрдің бүтін функциясы болатын арнайы шешімі құрылды. Осы шешімді қолдана отырып, В.Б. Лидскийдің потенциалға қойылатын шарттар туралы белгілі теоремасының жалпыламасы алынды. Осы шарттар орындалғанда сәйкес Штурм-Лиувилль операторының спектрі дискретті, ал түбірлік векторлар жүйесі толық және минималды болады. В.Б. Лидскийдің жұмысына қарағандағы айырмашылық - потенциалдың нақты бөлігінің төменнен шенелген болуы немесе жорамал бөлігінің жартылай шенелген болуы шарттарының орнына тек қана потенциалдың мәндер жиыны биссектриса мен кейбір түзудің арасындағы бұрыштан тыс жорамал өс бойында оранласыу талап етіледі.

Түйін сөздер: спектрлік тұрақсыздық, спектрдің локализациясы, Штурм-Лиувилль теңдеуі, тривиалды монодромия.

Kh.K. Ishkin*, R.I. Marvanov
Bashkir State University, Ufa, Russia
*e-mail: Ishkin62@mail.ru

Non-accretive Sturm–Liouville operator with discrete spectrum

For the first time, the Sturm-Liouville equations with a complex potential were studied by M.A. Naimark. M.A. Naimark managed to find sufficient conditions for a complex potential when the corresponding Sturm-Liouville operator on the semi-axis has a discrete spectrum. later, the result of M.A. Naimark was strengthened in the works of V.B. Lidskii. the conditions for the complex potential given by V.B. Lidskii guarantee the accretivity of the studied Sturm-Liouville operators. the question of the existence of non-discrete Sturm-Liouville operators with a discrete spectrum remained relevant. The proposed article provides an answer to this question. For the Sturm - Liouville equation with a complex potential, we have constructed a special solution that decreases at infinity and, for each fixed value of the independent variable, is an entire function of the spectral parameter. Using this solution, a generalization of the well-known theorem of V.B. Lidskii on the conditions on the potential under which the spectrum of the corresponding Sturm – Liouville operator is discrete and the system of root vectors is complete and minimal. In contrast to Lidskii's work, instead of bounded below the real part or semi-boundedness of the imaginary part of the potential, it is only required that the region of potential values lie outside a certain angle of an arbitrary opening with a bisector along the negative real semiaxis.

Key words: spectral instability, spectrum localization, Sturm–Liouville equation, trivial monodromy

1 Введение

Пусть q – комплекснозначная функция, локально суммируемая на $(0,+\infty)$ и L – оператор, действующий в пространстве $L^2(0,+\infty)$ по формуле $Ly = l(y) := -y'' + qy$ на функциях из $D(L) = D := \{y \in L^2(0,+\infty) : \ y, y' \in AC[0,+\infty), \ l(y) \in L^2(0,+\infty)\}$. Здесь $AC[0,+\infty)$ – множество функций, абсолютно непрерывных на каждом отрезке $[0,b], \ b > 0$. Далее пусть D_0' – множество функций из D, равных нулю вне некоторого отрезка $[0,a]$ (своего для каждой функции) и удовлетворяющих условиям $y(0) = y'(0) = 0$; L_0' – сужение оператора L в D_0'. Введем оператор $M_0' = JL_0'J$, где J – оператор комплексного сопряжения.

Точно так же, как в случае вещественного q [1, § 17, 4^0] доказывается, что оператор M_0' плотно определен и

$$(M_0')^* \ = \ L. \tag{1}$$

Следовательно, $JM_0'L_0' \subset (M_0')^*$, то есть оператор M_0' *J-симметричен* [2, 22^0]. В силу (1) оператор L замкнут, следовательно, оператор M_0' замыкаем, поэтому замыкаем и оператор L_0'. Обозначим через L_0 замыкание L_0'. Имеем

$$(JL_0J)^* \ = \ L. \tag{2}$$

Далее, используя (2), легко показать (см. [1, § 17, Предложение VI]), что

$$D(L_0) = \{y \in D : \ y(0) = y'(0) = 0, \ \lim_{x\to\infty} \left(y\overline{z'} - y'\overline{z}\right) = 0 \quad \text{для всех } z \in D\}. \tag{3}$$

Введем оператор $L(\theta)$ – расширение оператора L_0 на $D_\theta = \{y \in D : \ y'(0) + \theta y(0) = 0$, где θ – фиксированное комплексное число или символ ∞, которому соответствует краевое условие $y(0) = 0$. Таким образом, при каждом θ оператор $L(\theta)$ – одномерное расширение L_0.

При вещественных q и θ оператор $L(\theta)$ впервые был подробно изучен Г. Вейлем [3]. Первый результат в случае комплексных q и θ принадлежит М. А. Наймарку [4]: если а) $q(x) \to \infty$ при $x \to +\infty$,

б) $0 \le \arg q(x) \le \gamma$, где $\gamma < \pi$,

в) $|q|'(x) = O\left(q^{\alpha}(x)\right),\ x \to +\infty$, где $0 < \alpha < 3/2$,

г) $q'(x) = O\left(|q|'(x)\right),\ q''(x) = O\left(|q|''(x)\right),\ x \to +\infty$,

то спектр оператора $L(\theta)$ дискретен. В дальнейшем этот результат был усилен в работах В. Б. Лидского [5] и [6]. Так, из Теорем 4 и 5 работы [6] следует[1]: если $p, q \in L^1_{\text{loc}}[0, +\infty)$ и выполнено одно из условий

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Re} q = +\infty$,

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Im} q = +\infty$ (или $-\infty$),

то спектр оператора $L(\theta)$ дискретен. Как показано в [6] (см. доказательство Теоремы 1), если $\operatorname{Re} q$ ограничена снизу, то для любого $y \in D(L(\theta))$

$$(L(\theta)y, y) = \int_0^\infty \left(|y'|^2 + q|y|^2\right) dx - \theta |y(0)|^2. \tag{4}$$

Отсюда, поскольку $y^2(0) = -2 \int\limits_0^{+\infty} yy'dx$ и

$$2|yy'| \le \varepsilon |y'|^2 + \varepsilon^{-1}|y|^2, \quad \varepsilon > 0, \tag{5}$$

то при некотором α $\operatorname{Re}\left((L(\theta) + \alpha)y, y\right) \ge 0$ для всех $y \in D(L(\theta))$, то есть оператор $L(\theta) + \alpha$ *аккретивен* [7, гл. V, § 3.10]. Более того, из той же Теоремы 1 следует, что при каждом λ из полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < -\alpha$ дефектное число $m(\lambda) := \dim\left(\operatorname{Ran}(L(\theta) - \lambda)\right)^{\perp}$ равно 0. Следовательно, оператор $L(\theta) + \alpha$ – m-аккретивен, а при вещественных θ – J-самосопряжен. Это утверждение верно и для оператора $-i(L + \alpha)$ (или $i(L + \alpha)$), если $\operatorname{Im} q$ полуограничена, а $\operatorname{Re} q$ удовлетворяет некоторым условиям, аналогичным условиям Сирса в самосопряженном случае [8] (см. Добавление, п. Д.1). Если q удовлетворяет условию Наймарка б), то легко показать (см. Добавление, п. Д.2), что оператор $e^{-i\gamma/2}L(\theta)$ не только аккретивен, но даже m-секториален [7, гл. V, § 3.10].

Конечно, m-аккретивные (m-секториальные – тем более) операторы, благодаря целому ряду свойств[2] более удобны в обращении по сравнению с произвольным (пусть даже замкнутым) оператором. Вместе с тем неаккретивные операторы довольно часто возникают в различных разделах физики и механики [9, 10]. Как правило, такие операторы спектрально неустойчивы (см., [11–15] и имеющиеся там ссылки) и ввиду высокой чувствительности их спектральных свойств к малым возмущениям для изучения последних приходится привлекать методы, использующие индивидуальные свойства каждого из таких операторов [16–22].

[1] В работе [6] L – оператор, порожденный выражением $l(y)$ с $D(L) = \{y \in L^2(-\infty, +\infty) : \ y' \in AC(-\infty, +\infty),\ l(y) \in L^2(-\infty, +\infty)\}$. Однако доказательства Теорем 1, 4, 5 без особых изменений переносятся на случай оператора $L(\theta)$ на полуоси.

[2] Резольвентное множество любого m-аккретивного оператора, как минимум, содержит полуплоскость; на каждом луче внутри этой полуплоскости резольвента имеет наилучшую (со степенью -1) скорость убывания и др.

Предлагаемая работа посвящена исследованию условий дискретности спектра оператора $L(\theta)$ в случае, когда потенциал q не подчинен ни условию б) Наймарка, ни условиям (A) или (B) Лидского, вследствие чего оператор $L(\theta)$ не является аккретивным. Как известно (см., например [2, гл. I, п. 21]), для любого замкнутого оператора T, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, его числовая область

$$Num(T) = \{(Tf, f) : \ f \in D(T), \|f\| = 1\}$$

является выпуклым множеством, поэтому в случае неаккретивности T совпадает со всей плоскостью $\mathbb{C}$. Мы покажем, что даже в случае, когда $Num(L(\theta)) = \mathbb{C}$, оператор $L(\theta)$ может иметь дискретный спектр, если существует область $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > R, \ |\arg z + \pi| < \varepsilon\}$, не пересекающаяся с областью значений функции q. Метод основан на построении специального решения $\varphi(x, \lambda)$ уравнения

$$-y'' + qy = \lambda y, \quad x > 0, \tag{6}$$

которое, с одной стороны, удовлетворяет стандартным ВКБ-оценкам [23, гл. II, § 2], с другой – при каждом фиксированном $x \geq 0$ является целой функцией λ. Это свойство играет важную роль при исследовании различных спектральных свойств оператора L_θ. Например, метод Левинсона (см. [24, Приложение 4]) доказательства (не)полноты системы корневых векторов как раз основан на указанном свойстве функции φ.

2 Формулировка основных результатов

На функцию q наложим следующие ограничения:

1) Существует $a > 0$, что q суммируема на $(0, a)$, дифференцируема на $[a, +\infty)$ и q' абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[a, b], \ b > a$;

2) На $[a, +\infty)$ функция $|q|$ положительна и

$$|\arg q(x)| \leq \frac{\pi}{1+\delta} \ (\delta > 0), \quad x \geq a, \tag{7}$$

$$\int_a^\infty |q|^{-1/2} dx < \infty; \tag{8}$$

3) Функция $(q^{-1/4})'' q^{-1/4}$ суммируема на $(a, +\infty)$.

Здесь и всюду далее считаем: $q^{-1/n} = 1/q^{1/n}, \ q^{1/n} = \sqrt[n]{q} = |q|^{1/n} e^{i(\arg q)/n}$.

Замечание 1 *Условиям 1) – 3) удовлетворяет, например, функция $q = re^{i\theta}$, где r, θ – вещественнозначные функции, такие, что при некотором $a > 0$*

a) $q \in L^1(0, a)$,

b) $r, \theta \in C^2[a, +\infty)$ *и при всех* $x \geq a$ $|\theta(x)| \leq \pi/(1+\delta), \ r(x) \geq C_0 x^\alpha, \ \delta > 0, \ \alpha > 2$,

c) функции $(r^{-1/4})'' r^{-1/4}$ *и* $(\theta'^2 + |\theta''|) r^{-1/2}$ *суммируемы на* $(a, +\infty)$.

Если, например, $r = x^\alpha$, $\theta = \dfrac{\pi}{1+\delta}\cos x^\beta$, $\alpha > 2$, $\beta < \alpha/4 + 1/2$, *то условия a) – c) выполнены, при этом ни мнимая, ни вещественная части функции* q *не удовлетворяют условиям (A) и (B).*

Введем обозначения

$$\Delta_1(x) = \int_x^\infty \left|\left(q^{-1/4}\right)'' q^{-1/4}\right| dt,\ \Delta_2(x) = \int_x^\infty |q|^{-1/2} dt, \quad x \geq a,$$

и договоримся, что всюду далее $C, C_0, C_1, \ldots$ – абсолютные (то есть не зависящие от каких-либо параметров) положительные постоянные, точное значение которых нас не интересует. Кроме того, если $y(x,\lambda)$ – решение уравнения (6), то ее производную по x условимся обозначать $y'(x,\lambda)$.

Теорема 1 *Пусть выполнены условия* 1) – 3). *Тогда*

(i) уравнение (6) *имеет решение* $\varphi = \varphi(x,\lambda)$, *которое*

(i$_1$) *при каждом* $x \geq 0$ *является целой функцией* λ *порядка не выше 1,*

(i$_2$) *удовлетворяет оценке*

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}} \exp\left(-\int_a^x \sqrt{q(t)}dt\right)(1 + r_0(x,\lambda)), \quad x \geq a, \tag{9}$$

$$|r_0(x,\lambda)| \leq C_0\left(\Delta_1(x) + \left(e^{C|\lambda|\Delta_2(x)} - 1\right)\right); \tag{10}$$

(ii) если выполнено дополнительное условие

$$q'(x) = o(q^{3/2}(x)), \quad x \to \infty, \tag{11}$$

то для функции φ' *справедливы аналогичные утверждения: при каждом* $x \geq 0$ *функция* $\varphi(x,\cdot)$ *– целая порядка не выше 1 и*

$$\varphi'(x,\lambda) = -\sqrt[4]{q(x)} \exp\left(-\int_a^x \sqrt{q(t)}dt\right)(1 + r_1(x,\lambda)),\ x \geq a, \tag{12}$$

$$|r_1(x,\lambda)| \leq C_1\left(\Delta_1(x) + \left(e^{C|\lambda|\Delta_2(x)} - 1\right) + \left|\frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)}\right|\right); \tag{13}$$

(iii) любое убывающее решение уравнения (6) *отличается от* φ *лишь постоянным множителем, так что* φ *оценкой* (9) – (10) *определяется однозначно.*

Замечание 2 *Хотя оценка* (9) – (10) *при фиксированном* λ *и больших* x *совпадает с обычной ВКБ-оценкой*

$$\varphi(x,\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{q(x) - \lambda}} \exp\left(-\int_a^x \sqrt{q(t) - \lambda}dt\right)(1 + o(1)), \quad x \to \infty, \tag{14}$$

есть, по крайней мере, два соображения, по которым оценка (9) – (10) *представляется более ценной, нежели оценка* (14). *Во-первых, оценка* (9) – (10) *равномерна по* λ, *в то время как*

ВКБ-оценка теряет смысл вблизи точек поворота[3]. *Это обстоятельство усугубляется еще тем, что при сделанных нами предположениях 1) – 3) множество точек поворота вообще не поддается контролю. Второй, еще более важный фактор: оценка* (9) – (10), *в отличие от* (14), *«не портит» решение — она работает, сохраняя важное свойство* (i_1).

Тем не менее, сравнение между указанными оценками не всегда оказывается в пользу первой. Основной недостаток оценки (9) – (10) – ее неоптимальность. Если λ меняется в области, которая не пересекается областью значений функции q, то точек поворота не возникает, потому появляется возможность прибегнуть классическому методу ВКБ. В следующей теореме утверждается, что при некотором ужесточении условия 3) оценка (9) – (10) может быть существенно улучшена. Из доказательства теоремы будет видно, что это улучшение достигается именно благодаря методу ВКБ.

Введем в рассмотрение функцию $\widetilde{q}$, которая на $[a+1,\infty)$ совпадает с q, на $[0,a]$ равна 0, и на $(a,a+1)$ такова, что $(\widetilde{q})'$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[0,b]$, $b>0$. Далее положим

$$S(R,\delta)=\left\{\lambda=re^{i\beta}:\quad r>R,\ |\beta|<\frac{\pi\delta}{1+\delta}\right\},$$

$$I(x,\lambda)=\int_x^\infty\left|\left((\widetilde{q}+\lambda)^{-1/4}\right)''(\widetilde{q}+\lambda)^{-1/4}\right|dt+\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\int_x^{a+1}|q-\widetilde{q}|dt,$$

$$Q(x,\lambda)=\lambda\int_x^\infty\frac{dt}{\sqrt{\widetilde{q}}+\sqrt{\widetilde{q}+\lambda}}-\int_0^x\sqrt{\widetilde{q}}dt.$$

Теорема 2 *Пусть функция q удовлетворяет условиям 1) – 2) и*

$3'$) *при каждом λ из сектора $S(R,\delta)$ интеграл $I(0,\lambda)$ сходится и при любом $\delta'\in(0,\delta)$* $I\left(0,re^{i\beta}\right)\to0,\quad r\to+\infty$, *равномерно по* $|\beta|\le\pi\delta'/(1+\delta')$.

Тогда при любом $\delta'\in(0,\delta)$ решение φ, определяемое оценкой (9) – (10), *имеет при больших $R>0$ асимптотику*

$$\varphi(x,-\lambda)\sim\frac{1}{\sqrt[4]{\widetilde{q}(x)+\lambda}}\exp\left(Q(x,\lambda)\right)\left(1+O\left(I(x,\lambda)\right)\right),\quad\lambda\in S(R,\delta'),\tag{15}$$

равномерную по $x\in[0,\infty)$ и $|\arg\lambda|\le\pi\delta'/(1+\delta')$.

Положим

$$\rho(\eta,\zeta,x)=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln M(\eta,\zeta,x,r)}{\ln r},$$

где $M(\eta,\zeta,x,r)=\max\limits_{\eta\le\theta\le\zeta}|\varphi(x,re^{i\theta})|$. Используя формулу (15), легко проверить, что если $q(x)=e^{i\theta}x^\alpha$ $(0<\theta<\pi,\ \alpha>2)$, то

$$\rho(\eta,\zeta,x)=\frac12+\frac1\alpha\quad\text{при всех}\quad x\ge0,\ \frac{\pi}{1+\delta}<\eta<\zeta<\frac{\pi(1+2\delta)}{1+\delta}.$$

С другой стороны, из оценки (9) – (10) следует только $\rho(\eta,\zeta,x)\le1$. Отсюда возникает предположение, что в ситуациях, когда метод ВКБ применим, то он дает гораздо более точную оценку, чем (9) – (10). Однако справедлива

[3]По определению, точка a_λ полупрямой $[0,+\infty)$ называется точкой поворота, если $q(a_\lambda)=\lambda$.

Теорема 3 *Если функция q удовлетворяет условиям* 1) – 3)*,* (11) *и вместо* (8) *выполнено условие*

$$M_1 x^\alpha < |q(x)| < M_2 x^\alpha \ (M_1, M_2 > 0,\ \alpha > 2), \quad x > a, \tag{16}$$

то

$$\varphi^{(j)}(x,\lambda) = (q_a(x))^{(2j-1)/4} \exp\left(-\int_0^x \sqrt{q_a} dt\right) y_j(x,\lambda),\ j = 0,1, \tag{17}$$

$$\sup_{x\ge 0} |y_j(x,\lambda)| \le \exp\left(\sigma_j |\lambda|^{1/2+1/\alpha}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{18}$$

$$q_a(x) = \begin{cases} q(x), & x \ge a, \\ 1, & 0 < x < a, \end{cases}$$

σ_j *– положительные постоянные.*

Теоремы 1 – 3 позволяют выявить некоторые спектральные свойства оператора $L(\theta)$.

Теорема 4 *Пусть q удовлетворяет условиям* 1) – 3)*. Тогда*

1) *оператор $L(\theta)$ имеет дискретный спектр;*

2) *если вместо* 3) *потребовать* $3')$*, то спектр бесконечен;*

3) *если к условиям* $1), 2), 3')$ *добавить еще* (11) *и* (16)*, где $\alpha > \max\{2/\delta, 2\}$, то система корневых векторов оператора $L(\theta)$ полна и минимальна.*

3 Благодарности

Работа первого автора выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, доп. согл. №075-02-2020-1421/1 к согл. №075-02-2020-1421; второго автора – при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №20-31-90999.

References

[1] M.A. Naimark, *Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a nonselfadjoint operator of the second order on a semi-axis* (Trudy Moskov. Mat. Obsc., **3** (1954), 181–270) [in Russian].

[2] I.M. Glazman, *Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators* (Israel Program for Scientific Trans., Jerusalem, 1965).

[3] H. Weyl, "Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen" , *Mam. Ann.* **68** (1910), 220–269.

[4] M.A. Naimark, "On the spectrum of singular nonselfadjoint differential second-order operators" , *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **85**:1 (1952), 41–44 [in Russian].

[5] V.B. Lidskii, *Conditions for completeness of a system of root subspaces for non-selfadjoint operators with discrete spectrum* (Tr. Mosk. Mat. Obs., **8** GIFML, Moscow, (1959), 83–120) [in Russian].

[6] V.B. Lidskii, *A non-selfadjoint operator of Sturm–Liouville type with a discrete spectrum* (Tr. Mosk. Mat. Obs., **9** (1960), 45–79) [in Russian].

[7] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators* (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966).

[8] D.B. Sears, "Note on the uniqueness of the Green's functions associated with certain differential equations", *Canadian J. of Math.* **2**:3(1950), 314–325.

[9] R. Mennicken, M. Möller, *Non-Self-Adjoint Boundary Eigenvalue Problems* (Elsevier, Amsterdam–London, 2003). Zbl 1033.34001

[10] F. Bagarello, J.P. Gazeau, F.H. Szafraniec, M. Znojil, *Non-Selfadjoint Operators in Quantum Physics: Mathematical Aspects* (Hoboken: John Wiley and Sons, New Jersey, 2015).

[11] J. Sjöstrand, *Spectral instability for non-selfadjoint operators* (Palaiseau Cedex, Preprint / Ecole Polytechnique, 2002).

[12] E.B. Davies, "Non-self-adjoint differential operators", *Bull. London Math. Soc.* **34**:5(2002), 513–532.

[13] Kh.K. Ishkin, "On the Spectral Instability of the Sturm–Liouville Operator with a Complex Potential", *Differ. Equ.* **45**:4 (2009), 494–509 (Translated from *Differ. Uravneniya* **45**:4 (2009), 480–495).

[14] Kh.K. Ishkin, "A localization criterion for the eigenvalues of a spectrally unstable operator", *Doklady Mathematics* **80**:3 (2009), 829–832 (Translated from *Dokl. AN* **429**:3 (2009), 301–304).

[15] Kh.K. Ishkin, "Conditions of Spectrum Localization for Operators not Close to Self-Adjoint Operators", *Doklady Mathematics* **97**:2 (2018), 170–173 (Translated from *Dokl. AN* **479**:5 (2018), 497–500).

[16] E.B. Davies, "Eigenvalues of an elliptic system", *Math. Zeitschrift* **243** (2003), 719–743.

[17] Kh.K. Ishkin, "On localization of the spectrum of the problem with complex weight", *Journal of Mathematical Sciences* **150**:6 (2008), 2488–2499 (Translated from *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika* **12**:5 (2006), 49–64).

[18] Kh.K. Ishkin, "On analytic properties of Weyl function of Sturm–Liouville operator with a decaying complex potential", *Ufa Math. Journal* **5**:1 (2013), 36–55.

[19] Kh.K. Ishkin, "On a Trivial Monodromy Criterion for the Sturm–Liouville Equation", *Math. Notes* **94**:4 (2013), 508–523 (Translated from *Matem. Zametki* **94**:4 (2013), 552–568).

[20] A.M. Savchuk, A.A. Shkalikov, "Spectral Properties of the Complex Airy Operator on the Half-Line", *Funct. Anal. Appl.* **51**:1 (2017), 66–79 (Translated from *Funk. analiz i ego pril.* **51**:1 (2017), 82–98).

[21] Kh.K. Ishkin, "A localization criterion for the spectrum of the Sturm-Liouville operator on a curve", *St. Petersburg Math. J.* **28**:1 (2017), 37–63 (Translated from *Algebra i Analiz* **28**:1 (2016), 52–88).

[22] Kh.K. Ishkin, A.V. Rezbayev, "Toward the Davies formula on the distribution of the eigenvalues of a nonselfadjoint differential operator", *Complex analysis, Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Prilozh. Temat. Obz., VINITI* **153** (2018), 84–93 [in Russian].

[23] M.V. Fedoryuk, *Asymptotic Analysis: Linear Ordinary Differential Equations* (Springer-Verlag, Berlin, 1993). Zbl 0782.34001

[24] B.Ya. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions* (Gostekhizdat, Moscow, 1956); English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.