ISSN 1563–0277, eISSN 2617–4871 JMMCS. №4(108). 2020 https://bm.kaznu.kz

МРНТИ 27.31.17 DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v108.i4.03

С.Е. Айтжанов[1,2,*], К.С. Бекенаева[3], Г.О. Жұмағұл[3]
[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
[2]Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан
[3]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан
*e-mail: Aitzhanov.Serik81@gmail.com

РАЗРЕШИМОСТЬ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Данная работа посвящена фундаментальной проблеме исследования разрешимости начально-краевой задачи для квазилинейного псевдогиперболического уравнения (называемых также уравнениями соболевского типа) с достаточно гладкой границей. В представленной работе исследуется начально-краевая задача для квазилинейного уравнения псевдогиперболического типа с нелинейным граничным условием Неймана-Дирихле. В статье с помощью метода Галеркина доказывается существование слабого решения квазилинейного псевдогиперболического уравнения в ограниченной области. С использованием теорем вложения Соболева, получены априорные оценки решения. Применение Галеркинских приближений позволяет получить оценку сверх времени существования решения. Доказана локальная теорема о существовании слабого обобщенного решения. При доказательстве существования искомого решения рассматриваемой краевой задачи используются априорные оценки и теорема Реллиха-Кондрашова. Единственность слабого обобщенного решения начально-краевой задачи квазилинейного уравнения псевдогиперболического типа доказывается на основе полученных априорных оценок и применения леммы Гронуолла-Беллмана. Необходимость рассмотрения и изучения такого рода начально-каевых задач для квазилинейного псевдогиперболического уравнения вытекает из практических потребностей. К примеру, при решении дифференциальных уравнений, моделирующих физические процессы, важно, чтобы было хорошее соответствие между выбранной моделью и реальным объектом.

Ключевые слова: псевдогиперболические уравнения, нелинейные граничные условия, метод Галеркина, существование решения, единственность решения.

С.Е. Айтжанов[1,2,*], К.С. Бекенаева[3], Г.О. Жұмағұл[3]
[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан
[3]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
*e-mail: Aitzhanov.Serik81@gmail.com

Сызықты емес шекаралық шартты псевдогиперболалық теңдеудің шешімділігі

Бұл жұмыс жеткілікті тегіс шекарасы бар квазисызықты псевдогиперболалық теңдеу үшін (Соболев типті теңдеулер деп те аталатын) бастапқы-шеттік есептің шешілуін зерттеудің іргелі мәселесіне арналған. ұсынылған жұмыста Нейман-Дирихле сызықты емес шекаралық шарттары бар псевдогиперболалық типті квазисызықты теңдеуіне арналған бастапқы-шеттік есеп зерттеледі. Мақалада Галеркин әдісі арқылы шектелген облыста квазисызықты псевдопараболалық теңдеудің әлсіз шешімінің бар болуы дәлелденеді. Соболевтың енгізу теоремаларын қолдану арқылы шешімнің априорлы бағалары алынды. Галеркиннің жуықтауларын қолдану шешімнің бар болу уақытынан тыс бағалауларды алуға мүмкіндік береді. Әлсіз жалпыланған шешімнің бар болу жөніндегі жергілікті теорема дәлелденді. Қарастырылған шеттік есептің ізделінді шешімінің бар болуын дәлелдеу кезінде априорлы бағалаулар мен Реллих-Кондрашов теоремасы қолданылады. Псевдопараболалық типті квазисызықты теңдеу үшін бастапқы-шеттік есептің әлсіз жалпыланған шешімінің жалғыздығы алынған априорлы бағалаулар мен Гронуолл-Беллман леммасы негізінде дәлелденеді. Квазисызықты псевдогиперболалық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есептерді қарастыру және зерттеу қажеттілігі практикалық мұқтаждықтардан туындайды. Мысалы, физикалық әдерістерді модельдейтін дифференциалдық теңдеулерді шешу кезінде таңдалған модель мен нақты объект арасында бір жақсы сәйкестік болуы қажетті әрі маңызды.

Түйін сөздер: псевдогиперболалық теңдеулер, сызықты емес шекаралық шарттар, Галеркин әдісі, шешімнің бар болуы, шешімнің жалғыздығы.

S.E. Aitzhanov[1,2,*], K.S. Bekenaeva[3], G.O. Zhumagul[3]
[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[3]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
*e-mail: Aitzhanov.Serik81@gmail.com

Solvability of a Pseudohyperbolic Equation with a Nonlinear Boundary Condition

This paper is devoted to the fundamental problem of investigating the solvability of an initial-boundary value problem for a quasi-linear pseudo-hyperbolic equation (also called Sobolev type equations) with a sufficiently smooth boundary. In this work, we study an initial-boundary value problem for a quasi-linear pseudo-hyperbolic equation with a nonlinear Neumann-Dirichlet boundary condition. The paper uses the Galerkin method to prove the existence of a weak solution of a quasi-linear pseudo-hyperbolic equation in a bounded domain. Using Sobolev embedding theorems, priori estimates of the solution are obtained. The use of Galerkin approximations allows us to obtain an overtime estimate of the solution's existence. A local theorem on the existence of a weak generalized solution is proved. A priori estimates and the Rellich-Kondrashov theorem are used to prove the existence of the desired solution to the boundary value problem under consideration. The uniqueness of a weak generalized solution to the initial boundary value problem of a quasi-linear pseudo-hyperbolic equation is proved on the basis of the obtained a priori estimates and the application of the Gronwall-Bellman Lemma. The need to consider and study such initial-boundary value problems for a quasi-linear pseudo-hyperbolic equation follows from practical needs. For example, when solving differential equations that model physical processes, it is important that there is a good match between the selected model and the real object.

Key words: pseudohyperbolic equations, nonlinear boundary conditions, Galerkin method, existence of a solution, uniqueness of a solution.

1 Введение

Первым строгим математическим исследованием задач для уравнений, не являющихся уравнениями типа Коши-Ковалевской, является пионерская работа С.Л.Соболева [1]. Эта же работа пробудила большой интерес к исследованию неклассических уравнений, названных уравнениями соболевского типа. Исследование задач для псевдопараболического типа началось в конце 1970-х годах. Изучению нелинейных уравнений псевдопараболического типа посвящено большое количество работ [2]- [22]. Моделированию физических процессов, приводящих к уравнениям типа Соболева и, в частности, псевдопараболического типа, посвящены работы [6]- [19]. Вопросы асимптотического поведения решений рассматриваемых задач при больших временах, теория рассеяния и устойчивость решений типа уединенных волн как для одномерных так и для многомерных уравнений типа Бенджамена–Бона–Махони и Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса, Розенау–Бюргерса [4], [5]. Исследованию разрешимости начально-краевых задач для уравнении псевдопараболического и псевдогиперболического типа существенный вклад внесли Осколков А.П., Антонцев С.Н., Кожанов А.И., Свешников А.И., Корпусов М.О. и многие другие ученые.

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \{(x,t):\ x \in \Omega,\ \Omega \subset R^n,\ 0 < t < T\}$ квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u - \Delta u) - \Delta u = b(x,t)|u_t|^{p-2}u_t + f(x,t), \tag{1}$$

с нелинейным граничным условием

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial n}+K(x,t)|u|^{\sigma-2}u\Big|_{\Gamma}=0,\quad \Gamma=\partial\Omega\times(0,T), \tag{2}$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ u_t(x,0)=u_1(x). \tag{3}$$

Здесь $\Omega\subset R^n,\ n\geq 3$ ограниченная область, граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая, p и σ положительные константы.

Функции $b(x,t),\ f(x,t),\ K(x,t)$ и $u_0(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{array}{l} 0<k_0\leq K(x,t)\leq k_1,\ \ 0<K_t(x,t)\leq k_1,\\ 0<b(x,t)\leq b_1,\ \ 0<b_t(x,t)\leq b_1,\\ \|f(x,t)\|^2_{2,\Omega}\leq C_0e^{\gamma t},\quad \gamma\leq 1,\ \ u_0(x),\, u_1(x)\in W^1_2(\Omega). \end{array} \tag{4}$$

Определение 1 *Слабым обобщенным решением задачи (1)-(3) называется функция* $u(x,t)$ *из пространства* $W^1_2(0,T;\,W^1_2(\Omega))\bigcap L_\sigma(\Gamma)$, *которая удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}v+\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial^3u}{\partial t^2\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-b(x,t)|u_t|^{p-2}u_tv\right)dxdt+$$
$$+\int_0^T\int_\Gamma K(x,t)|u|^{\sigma-2}uvd\Gamma dt=\int_0^T\int_\Omega fvdxdt, \tag{5}$$

для всех $v(x,t)\in L_2(0,T;\,W^1_2(\Omega))\bigcap L_\sigma(\Gamma)$.

1.2 Существование решения

Выберем в $H^1(\Omega)$ некоторую систему функций $\{\Psi_j(x)\}$ образующую базис в данном пространстве. Такая система заведомо существует, поскольку $H^1(\Omega)$ - сеперабельное пространство. Будем искать приближенное решение задачи (1)-(3) в виде

$$u_m(x,t)=\sum_{k=1}^m C_{mk}(t)\Psi_k(x), \tag{6}$$

где коэффициенты $C_{mk}(t)$ ищутся из условий

$$\sum_{k=1}^m C''_{mk}(t)\left\{\int_\Omega\left[\Psi_k\Psi_j+\sum_{i=1}^m\frac{\partial\Psi_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\Psi_j}{\partial x_i}\right]dx\right\}+$$
$$+\sum_{k=1}^m C_{mk}(t)\int_\Omega\sum_{i=1}^m\frac{\partial\Psi_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\Psi_j}{\partial x_i}dx+\sum_{k=1}^m C_{mk}(t)\int_\Gamma K(x,t)|u_m|^{\sigma-2}\Psi_k\Psi_jd\Gamma-$$
$$-\sum_{k=1}^m C'_{mk}(t)\int_\Omega b(x,t)|u_{mt}|^{p-2}\Psi_k\Psi_jdx=\int_\Omega f\cdot\Psi_jdx, \tag{7}$$

$$u_{m0} = u_m(0) = \sum_{k=1}^{m} C_{mk}(0)\Psi_k = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \Psi_k, \tag{8}$$

$$\text{причем} \quad u_{m0} \to u_0 \text{ сильно в } H^1(\Omega) \text{ при } m \to \infty. \tag{9}$$

Введем обозначения:

$$\vec{C}_m \equiv \{C_{1m}(t), ..., C_{mm}(t)\}^T,$$

$$a_{kj} = \int_\Omega [\Psi_k \Psi_j + (\nabla\Psi_k, \nabla\Psi_j)]\, dx,$$

$$b_{kj} = -\int_\Gamma K(x,t)\, |u_m|^{\sigma-2} \Psi_k \Psi_j d\Gamma + \int_\Omega b(x,t)\, |u_{mt}|^{p-2} \Psi_k \Psi_j dx + \int_\Omega f \cdot \Psi_j dx,$$

$$A_m\left(\vec{C}_m\right) \equiv \left\{a_{jk}\left(\vec{C}_m\right)\right\}, \vec{G}_m\left(\vec{C}_m\right) \equiv \left\{b_{jk}\left(\vec{C}_m\right)\right\}.$$

Тогда система уравнений (7) принимает матричный вид

$$A_m \vec{C}''_m \equiv \vec{G}_m\left(\vec{C}_m\right) \vec{C}'_m. \tag{10}$$

Умножим обе части равенства (7) на $C'_{mj}(t)$ и просуммируем обе части получившегося равенства по $j = \overline{1,m}$. В результате получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega [|u'_m|^2 + |\nabla u'_m|^2 + |\nabla u_m|^2] dx + \frac{1}{\sigma}\frac{d}{dt}\int_\Gamma K(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma =$$
$$= \int_\Gamma K_t(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma + \int_\Omega b(x,t)|u'_m|^p dx + \int_\Omega f \cdot u'_m dx. \tag{11}$$

Оценим правую часть тождества (11), применим следующие интерполяционные неравенства

$$\|u\|^p_{p,\Omega} \le C_1 \left(\|\nabla u\|^2_{2,\Omega} + \|u\|^2_{2,\Omega}\right)^{\frac{\theta p}{2}} \|u\|^{(1-\theta)p}_{2,\Omega} \le C_1 \left(\|\nabla u\|^2_{2,\Omega} + \|u\|^2_{2,\Omega}\right)^{\frac{p}{2}},$$

где $\theta = \dfrac{(p-2)N}{2p}$, $\theta < 1$, $2 < p < \dfrac{2N}{N-2}$, $N \ge 3$.

$$\|u\|^\sigma_{\sigma,\Omega} \le C'_2 \left(\|\nabla u\|^2_{2,\Omega} + \|u\|^2_{2,\Omega}\right)^{\frac{\theta\sigma}{2}} \|u\|^{(1-\theta)\sigma}_{2,\Omega} \le C'_2 \left(\|\nabla u\|^2_{2,\Omega} + \|u\|^2_{2,\Omega}\right)^{\frac{\sigma}{2}} \le$$
$$\le C_2 \left(\|\nabla u\|^2_{2,\Omega} + \|u\|^2_{2,\Omega}\right)^{\frac{p}{2}} + C_3,$$

где $\theta = \dfrac{pN - 2(N-1)}{2p}$, $0 < \theta < 1$, $2 < \sigma < \dfrac{2(N-1)}{N-2}$, $N \ge 3$,

$$\left|\int_\Gamma K_t(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma\right| \le k_1 C_2 \left(\|\nabla u_m\|^2_{2,\Omega} + \|u_m\|^2_{2,\Omega}\right)^{\frac{p}{2}} + k_1 C_3,$$

$$\left|\int_\Omega b(x,t)|u'_m|^p dx\right| \le b_0 \|u'_m\|^p_{p,\Omega} \le b_0 C_1 \left(\|\nabla u'_m\|^2_{2,\Omega} + \|u'_m\|^2_{2,\Omega}\right)^{\frac{p}{2}}. \tag{12}$$

$$\left|\int_\Omega f\cdot u_m' dx\right| \le \|f\|_{2,\Omega}\|u_m'\|_{2,\Omega} \le \frac{1}{2}\|f\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\|u_m'\|_{2,\Omega}^2 \le$$
$$\le \frac{1}{2}\|f\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\left(\|\nabla u_m'\|_{2,\Omega}^2 + \|u_m'\|_{2,\Omega}^2\right). \quad (13)$$

Подставляя полученные неравенства (12) и (13) в тождество (11), получим

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega [|u_m'|^2 + |\nabla u_m'|^2 + |\nabla u_m|^2]dx + \frac{2}{\sigma}\frac{d}{dt}\int_\Gamma K(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma \le$$
$$\le \left(\|\nabla u_m'\|_{2,\Omega}^2 + \|u_m'\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2}{\sigma}\int_\Gamma K(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma\right) +$$
$$+C_4\left(\|\nabla u_m'\|_{2,\Omega}^2 + \|u_m'\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2}{\sigma}\int_\Gamma K(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma\right)^{\frac{p}{2}} + C_0 e^{\gamma t} + 2k_1C_3, \quad (14)$$

Обозначим через $y(t) \equiv \int_\Omega [|u_m'|^2 + |\nabla u_m'|^2 + |\nabla u_m|^2]dx + \frac{2}{\sigma}\int_\Gamma K(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma$, тогда (14) примет вид

$$\frac{dy(t)}{dt} \le y(t) + C_4[y(t)]^{\frac{p}{2}} + C_0 e^{\gamma t} + 2k_1C_3.$$

Обозначим через $z(t) \equiv e^{-t}y(t)$ и интегрируем от 0 до t, получим

$$z(t) \le z(0) + 2k_1C_3 + \frac{C_0}{1-\gamma} + C_4\int_0^t e^{\frac{p-2}{2}s}[z(s)]^{\frac{p}{2}}ds.$$

Применив к которому лемму Гроноулла-Беллмана-Бихари [23], если

$$C_4\left(e^{\frac{p-2}{2}t} - 1\right) < \frac{1}{\left(z(0) + 2k_1C_3 + \frac{C_0}{1-\gamma}\right)^{\frac{p-2}{2}}}, \quad 0 \le t < T,$$

тогда справедливо неравенство

$$\int_\Omega [|u_m'|^2 + |\nabla u_m'|^2 + |\nabla u_m|^2]dx + \frac{2}{\sigma}\int_\Gamma K(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma \le$$
$$\le \frac{C_5 e^t}{\left[1 - C_5^{\frac{p-2}{2}} C_4\left(e^{\frac{p-2}{2}t} - 1\right)\right]^{\frac{2}{p-2}}},$$
$$C_5 = \|u_m'(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m'(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 +$$
$$+\frac{2}{\sigma}\int_\Gamma K(x,t)|u_m(x,0)|^\sigma d\Gamma + 2k_1C_3 + \frac{!_0}{1-\gamma}. \quad (15)$$

Из этой оценки можно сделать вывод, что существует $T_0 > 0$ такое, что

$$\int_\Omega [|u'_m|^2 + |\nabla u'_m|^2 + |\nabla u_m|^2] dx + \frac{2}{\sigma} \int_\Gamma K(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma \leq C_6, \tag{16}$$

для всех $t \in [0,T]$, $T < T_0$, где постоянная C_6 не зависит от $m \in N$.

Теперь умножим равенство (7) на $C'''_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1,m}$. В результате получим

$$\|u''_m\|^2_{2,\Omega} + \|\nabla u''_m\|^2_{2,\Omega} = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega b(x,t)|u'_m|^p dx - \frac{1}{p}\int_\Omega b_t(x,t)|u'_m|^p dx -$$

$$- \int_\Gamma K(x,t)|u_m|^{\sigma-2} u_m u_{mtt} d\Gamma - \int_\Omega \nabla u_m \nabla u_{mtt} dx + \int_\Omega f \cdot u''_m dx.$$

Проинтегрируем по τ от 0 до t, тогда получим соотношение

$$\int_0^t \left(\|u''_m\|^2_{2,\Omega} + \|\nabla u''_m\|^2_{2,\Omega}\right) d\tau = -\frac{1}{p}\int_\Omega b(x,0)|u'_m(x,0)|^p dx + \frac{1}{p}\int_\Omega b(x,t)|u'_m|^p dx -$$
$$-\frac{1}{p}\int_0^t \int_\Omega b_t(x,t)|u'_m|^p dx d\tau - \int_0^t \int_\Gamma K(x,t)|u_m|^{\sigma-2}u_m u_{mtt} d\Gamma d\tau -$$
$$- \int_0^t \int_\Omega \nabla u_m \nabla u_{mtt} dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega f \cdot u''_m dx d\tau. \tag{17}$$

Оценивая правую часть и подставим в тождество (17), получим

$$\frac{1}{2}\int_0^t \|u''_m\|^2_{2,\Omega} d\tau + \frac{2}{3}\int_0^t \|\nabla u''_m\|^2_{2,\Omega} d\tau \leq C_7(t),$$

$$\int_0^T \|u''_m\|^2_{2,\Omega} d\tau + \int_0^T \|\nabla u''_m\|^2_{2,\Omega} d\tau \leq C_7. \tag{18}$$

Из полученных оценок (16), (18) вытекают соответственно следующие утверждения:

$$u_m \quad \text{ограниченно в} \;\; L_\infty(0,T;\, H^1(\Omega)), \tag{19}$$

$$u'_m \;\; \text{ограниченно в} \;\; L_\infty(0,T;\, H^1(\Omega)), \tag{20}$$

$$K(x,t)|u_m|^{\sigma-2}u_m \; \text{ограниченно в} \; L_\infty(0,T;\, L_{\sigma'}(\Gamma)), \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\sigma-1} > 1. \tag{21}$$

$$u''_m \qquad \text{ограниченно в} \qquad L_2(0,T;\, H^1(\Omega)). \tag{22}$$

Кроме того, в силу поставленных условий на p:

$$u_m|^{p-2}u_m \ mbox\ \text{Ł}_\infty(0,T;\ L_{\dfrac{p}{p-1}}(\Omega)), 2 < p < \frac{2N}{N-2},\ \ N \geq 3. \tag{23}$$

Из (19) и (20) следует, что существует подпоследовательность u_{m_k} последовательности u_m, *-слабо сходящаяся к некоторому элементу $u'_m \in L_\infty(0,T;\ H^1(\Omega))$, т.е.

$$u'_{m_k} \ \ \rightarrow \ \ u' \ \text{*-слабо в}\ L_\infty(0,T;\ H^1(\Omega)).$$

Аналогичным образом, из (20)-(23) вытекает, что существует такая последовательность $\{u'_{m_k}\} \subset \{u'_m\}$, что $u'_{m_k} \ \ \rightarrow \ \ u'$слабо в $L_2(0,T;\ H^1(\Omega))$.

В силу теоремы Реллиха-Кондрашова, вложение $W_2^1(Q_T)$ в $L_2(Q_T)$ компактно. Это означает, что последовательность u'_{m_k} можно выбрать так, что $u'_{m_k} \ \ \rightarrow \ \ u'$ в норме $L_2(Q_T)$, а значит сходящейся почти всюду [24].

Из (22) следует, что $K(x,t)|u_m|^{\sigma-2}u_m \in L_\infty(0,T;\ L_{\sigma'}(\Gamma))$, $\ \sigma' = \dfrac{\sigma}{\sigma-1} > 1$ и сходится почти всюду в $(0,T)$.

Из ограниченности $\sqrt{K(x,t)|u_m|^{\sigma-2}u_m}$ в $L_2(0,T;\ L_{\sigma'}(\Gamma))$, $\ \sigma' = \dfrac{\sigma}{\sigma-1} > 1$ вытекает слабая сходимость в этом пространстве подпоследовательности $K(x,t)|u_{m_k}|^{\sigma-2}u_{m_k}$ к некоторой функций $\chi(x,t)$.

В силу леммы 1.3, доказанной в [24], следует $\chi(x,t) = K(x,t)|u|^{\sigma-2}u$.

Приведенные рассуждения позволяют перейти к пределу в (7). Но сначала умножим каждое из равенств (7) на $d_j(t) \in C[0,T]$ и просуммируем обе части получившегося равенства по $j = \overline{1,m}$. Затем проинтегрируем по t от 0 до T, получим

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^3 u_m}{\partial t^2 \partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_m}{\partial t}\mu - b(x,t)|u_{mt}|^{p-2}u_{mt}\mu \right) dxdt -$$
$$- \int_0^T \int_\Gamma K(x,t)|u_m|^{\sigma-2}u_m \mu d\Gamma dt = \int_0^T \int_\Omega f\mu dxdt, \tag{24}$$

где $\mu(x,t) = \sum\limits_{j=1}^m d_j(t)\Psi_j(x)$.

Учитывая полученные включения и сходимости, перейдем в (24) к пределу при $m \ \rightarrow \ \infty$ и получим (5) для $v = \mu$. Так как множество всех функций $\mu(x,t)$ плотно в $W_2^1(0,T;\ W_2^1(\Omega)) \bigcap L_\sigma(\Gamma)$, то предельное соотношение выполняется для всех $v(x,t) \in L_2(0,T;\ W_2^1(\Omega)) \bigcap L_\sigma(\Gamma)$.

Теорема 1 *Пусть выполняются условия* (4), *а также* $2 < p < \dfrac{2N}{N-2}$, $\ N \geq 3$, $2 < \sigma < \dfrac{2(N-1)}{N-2}$, $\ N \geq 3$. *Тогда на интервале* $(0,T)$, $\ T < T_0$, *существует слабое обобщенное решение* $u(x,t)$ *задачи* (1)-(3), *причем имеют место следующие включения:*

$$u \in L_\infty(0,T;\ H^1(\Omega)),\ \ u_t \in L_\infty(0,T;\ H^1(\Omega)),$$

$$u_{tt} \in L_2(0,T;\ H^1(\Omega)), |u|^{\sigma-2}u \in L_\infty(0,T;\ L_{\sigma'}(\Gamma)), \ \ \sigma' = \frac{\sigma}{\sigma-1} > 1.$$

1.3 Единственность слабого обобщенного решения

Предположим, что задача (1)-(3) имеет два решения: $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет условию $u(x,0) = 0$ и тождеству

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} v + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^2 \partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - b(x,\tau) \left(|u_{1\tau}|^{p-2} u_{1\tau} - |u_{2\tau}|^{p-2} u_{2\tau} \right) v \right) dx d\tau + \\ + \int_0^t \int_\Gamma K(x,\tau) \left(|u_1|^{\sigma-2} u_1 - |u_2|^{\sigma-2} u_2 \right) v d\Gamma d\tau = 0.$$

В силу $v(x,t) \in L_2(0,T;\, W_2^1(\Omega)) \bigcap L_\sigma(\Gamma)$, то в качестве $v(x,t)$ можно взять $u_t(x,t)$, т.е. положим $v(x,t) = u_t(x,t)$

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} u_\tau + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^2 \partial x_i} \frac{\partial u_\tau}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u_\tau}{\partial x_i} \right) - \\ - b(x,\tau) \left(|u_{1\tau}|^{p-2} u_{1\tau} - |u_{2\tau}|^{p-2} u_{2\tau} \right) u_\tau \right) dx d\tau + \\ + \int_0^t \int_\Gamma K(x,\tau) \left(|u_1|^{\sigma-2} u_1 - |u_2|^{\sigma-2} u_2 \right) u_\tau d\Gamma d\tau = 0. \quad (25)$$

Применим следующее неравенство

$$||u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2| \le (q+1) \left(|u_1|^q + |u_2|^q \right) |u_1 - u_2| \quad \text{при} \quad q > 0.$$

Тогда (25) запишется виде

$$\frac{1}{2} \int_\Omega [|u_\tau|^2 + |\nabla u_\tau|^2 + |\nabla u|^2] dx \le K_1(\sigma - 1) \int_0^t \int_\Gamma \left(|u_1|^{\sigma-2} + |u_2|^{\sigma-2} \right) u u_\tau d\Gamma d\tau + \\ + b_1 \int_0^t \int_\Omega \left(|u_{1\tau}|^{p-2} + |u_{2\tau}|^{p-2} \right) u_\tau^2 dx d\tau. \quad (26)$$

Оценим правую часть неравенства (26), применяя неравенство Гельдера

$$\left| \int_0^t \int_\Omega b(x,\tau) \left(|u_{1\tau}|^{p-2} u_{1\tau} - |u_{2\tau}|^{p-2} u_{2\tau} \right) u_\tau dx d\tau \right| \le \\ \le b_1(p-1) \int_0^t \int_\Omega \left(|u_{1\tau}|^{p-2} + |u_{2\tau}|^{p-2} \right) u_\tau^2 dx d\tau \le \\ \le b_1(p-1) \left(\left(\int_0^t \int_\Omega |u_{1\tau}|^{\frac{2r(p-2)}{r-2}} dx d\tau \right)^{\frac{r-2}{2r}} + \left(\int_0^t \int_\Omega |u_{2\tau}|^{\frac{2r(p-2)}{r-2}} dx d\tau \right)^{\frac{r-2}{2r}} \right) \times \\ \times \left(\int_0^t \int_\Omega u_\tau^r dx d\tau \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^t \int_\Omega u_\tau^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим $r = \dfrac{2N}{N-2}$, $p \leq 2 + \dfrac{1}{N-2}$, $N \geq 3$. Тогда по теореме вложения Соболева $H^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ и $H^1(\Omega) \subset L_{2r(p-2)/(r-2)}(\Omega)$. В этом случае, учитывая класс гладкости решений $u_1(x,t)$и $u_2(x,t)$, приходим к оценке

$$\left| \int_0^t \int_\Omega b(x,\tau) \left(|u_{1\tau}|^{p-2} u_{1\tau} - |u_{2\tau}|^{p-2} u_{2\tau} \right) u_\tau dx d\tau \right| \leq C_5 \int_0^t \left(\|\nabla u_\tau\|^2_{2,\Omega} + \|u_\tau\|^2_{2,\Omega} \right) d\tau. \tag{27}$$

Аналогичным образом, оценивается

$$\left| \int_0^t \int_\Gamma \left(|u_1|^{\sigma-2} + |u_2|^{\sigma-2} \right) u u_\tau d\Gamma d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left(\left(\int_0^t \int_\Gamma |u_1|^{\dfrac{2r(\sigma-2)}{r-2}} dx d\tau \right)^{\dfrac{r-2}{2r}} + \left(\int_0^t \int_\Gamma |u_2|^{\dfrac{2r(\sigma-2)}{r-2}} dx d\tau \right)^{\dfrac{r-2}{2r}} \right) \times$$

$$\times \left(\int_0^t \int_\Gamma u^r dx d\tau \right)^{\dfrac{1}{r}} \left(\int_0^t \int_\Gamma u_\tau^2 dx d\tau \right)^{\dfrac{1}{2}}.$$

Положим $r = \dfrac{2(N-1)}{N-2}$, $\sigma \leq 2 + \dfrac{1}{N-2}$, $N \geq 3$. Тогда по теореме вложения Соболева $H^1(\Omega) \subset L_r(\Gamma)$ и $H^1(\Omega) \subset L_{2r(\sigma-2)/(r-2)}(\Gamma)$. Учитывая класс гладкости решений $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, приходим к оценке

$$\left| \int_0^t \int_\Gamma \left(|u_1|^{\sigma-2} + |u_2|^{\sigma-2} \right) u u_\tau d\Gamma d\tau \right| \leq C_6 \int_0^t \left(\|\nabla u_\tau\|^2_{2,\Omega} + \|\nabla u\|^2_{2,\Omega} + \|u_\tau\|^2_{2,\Omega} \right) d\tau. \tag{28}$$

В силу (27), (28) получим

$$\int_\Omega [|u_\tau|^2 + |\nabla u_\tau|^2 + |\nabla u|^2] dx \leq C_7 \int_0^t \left(\|\nabla u_\tau\|^2_{2,\Omega} + \|\nabla u\|^2_{2,\Omega} + \|u_\tau\|^2_{2,\Omega} \right) d\tau, \tag{29}$$

которое в силу леммы Гронуолла-Беллмана влечет $\int_\Omega \left(|u_\tau|^2 + |\nabla u_\tau|^2 + |\nabla u|^2 \right) dx = 0$ почти всюду на временном интервале $(0,T)$, что означает единственность слабого обобщенного решения. Таким образом справедлива

Теорема 2 *Пусть выполняются условия* (4),

$$2 < \sigma < 2 + \frac{1}{N-2}, \quad N \geq 3, \quad p \leq 2 + \frac{1}{N-2}, \quad N \geq 3.$$

Тогда слабое обобщенное решение задачи (1)-(3) *на интервале* $(0,T)$ *единственно.*

2 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проекта Министерством образования и науки Республики Казахстан (гранты № AP08052425).

Список литературы

[1] Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – №18 – С. 3-50.

[2] Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Конина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах // Прикл. матем. и механ. – 1960. – Т. 24, №5 – С. 58-73.

[3] Ting T.W. Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations // J. Math. Soc. Japan. – 1969. – V. 14 – P. 1-26.

[4] Benjamin T.B. Lectures on nonlinear wave motion // Ltd. Appl. Math. Vol. Amer. Math. Soc: Providence, R.I.– 1974. – V. 15 – P. 3-7.

[5] Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Pliilos. Trans. Roy. Soc. – 1972. – V.272, №1220 – P. 47-78.

[6] Showalter R.E. Existence and representation theorems for a semilinearSobolev equation in Banachspace // SIAM J. Math. Anal. – 1972. – V.3, №3 – P. 527-543.

[7] Showalter R.E., Ting T.W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. – 1970. – V. 1, №1 – P. 1-26.

[8] Похожаев С.И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений //Мат. сб. –1975.– Т. 25, №1. – С. 145-158.

[9] Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1988. – Вып. 179 – С. 126-164.

[10] Осколков А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С. Л. Соболева // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1991. – Вып. 198 – С. 31-48.

[11] Габов С.Л., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. // М.: Наука, 1990.

[12] Шишмарев И.А. Об одном нелинейном уранении типа Соболева // Диффер. уравн. – 2005. – Т. 41, №1. – С. 1-3.

[13] Корпусов М.О., Свешников А.Г. О разрешимости сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью // Ж. вычисл. мат. мат. физ. – 2003. – Т. 43, №7. – С. 944-962.

[14] А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – М.: Физматлит, 2007.

[15] А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987.

[16] S.N. Antontsev, Kh. Khompysh Kelvin-Voigt equation with p-Laplacian and damping term: Existence, uniqueness and blowup // Mathematical Analysis and Applications. – 2017. – V. 446. – P. 1255-1273.

[17] S.N. Antontsev, Kh. Khompysh Generalized Kelvin–Voigt equations with p-Laplacian and source/absorption terms // Mathematical Analysis and Applications. – 2017. – V. 456. – P. 99-116.

[18] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh Kelvin-Voigt equations perturbed by anisotropic relaxation, diffusion and damping // Mathematical Analysis and Applications. – 2019. – V. 473. – P. 1122-1154.

[19] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids // Communications in Mathematical Sciences. – 2019. –V. 17, №7. – P. 1915-1948.

[20] А.И. Кожанов, Н.С. Попов О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Вестник НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2010. – Т. 10, №3. – С. 46-62.

[21] Ш. Амиров, А.И. Кожанов Разрешимость смещанной задачи для некоторых сильно нелинейных уравнений соболевского типа высокого порядка // Сиб.журн.индустр.матем. – 2014. – Т.17, №4. – С. 14-30.

[22] А.И. Кожанов Краевые задачи для уравнения соболевского типа с необратимым оператором при старшей производной // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. – 2019. – Т. 167. – С. 34-41.

[23] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.

[24] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Наука, 1972. – 588 с.

References

[1] Sobolev S.L., "Ob odnoy novoy zadache matematicheskoy fiziki.[On a new problem in mathematical physics]" , *Izv. AN SSSR. Ser. mat.,* 18(1954), 3-50 [in Russian].

[2] Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Konina I.N., "Ob osnovnykh predstavleniyakh teorii fil'tratsii v treshchinnovatykh sredakh. [On the basic concepts of the theory of filtration in fractured media]" , *Prikl. matem. i mekhan.* **24**:5(1960), 73-58 [in Russian].

[3] Ting T.W., "Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations"„ *J. Math. Soc. Japan.* 14(1969), 1-26.

[4] Benjamin T.B., "Lectures on nonlinear wave motion" , *Ltd. Appl. Math. Vol. Amer. Math. Soc: Providence; R.I.* 15(1974), 3-7.

[5] Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J., "Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems" , *Pliilos. Trans. Roy. Soc.* **272**:1220(1972), 47-78.

[6] Showalter R.E., "Existence and representation theorems for a semilinearSobolev equation in Banachspace" , *SIAM J. Math. Anal.* **3**:3(1972), 527-543.

[7] Showalter R.E., Ting T. W., "Pseudoparabolic partial differential equations" , *SIAM J. Math. Anal.* **1**:1(1970), 1-26.

[8] Pokhozhaev S.I., "Ob odnom klasse kvazilineynykh giperbolicheskikh uravneniy.[On a class of quasilinear hyperbolic equations]"*Mat. Sb.* **25**:1(1975), 145-158 [in Russian].

[9] Oskolkov A.P., *Nachal'no-krayevyye zadachi dlya uravneniy dvizheniya zhidkostey Kel'vina-Foygta i zhidkostey Oldroyta [Initial-boundary value problems for the equations of motion of Kelvin-Voigt fluids and Oldroyd fluids]* (Tr. Mat. in-ta im. V. A. Steklova AN SSSR, **179**(1988), 126-164) [in Russian].

[10] Oskolkov A.P., "Nelokal'nyye problemy dlya odnogo klassa nelineynykh operatornykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii uravneniy tipa S. L. Soboleva. [Nonlocal problems for a class of nonlinear operator equations arising in the theory of equations of the Sobolev type]" , *Zap. nauch. semin. LOMI.* **198**(1991), 31-48 [in Russian].

[11] Gabov S.L.,Sveshnikov A.G., *Lineynyye zadachi teorii nestatsionarnykh vnutrennikh voln.[Linear problems in the theory of nonstationary internal waves.]* (M.: Nauka, 1990) [in Russian].

[12] Shishmarev I.A., "Ob odnom nelineynom uranenii tipa Soboleva. [On a nonlinear uranium of the Sobolev type]" , *Differ. Equ.* **41**:1(2000), 1-3 [in Russian].

[13] Korpusov M.O., Sveshnikov A.G., "O razreshimosti sil'no nelineynogo uravneniya psevdoparabolicheskogo tipa s dvoynoy nelineynost'yu. [On the solvability of a strongly nonlinear equation of pseudoparabolic type with double nonlinearity]" , *ZH. vychisl. mat. mat. fiz.* **43**:7(2003), 944-962 [in Russian].

[14] Sveshnikov G., Al'shin A. B., Korpusov M. O., PletnerYU.D., *Lineynyye i nelineynyye uravneniya sobolevskogo tipa [Pletner, Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type]* (M.: Fizmatlit, 2007) [in Russian].

[15] Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P., *Rezhimy s obostreniyem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy [Regimes with Peaking in Problems for Quasilinear Parabolic Equations]* (M.: Nauka, 1987) [in Russian].

[16] S.N. Antontsev, Kh. Khompysh, "Kelvin-Voigt equation with p-Laplacian and damping term: Existence, uniqueness and blowup" , *Mathematical Analysis and Applications* **446**(2017), 1255-1273.

[17] S.N. Antontsev, Kh. Khompysh, "Generalized Kelvin–Voigt equations with p-Laplacian and source/absorption terms" , *Mathematical Analysis and Applications* **456**(2017), 99-116.

[18] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh, "Kelvin-Voigt equations perturbed by anisotropic relaxation, diffusion and damping" , *Mathematical Analysis and Applications* **473**(2019), 1122-1154.

[19] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh, "Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids" , *Communications in Mathematical Sciences* **17**:7(2019), 1915-1948.

[20] A.I. Kozhanov, N.S. Popov, "O razreshimosti nekotorykh zadach so smeshcheniyem dlya psevdoparabolicheskikh uravneniy [On the solvability of some displacement problems for pseudoparabolic equations]" , *Vestnik NGU. Ser. matem., mekh., inform.* **1**:3(2010), 46-62 [in Russian].

[21] Sh. Amirov, A., I. Kozhanov, "Razreshimost' smeshannoy zadachi dlya nekotorykh sil'no nelineynykh uravneniy sobolevskogo tipa vysokogo poryadka [Solvability of the mixed problem for some highly nonlinear high-order sobolev type equations]" , *Sib. zhurn. industr. matem.* **17**:4(2014), 14-30 [in Russian].

[22] A.I. Kozhanov, "Krayevyye zadachi dlya uravneniy sobolevskogo tipa s neobratimym operatorom pri starshey proizvodnoy [Boundary value problems for Sobolev type equations with an irreversible operator for the highest derivative]", *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i yeye pril.* **167**(2019), 34-41 [in Russian].

[23] Demidovich B.P., *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti [Lectures on the mathematical theory of stability]* (M.: Nauka, 1967) [in Russian].

[24] Lions ZH.-L., *Nekotoryye metody resheniya nelineynykh krayevykh zadach [Some methods for solving nonlinear boundary value problems]* (M.: Nauka, 1972, 588 pp.) [in Russian].