УДК 517.938

С.А. Айсагалиев

Механико-математический факультет, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан; e-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

К решению уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в неограниченной области *

Предлагается метод построения решения уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в неограниченной области при заданном начальном условии. Отличительная особенность предлагаемого подхода к решению задачи состоит в том, что исходное уравнение движения жидкости путем введения трех вспомогательных непрерывных ограниченных и абсолютно интегрируемых функции разделяется на части. Первая часть уравнения движения жидкости является системой трех неоднородных уравнений параболического типа, соответствующих трем проекциям скорости жидкости, а вторая часть уравнения движения жидкости содержит компоненты конвективного ускорения, обусловленного неоднородностью поля скоростей, напряженностью поля массовых сил и градиента давления.

Из условия неразрывности движения жидкости, на основе построения общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода, определяются все множества трех вспомогательных функций, обеспечивающие равенство нулю дивергенции скорости жидкости. Без потерь каких-либо решений можно объединить обе части уравнения движения жидкости и отождествлять с исходным уравнением Навье-Стокса, и получить систему уравнений относительно компоненты градиента давления. Таким образом, определяются в аналитическом виде давление и компоненты скорости движения жидкости.

Ключевые слова: Уравнения Навье-Стокса, скорость жидкости, давление жидкости, уравнение Фредгольма первого рода, неоднородные уравнения параболического типа, дивергенция, градиент.

S.A. Aisagaliev

To the solution of Navier-Stokes equation for viscous incompressible fluid in unrestricted area

The method of Navier-Stokes equation solution construction for viscous incompressible fluid in unrestricted area with a given initial condition is developed. A distinction of the developed approach to problem solving is a given equation of fluid motion is separated into three parts by introduction of a three auxiliary continuous restricted and absolutely integrable functions. The first part of the equation of fluid motion is a system of a three heterogeneous parabolic equations, corresponding to three foots of fluid velocity, and the second part of the equation of fluid motion includes components of convection acceleration conditioned by

*Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 1619/ГФ, 2012г.-2014г.

heterogeneity of field of velocities, intensity of the field of the mass forces and a gradient of pressure.

The set of all three auxiliary functions ensuring the divergence of the velocity of the liquid equality to zero is defined from the condition of fluid motion continuousness on the base of general solution construction for Fredholm integral equation of the first kind. The both parts of the equation of fluid motion can be combined and identified with the given Navier-Stokes equation without any solution losses. In the result a system of equations with respect to the component of pressure gradient is obtained. Thereby the pressure and components of fluid flow velocity is defined in a analitycal form.

Key words: {Navier-Stokes equation, the speed of the fluid, the fluid pressure, Fredholm equation of the first kind, the inhomogeneous equation of parabolic type, divergence, gradient.}

С.Ә. Айсағалиев

Үшінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулердің бір классы үшін Коши есебі

Шектелмеген жиында тұтқырлы сығылмайтын сұйықтық үшін бастапқы шарты берілген Навье-Стокс теңдеуінің шешімін құру әдісі ұсынылады. Есепті шешудің ұсынылып отырған әдісінің ерекшелігі үзіліссіз шектеулі және абсолютті интегралданатын үш көмекші функцияны енгізу арқылы сұйықтықтың қозғалысының берілген теңдеуі бөліктерге бөлінеді. Сұйықтықтың қозғалыс теңдеуінің бірінші бөлігі сұйықтықтың жылдамдығының үш проекциясына сәйкес біртексіз параболалық типті үш теңдеудің жүйесі болып табылады, ал сұйықтықтың қозғалыс теңдеуінің екінші бөлігі жылдамдықтар өрісінің біртексіздігі, массалық күш өрістерінің кернеулілігі шарттарындағы конвективті үдеудің компоненттері мен қысым градиентін қамтиды.

Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің жалпы шешімін құру негізінде сұйықтықтың қозғалысының үзіліссіздігі шартынан сұйықтық жылдамдығы дивергенциясының нөлге тең болуын қамтамасыз ететін барлық көмекші үш функцияның жиыны анықталады.

Ешбір шешімді жоғалтпай сұйықтықтың қозғалыс теңдеуінің екі бөлігін біріктіріп және бастапқы Навье-Стокс теңдеуімен теңестіріп, қысым градиенті компоненталарына қатысты теңдеулер жүйесін алуға болады. Осылайша, қысым және сұйықтық қозғалысы жылдамдығының компоненттері аналитикалық түрде анықталады.

Түйін сөздер: {Навье-Стокс теңдеуі, сұйықтың жылдамдығы, сұйықтың қысымы, Фредгольмнің бірінші текті теңдеуі, параболалық типтегі біртекті емес теңдеулер, дивергенция, градиент.}

Введение. Состояние движущейся жидкости определяется заданием пяти величин: трех компонентов скорости $\mathbf{V}(x, y, z, t)$, давления $p(x, y, z, t)$ и плотности $\rho(x, y, z, t)$. В механике жидкости ее молекулярное строение не рассматривается, предполагается, что жидкость заполняет пространство сплошь, вместо самой жидкости изучается ее модель, фиктивная сплошная среда, обладающая свойством непрерывности. Такой подход упрощает исследование, все механические характеристики жидкой среды (скорость, давление, плотность) предполагаются непрерывными и дифференцируемыми.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье-Стокса) в проекциях на оси координат по компонентам скорости имеют вид [1]

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} - v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} - v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} - v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right), \tag{3}$$

где $\mathbf{V}(x,y,z,t) = v_x(x,y,z,t)\cdot\mathbf{i} + v_y(x,y,z,t)\cdot\mathbf{j} + v_z(x,y,z,t)\cdot\mathbf{k}$, величины x,y,z,t – называются переменными Эйлера, $\mathbf{F}(x,y,z,t) = F_x(x,y,z,t)\mathbf{i} + F_y(x,y,z,t)\mathbf{j} + F_z(x,y,z,t)\mathbf{k}$ – напряженность поля массовых сил. $grad\ p = \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{k}$, $p = p(x,y,z)$, ∇ – оператор "набла" , ρ – плотность жидкости, ν – кинематическая вязкость жидкости, **i, j, k** – орты.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости $\left(\frac{d\rho}{dt} = 0\right)$:

$$div\mathbf{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \ \ \forall(x,y,z), \ \ \forall t. \tag{4}$$

Основной задачей гидродинамики является нахождение следующих функций координат и времени:

$$v_x = f_1(x,y,z,t), \ \ v_y = f_2(x,y,z,t), \ \ v_z = f_3(x,y,z,t), \ \ p = f_4(x,y,z,t), \tag{5}$$

при заданных начальных условиях ($\rho = const > 0$)

$$v_x|_{t=0} = f_1(x,y,z,0), \ \ v_y|_{t=0} = f_2(x,y,z,0), \ \ v_z|_{t=0} = f_3(x,y,z,0), \tag{6}$$

и заданных граничных условиях.

Нахождение в аналитическом виде решения системы дифференциальных уравнений (1)-(3) при условии (4) сопряженно с непреодолимыми трудностями. Известные результаты относятся к простейшим случаям движения.

Существованию и единственности решения системы (1)-(4) посвящены монографии [2-4]

В данной статье делается попытка построения решения (5) системы (1)-(4) в аналитическом виде для начальной задачи, полагая, что система (1)-(4) при условиях (6) имеет решение в неограниченной области $(x,y,z) \in R^3$, $t \in T = \{t \in R^1 \ / \ t > 0\}$.

1. Постановка задачи

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (1)-(4), апробированные на практике, адекватно отражают физическое явление в жидкостях и являются корректной математической моделью. Поэтому уравнения движения (1)-(3) и неразрывности (4) достаточны для решения основной задачи гидродинамики, когда $v_x(x,y,z,t)$, $v_y(x,y,z,t)$, $v_z(x,y,z,t)$ – непрерывно дифференцируемые функции по t и дважды непрерывно дифференцируемые функции по переменным x,y,z, в области $(x,y,z) \in \Omega = R^3$, $t \in T = \{t \in R^1 \ / \ t > 0\}$, т.е.

$$v_x(x,y,z,t) \in C^{2,2,2,1}_{x,y,z,t}(\Omega \times T), \ \ v_y(x,y,z,t) \in C^{2,2,2,1}_{x,y,z,t}(\Omega \times T), \ \ v_z(x,y,z,t) \in C^{2,2,2,1}_{x,y,z,t}(\Omega \times T).$$

Полагаем, что $F_x(x,y,z,t)$, $F_y(x,y,z,t)$, $F_z(x,y,z,t)$ – заданные непрерывные функции в области $\Omega\times T$, т.е.

$$F_x(x,y,z,t)\in C_{x,y,z,t}(\Omega\times T),\ \ F_y(x,y,z,t)\in C_{x,y,z,t}(\Omega\times T),\ \ F_z(x,y,z,t)\in C_{x,y,z,t}(\Omega\times T),$$

и функции

$$p_x(x,y,z,t)=\frac{\partial\rho}{\partial x}\in C_{x,y,z,t},\ \ p_y(x,y,z,t)=\frac{\partial\rho}{\partial y}\in C_{x,y,z,t},\ \ p_z(x,y,z,t)=\frac{\partial\rho}{\partial z}\in C_{x,y,z,t}.$$

В классической формулировке начальная задача для уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в неограниченной области $\Omega\times T$ имеет вид: найти функции $v_x(x,y,z,t):\Omega\times T\to R^1$, $v_y(x,y,z,t):\Omega\times T\to R^1$, $v_z(x,y,z,t):\Omega\times T\to R^1$, такие, что они удовлетворяют уравнениям (1)-(3) в $\Omega\times T$ и уравнению неразрывности (4) при заданных начальных условиях (6), где

$$f_i(x,y,z,0)\in C(\Omega),\ \ |f_i(x,y,z,0)|\le c_i,\ \ c_i=const>0,\ \ i=1,2,3.$$

Предлагаемый метод решения указанной задачи получен на основе работ автора, опубликованных в [5-7].

Для простоты изложения полученных результатов, ниже приведено регулярное решение уравнения Навье-Стокса.

2. Системы параболических уравнений

Предположим, что известны решения системы (1)-(4) с начальным условием (6). Тогда

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\omega(x,y,z,t), \tag{7}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\mu(x,y,z,t), \tag{8}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)+\theta(x,y,z,t), \tag{9}$$

где

$$\omega(x,y,z,t)=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}-v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}-v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}, \tag{10}$$

$$\mu(x,y,z,t)=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}-v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}-v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}, \tag{11}$$

$$\theta(x,y,z,t)=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}-v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}-v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{12}$$

при всех $(x,y,z)\in\Omega=R^3$, $t\in T$.

Пусть функции $U(x,y,z,t)\in C^{2,2,2,1}(\Omega\times T)$, $V(x,y,z,t)\in C^{2,2,2,1}(\Omega\times T)$, $W(x,y,z,t)\in$ $\in C^{2,2,2,1}(\Omega\times T)$ – решения следующих уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)+\omega_1(x,y,z,t), \tag{13}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) + \mu_1(x,y,z,t), \tag{14}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right) + \theta_1(x,y,z,t), \tag{15}$$

с начальными условиями

$$U|_{t=0} = f_1(x,y,z,0), \quad V|_{t=0} = f_2(x,y,z,0), \quad W|_{t=0} = f_3(x,y,z,0), \tag{16}$$

в области $(x,y,z) \in \Omega = R^3$, $t \in T$.

Здесь $\omega_1(x,y,z,t) \in C_{x,y,z,t}(\Omega \times T)$, $\mu_1(x,y,z,t) \in C_{x,y,z,t}(\Omega \times T)$, $\theta_1(x,y,z,t) \in C_{x,y,z,t}(\Omega \times T)$ – неизвестные ограниченные абсолютно интегрируемые непрерывные функции. В частности, если $\omega_1(x,y,z,t) = \omega(x,y,z,t)$, $\mu_1(x,y,z,t) = \mu(x,y,z,t)$, $\theta_1(x,y,z,t) = \theta(x,y,z,t)$, то $U(x,y,z,t) = v_x(x,y,z,t)$, $V(x,y,z,t) = v_y(x,y,z,t)$, $W(x,y,z,t) = v_z(x,y,z,t)$ при $(x,y,z) \in \Omega$, $t \in T$.

Системы параболических уравнений (13)-(15) с начальными условиями (16) имеют решения [8, 9]:

$$\begin{aligned} U(x,y,z,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\sqrt{\nu\pi t})^3} f_1(\xi,\eta,\zeta) e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4\nu t}} d\xi d\eta d\zeta + \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_1(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{(2\sqrt{\pi\nu(t-\tau)})^3} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4\nu(t-\tau)}} d\xi d\eta d\zeta d\tau \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} V(x,y,z,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(\xi,\eta,\zeta)}{(2\sqrt{\nu\pi t})^3} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4\nu t}} d\xi d\eta d\zeta + \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_1(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{(2\sqrt{\pi\nu(t-\tau)})^3} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4\nu(t-\tau)}} d\xi d\eta d\zeta d\tau \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} W(x,y,z,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_3(\xi,\eta,\zeta)}{(2\sqrt{\nu\pi t})^3} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4\nu t}} d\xi d\eta d\zeta + \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta_1(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{(2\sqrt{\pi\nu(t-\tau)})^3} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4\nu(t-\tau)}} d\xi d\eta d\zeta d\tau \end{aligned} \tag{19}$$

Вводя обозначения

$$G(x,y,z,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi\nu t})^3} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4\nu t}}, \quad d\sigma = d\xi d\eta d\zeta,$$

решения (17)-(19) запишем в виде

$$U(x,y,z,t) = \int_\Omega G(x,y,z,t,\sigma) f_1(\sigma) d\sigma + \int_0^t \int_\Omega G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\omega_1(\sigma,\tau) d\sigma d\tau, \tag{20}$$

$$V(x,y,z,t) = \int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t,\sigma) f_2(\sigma) d\sigma + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\mu_1(\sigma,\tau) d\sigma d\tau, \qquad (21)$$

$$W(x,y,z,t) = \int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t,\sigma) f_3(\sigma) d\sigma + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\theta_1(\sigma,\tau) d\sigma d\tau, \qquad (22)$$

где $\Omega = R^3$, $\sigma = (\xi,\eta,\zeta)$.

Отметим, что $\omega_1(\sigma,\tau)$, $\mu_1(\sigma,\tau)$, $\theta_1(\sigma,\tau)$ – неизвестные ограниченные абсолютно интегрируемые непрерывные функции в $\sigma \in \Omega$, $\tau \in \{0 \le \tau < t,\ \ t \in T\} = T_1$.

3. Интегральное уравнение

Определим неизвестные функции $\omega_1(\sigma,\tau)$, $\mu_1(\sigma,\tau)$, $\theta_1(\sigma,\tau)$, $\sigma \in \Omega$, $\tau \in T_1$ из условия

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial V(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial W(x,y,z,t)}{\partial z} = 0, \\ &\forall (x,y,z) \in \Omega, \ \ \forall t \in T, \end{aligned} \qquad (23)$$

где $U(x,y,z,t)$, $V(x,y,z,t)$, $W(x,y,z,t)$, определяются выражениями (20)-(22), как решения системы параболических уравнений (13)-(15) с начальными условиями (16). Поскольку

$$\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial x} = \int\limits_{\Omega} G_x(x,y,z,t,\sigma) f_1(\sigma) d\sigma + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma)\omega_1(\sigma,\tau) d\sigma d\tau,$$

$$\frac{\partial V(x,y,z,t)}{\partial y} = \int\limits_{\Omega} G_y(x,y,z,t,\sigma) f_2(\sigma) d\sigma + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma)\mu_1(\sigma,\tau) d\sigma d\tau,$$

$$\frac{\partial W(x,y,z,t)}{\partial z} = \int\limits_{\Omega} G_z x,y,z,t,\sigma) f_3(\sigma) d\sigma + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)\theta_1(\sigma,\tau) d\sigma d\tau,$$

то условие (23) запишется в виде

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \Big[G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma)\omega_1(\sigma,\tau) + G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma)\mu_1(\sigma,\tau) + \\ &+ G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)\theta_1(\sigma,\tau) \Big] d\sigma d\tau = -\int\limits_{\Omega} \Big[G_x(x,y,z,t,\sigma) f_1(\sigma) + \\ &+ G_y(x,y,z,t,\sigma) f_2(\sigma) + G_y(x,y,z,t,\sigma) f_3(\sigma) \Big] d\sigma, \end{aligned} \qquad (24)$$

где $G_x = \frac{\partial G}{\partial x}$, $G_y = \frac{\partial G}{\partial y}$, $G_z = \frac{\partial G}{\partial z}$.

Таким образом, искомые функции $\omega_1(\sigma,\tau)$, $\mu_1(\sigma,\tau)$, $\theta_1(\sigma,\tau)$ являются решением интегрального уравнения (24). Введем следующие обозначения:

$$f(\sigma)=\begin{pmatrix}f_1(\sigma)\\ f_2(\sigma)\\ f_3(\sigma)\end{pmatrix},\quad \Lambda(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}\omega_1(\sigma,\tau)\\ \mu_1(\sigma,\tau)\\ \theta_1(\sigma,\tau)\end{pmatrix},\quad P(x,y,z,t,\sigma)=$$

$$=\big(G_x(x,y,z,t,\sigma),\quad G_y(x,y,z,t,\sigma),\quad G_z(x,y,z,t,\sigma)\big).$$

Теперь интегральное уравнение (24) можно представить в векторной форме как

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Lambda(\sigma,\tau)d\sigma d\tau=-\int\limits_\Omega P(x,y,z,t)f(\sigma)d\sigma, \tag{25}$$

где $P(x,y,z,t-\tau,\sigma)$ – известная вектор-строка 1×3, $f(\sigma)$ – известная вектор-функция 3×1, $\Lambda(\sigma,\tau)$ – искомая вектор-функция 3×1.

Заметим, что

$$R(x,y,z,t)=-\int\limits_\Omega P(x,y,z,t,\sigma)f(\sigma)d\sigma \tag{26}$$

– известная функция, где $(x,y,t)\in\Omega$, $t\in T$. Из (25), (26) имеем

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Lambda(\sigma,\tau)d\sigma d\tau=R(x,y,z,t), \tag{27}$$

где $\Lambda(\sigma,\tau)$ – неизвестная вектор-функция.

Теорема 1 *Пусть* $t\in T=\{t\in R^1\ /\ t>0\}$, $0\le\tau<t$, *функция*

$$\Gamma(x,y,z,t)=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau>0 \tag{28}$$

для любых $(x,y,t)\in\Omega$, $t\in T$. *Тогда интегральное уравнение (27) имеет решение для любой ограниченной непрерывной функции* $R(x,y,z,t)$ *в области* $(x,y,t)\in\Omega$, $t\in T$, *где* $(*)$ *– знак транспонирования.*

Доказательство. Выберем, в частности, $\Lambda(\sigma,\tau){=}P^*(x,y,z,t{-}\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)\times\times R(x,y,z,t)$. Тогда

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Lambda(\sigma,\tau)d\sigma d\tau=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau\times$$

$$\times\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t)=R(x,y,z,t),\quad (x,y,z)\in\Omega,\quad t\in T.$$

Следовательно, $\Lambda(\sigma,\tau)=P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t)$ – является решением интегрального уравнения (27). Теорема доказана.

Теорема 2 *Пусть* $\Gamma(x,y,z,t) > 0$, $\forall(x,y,z) \in \Omega$, $\forall t \in T$. *Тогда общее решение интегрального уравнения (27) имеет вид*

$$\Lambda(\sigma,\tau) = P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t) + \chi(\sigma,\tau) -$$
$$-P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma) + \chi(\sigma,\tau)d\sigma d\tau, \tag{29}$$

где $\chi(\sigma,\tau)$, $\sigma \in \Omega$, $0 \le \tau < t$ *– любая ограниченная абсолютно интегрируемая непрерывная функция.*

Доказательство. Введем следующие множества

$$M = \Big\{\Lambda(\sigma,\tau) \in C(\Omega\times T_1) \;/\; \int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Lambda(\sigma,\tau)d\sigma d\tau = R(x,y,z,t),$$
$$\forall(x,y,z),\;\; (x,y,z)\in\Omega,\;\; \forall t,\; t\in T,\;\; \tau\in T_1 = \{0\le\tau<t\}\Big\}, \tag{30}$$

$$N = \{\Lambda(\sigma,\tau) \in C(\Omega\times T_1) \;/\; \Lambda(\sigma,\tau) = P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t) +$$
$$+\chi(\sigma,\tau) - P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi(\sigma,\tau)d\sigma d\tau, \tag{31}$$
$$\forall\chi(\sigma,\tau),\;\; \chi(\sigma,\tau)\in C(\Omega\times T_1)\},$$

где множество M содержит все решения интегрального уравнения (27), функция $\Gamma(x,y,z,t) > 0$ – определяется по формуле (28). Теорема утверждает, что функция $\Lambda(\sigma,\tau){\in}C(\Omega\times T_1)$ принадлежит множеству M тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству N, т.е. $M = N$.

Докажем, что $M = N$. Для этого достаточно показать, что: а) $N \subseteq M$; б) $M \subseteq N$. Покажем, что $N \subseteq M$. В самом деле, если $\Lambda(\sigma,\tau) \in N$, то, как следует из (30), верно равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Lambda(\sigma,\tau)d\sigma d\tau = \int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)\times$$
$$\times\Big[P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t) + \chi(\sigma,\tau) -$$
$$-P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi(\sigma,\tau)d\sigma d\tau\Big]d\sigma d\tau =$$
$$= \int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t) +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi(\sigma,\tau)d\sigma d\tau - \int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau\times$$

$$\times\Gamma^{-1}(x,y,z,t)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi(\sigma,\tau)d\sigma d\tau = R(x,y,z,t)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi(\sigma,\tau)d\sigma d\tau - \int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi(\sigma,\tau)d\sigma d\tau = R(x,y,z,t).$$

Отсюда следует, что $\Lambda(\sigma,\tau)\in M$. Следовательно, множество $N\subseteq M$.

Покажем, что $M\subseteq N$. Пусть $\Lambda_*(\sigma,\tau)\in M$, т.е. для функции $\Lambda_*(\sigma,\tau)\in M$ выполнено равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Lambda_*(\sigma,\tau)d\sigma d\tau = R(x,y,z,t).$$

Заметим, что в соотношении (31) функция $\chi(\sigma,\tau)$ произвольная. В частности, можно выбрать $\chi(\sigma,\tau)=\Lambda_*(\sigma,\tau)$. Теперь функция $\Lambda(\sigma,\tau)\in N$ запишется в виде

$$\Lambda(\sigma,\tau) = P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t)+\Lambda_*(\sigma,\tau)-$$

$$-P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega P(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Lambda_*(\sigma,\tau)d\sigma d\tau =$$

$$= P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t)+\Lambda_*(\sigma,\tau)-$$

$$-P^*(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t) = \Lambda_*(\sigma,\tau).$$

Следовательно, $\Lambda_*(\sigma,\tau)=\Lambda(\sigma,\tau)\in N$. Отсюда следует, что $M\subseteq N$. Из включения $N\subseteq M$, $M\subseteq N$ следует $M=N$. Теорема доказана.

Теорема 3 *Пусть $t\in T$, $\tau\in T_1$, $\Gamma(x,y,z,t)>0$, $\forall(x,y,z)\in\Omega$, $t\in T$. Для того, чтобы*

$$\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial x}+\frac{\partial V(x,y,z,t)}{\partial y}+\frac{\partial W(x,y,z,t)}{\partial z}=0,$$

$$\forall(x,y,z)\in\Omega=R^3,\quad \forall t\in T,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}&\omega_1(\sigma,\tau) = G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t)+\chi_1(\sigma,\tau)-\\&-G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\Big[G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_1(\sigma,\tau)+\\&+G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_2(\sigma,\tau)+G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_3(\sigma,\tau)\Big]d\sigma d\tau,\end{aligned}\tag{32}$$

$$\begin{aligned}&\mu_1(\sigma,\tau) = G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t)+\chi_2(\sigma,\tau)-\\&-G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\Big[G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_1(\sigma,\tau)+\\&+G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_2(\sigma,\tau)+G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_3(\sigma,\tau)\Big]d\sigma d\tau,\end{aligned}\tag{33}$$

$$
\begin{aligned}
&\theta_1(\sigma,\tau) = G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t) + \chi_3(\sigma,\tau) - \\
&-G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)\Gamma^{-1}(x,y,z,t)\int_0^t\int_\Omega \Big[G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_1(\sigma,\tau) + \\
&+G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_2(\sigma,\tau) + G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_3(\sigma,\tau)\Big]d\sigma d\tau,
\end{aligned}
\tag{34}
$$

где $\chi(\sigma,\tau) = (\chi_1(\sigma,\tau),\ \chi_2(\sigma,\tau),\ \chi_3(\sigma,\tau))$ *– произвольная ограниченная абсолютно интегрируемая непрерывная функция,* $\sigma \in \Omega = R^3$, $\tau \in T_1$.

Доказательство теоремы следует из утверждения теорем 1, 2 и соотношений (28)-(31).

Теорема 4 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $t \in T$, $\tau \in T_1$, $\Gamma(x,y,z,t) > 0$, $\forall (x,y,z) \in \Omega = R^3$, $t \in T$;

2) $\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z} = 0$, $\forall (x,y,z) \in \Omega = R^3$, $\quad \forall t \in T$.

Тогда решения дифференциальных уравнений (13)-(15) представимы в виде

$$
\begin{aligned}
&U(x,y,z,t) = \int_\Omega G(x,y,z,t,\sigma)f_1(\sigma)d\sigma + \int_0^t\int_\Omega G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\times \\
&\times G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t) + \\
&+\int_0^t\int_\Omega G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_1(\sigma,\tau)d\sigma d\tau - \int_0^t\int_\Omega G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\times \\
&\times G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau\Gamma^{-1}(x,y,z,t)\int_0^t\int_\Omega \Big[G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_1(\sigma,\tau) + \\
&+G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_2(\sigma,\tau) + G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_3(\sigma,\tau)\Big]d\sigma d\tau = \\
&= S(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3);
\end{aligned}
\tag{35}
$$

$$
\begin{aligned}
&V(x,y,z,t) = \int_\Omega G(x,y,z,t,\sigma)f_2(\sigma)d\sigma + \int_0^t\int_\Omega G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\times \\
&\times G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t) + \\
&+\int_0^t\int_\Omega G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_2(\sigma,\tau)d\sigma d\tau - \int_0^t\int_\Omega G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\times \\
&\times G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau\Gamma^{-1}(x,y,z,t)\int_0^t\int_\Omega \Big[G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_1(\sigma,\tau) + \\
&+G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_2(\sigma,\tau) + G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_3(\sigma,\tau)\Big]d\sigma d\tau = \\
&= T(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3);
\end{aligned}
\tag{36}
$$

$$
\begin{aligned}
&W(x,y,z,t)=\int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t,\sigma)f_3(\sigma)d\sigma+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\times\\
&\times G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t)+\\
&+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_3(\sigma,\tau)d\sigma d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\times\\
&\times G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau\Gamma^{-1}(x,y,z,t)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\Big[G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_1(\sigma,\tau)+\\
&+G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_2(\sigma,\tau)+G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi_3(\sigma,\tau)\Big]d\sigma d\tau=\\
&=Q(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3),
\end{aligned}
\tag{37}
$$

где $\chi_1(\sigma,\tau)$, $\chi_2(\sigma,\tau)$, $\chi_3(\sigma,\tau)$ *– произвольные ограниченные абсолютно интегрируемые непрерывные функции.*

Доказательство теоремы следует из утверждения теорем 1-4 и соотношений (20)-(22), (32)-(34).

Теорема 5 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $t\in T$, $\tau\in T_1$, $\Gamma(x,y,z,t)>0$, $\forall(x,y,z)\in\Omega=R^3$, $t\in T$.

2) $\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial y}+\dfrac{\partial W}{\partial z}=0$, $\forall(x,y,z)\in\Omega=R^3$, $\quad\forall t\in T$,

3) $\chi_1(\sigma,\tau)\equiv 0$, $\chi_2(\sigma,\tau)\equiv 0$, $\chi_3(\sigma,\tau)\equiv 0$, $\sigma\in\Omega$, $t\in T_1$.

Тогда решения дифференциальных уравнений (13)-(15) представимы в виде

$$
\begin{aligned}
&U(x,y,z,t)=\int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t,\sigma)f_1(\sigma)d\sigma+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\times\\
&\times G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t)=S_0(x,y,z,t);
\end{aligned}
\tag{38}
$$

$$
\begin{aligned}
&V(x,y,z,t)=\int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t,\sigma)f_2(\sigma)d\sigma+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\times\\
&\times G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t)=T_0(x,y,z,t);
\end{aligned}
\tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
&W(x,y,z,t)=\int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t,\sigma)f_3(\sigma)d\sigma+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t-\tau,\sigma)\times\\
&\times G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau\Gamma^{-1}(x,y,z,t)R(x,y,z,t)=Q_0(x,y,z,t),
\end{aligned}
\tag{40}
$$

где $(x,y,z)\in\Omega$, $t\in T$.

Доказательство теоремы следует из соотношений (35)-(37).

4. Отождествление

Если функции $U(x,y,z,t)$, $V(x,y,z,t)$, $W(x,y,z,t)$ – компоненты вектора $\mathbf{V}(x,y,z,t)$, т.е.

$$\mathbf{V}=U\mathbf{i}+V\mathbf{j}+W\mathbf{k},$$

то

$$div\mathbf{V} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}. \tag{41}$$

Равенство (23) запишется в виде $div\mathbf{V} = 0$. Условие 2) теорем 4, 5 равносильно тому, что $div\mathbf{V} = 0$ (см. (41)).

Лемма 1 *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда*

$$\omega_1(x,y,z,t) = \frac{\partial S}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right). \tag{42}$$

$$\mu_1(x,y,z,t) = \frac{\partial T}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \tag{43}$$

$$\theta_1(x,y,z,t) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right), \tag{44}$$

где $S = S(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3)$, $T = T(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3)$, $Q = Q(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3)$ *определяются формулами (35)-(37) соответственно.*

Лемма 2 *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда*

$$\omega_{10}(x,y,z,t) = \frac{\partial S_0}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial z^2}\right). \tag{45}$$

$$\mu_{10}(x,y,z,t) = \frac{\partial T_0}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}\right). \tag{46}$$

$$\theta_{10}(x,y,z,t) = \frac{\partial Q_0}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 Q_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q_0}{\partial z^2}\right), \tag{47}$$

где $\chi_1(\sigma,\tau) \equiv 0$, $\chi_2(\sigma,\tau) \equiv 0$, $\chi_3(\sigma,\tau) \equiv 0$.

Лемма 3 *Пусть выполнены условия теоремы 4, и пусть, кроме того:*

$$\omega_1(x,y,z,t) = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - S\frac{\partial S}{\partial x} - T\frac{\partial S}{\partial y} - Q\frac{\partial S}{\partial z}, \tag{48}$$

$$\mu_1(x,y,z,t) = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - S\frac{\partial T}{\partial x} - T\frac{\partial T}{\partial y} - Q\frac{\partial T}{\partial z}, \tag{49}$$

$$\theta_1(x,y,z,t) = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - S\frac{\partial Q}{\partial x} - T\frac{\partial Q}{\partial y} - Q\frac{\partial Q}{\partial z}, \tag{50}$$

где $\omega_1(x,y,z,t)$, $\mu_1(x,y,z,t)$, $\theta_1(x,y,z,t)$ *– определяются выражениями (42)-(44) соответственно, функции* $S(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3)$, $T(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3)$, $Q(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3)$ *определяются соотношениями (35)-(37) соответственно. Тогда:*

$$U(x,y,z,t) = S(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3) = v_x(x,y,z,t), \tag{51}$$

$$V(x,y,z,t) = T(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3) = v_y(x,y,z,t), \tag{52}$$

$$W(x,y,z,t) = Q(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3) = v_x(x,y,z,t), \tag{53}$$

где v_x, v_y, v_z *– решения уравнений Навье-Стокса (1)-(3) с начальным условием (6), удовлетворяющие тождеству (4).*

Доказательство. Из (42)-(44) и (48)-(50) следует, что

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right) + F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - S\frac{\partial S}{\partial x} - T\frac{\partial S}{\partial y} - Q\frac{\partial S}{\partial z}, \tag{54}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - S\frac{\partial T}{\partial x} - T\frac{\partial T}{\partial y} - Q\frac{\partial T}{\partial z}, \tag{55}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right) + F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - S\frac{\partial Q}{\partial x} - T\frac{\partial Q}{\partial y} - Q\frac{\partial Q}{\partial z}. \tag{56}$$

Отсюда следует, что функции $S = U$, $T = V$, $R = W$ удовлетворяют уравнениям Навье-Стокса (1), (3) с начальным условием (6). Так как

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

то $v_x = S(x, y, z, t, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$, $v_y = T(x, y, z, t, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$, $v_z = Q(x, y, z, t, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$ – решения уравнений Навье-Стокса (см. (51)-(53)). Лемма доказана.

Лемма 4 *Пусть выполнены условия теоремы 5, и пусть, кроме того:*

$$\omega_{10}(x, y, z, t) = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - S_0\frac{\partial S_0}{\partial x} - T_0\frac{\partial S_0}{\partial y} - Q_0\frac{\partial S_0}{\partial z}, \tag{57}$$

$$\mu_{10}(x, y, z, t) = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - S_0\frac{\partial T_0}{\partial x} - T_0\frac{\partial T_0}{\partial y} - Q_0\frac{\partial T_0}{\partial z}, \tag{58}$$

$$\theta_{10}(x, y, z, t) = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - S_0\frac{\partial Q_0}{\partial x} - T_0\frac{\partial Q_0}{\partial y} - Q_0\frac{\partial Q_0}{\partial z}, \tag{59}$$

где ω_{10}, μ_{10}, θ_{10} – определяются выражениями (45)-(47) соответственно, функции S_0, T_0, Q_0 определяются соотношениями (38)-(40) соответственно.

Тогда:

$$U(x, y, z, t) = S_0(x, y, z, t) = v_{x0}(x, y, z, t), \tag{60}$$

$$V(x, y, z, t) = T_0(x, y, z, t) = v_{y0}(x, y, z, t), \tag{61}$$

$$W(x, y, z, t) = Q_0(x, y, z, t) = v_{x0}(x, y, z, t), \tag{62}$$

где v_{x0}, v_{y0}, v_{z0} – частные решения уравнений Навье-Стокса (1)-(3) с начальным условием (6), удовлетворяющие тождеству (4).

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.

5. Уравнения для давления

Пусть известны проекции $F_x(x, y, z, t)$, $F_y(x, y, z, t)$, $F_z(x, y, z, t)$ – напряженность поля массовых сил. Необходимо найти давление $p = p(x, y, z, t)$, где $grad\ p = \dfrac{\partial p}{\partial x}i + \dfrac{\partial p}{\partial y}j + \dfrac{\partial p}{\partial z}k$.

Лемма 5 *Пусть выполнены условия теоремы 4, и пусть, кроме того, выполнены равенства (48)-(50). Тогда компоненты вектора grad p являются решениями системы:*

$$\frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial x} = \rho[\nu(S_{xx}+S_{yy}+S_{zz}) - S_t + F_x - SS_x - TS_y - QS_z] = \\ = S_1(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3), \tag{63}$$

$$\frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial y} = \rho[\nu(T_{xx}+T_{yy}+T_{zz}) - T_t + F_y - ST_x - TT_y - QT_z] = \\ = T_1(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3), \tag{64}$$

$$\frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial z} = \rho[\nu(Q_{xx}+Q_{yy}+Q_{zz}) - Q_t + F_z - SQ_x - TQ_y - QQ_z] = \\ = Q_1(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3), \tag{65}$$

где $S = S(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3)$, $T = T(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3)$, $Q = Q(x,y,z,t,\chi_1,\chi_2,\chi_3)$ определяются формулами (35)-(37) соответственно, $\rho = const$ – плотность жидкости.

Доказательство леммы следует из теоремы 4, равенств (48)-(50) и тождеств (54)-(60).

6. Решение уравнений Навье-Стокса

Введем следующие обозначения

$$\alpha_1(x,y,z,t) = \int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t) f_1(\sigma) d\sigma +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t-\tau,\sigma) G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma) d\sigma d\tau \Gamma^{-1}(x,y,z,t) R(x,y,z,t),$$

$$\alpha_2(x,y,z,t) = \int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t) f_2(\sigma) d\sigma +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t-\tau,\sigma) G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma) d\sigma d\tau \Gamma^{-1}(x,y,z,t) R(x,y,z,t),$$

$$\alpha_3(x,y,z,t) = \int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t) f_3(\sigma) d\sigma +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t-\tau,\sigma) G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma) d\sigma d\tau \Gamma^{-1}(x,y,z,t) R(x,y,z,t),$$

$$\beta_1(x,y,z,t) = -\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G(x,y,z,t-\tau,\sigma) G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma) d\sigma d\tau \Gamma^{-1}(x,y,z,t),$$

$$\beta_2(x,y,z,t) = -\int_0^t \int_\Omega G(x,y,z,t-\tau,\sigma)G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau \Gamma^{-1}(x,y,z,t),$$

$$\beta_3(x,y,z,t) = -\int_0^t \int_\Omega G(x,y,z,t-\tau,\sigma)G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)d\sigma d\tau \Gamma^{-1}(x,y,z,t),$$

$$\begin{gathered} P_1(x,y,z,t,t-\tau,\sigma) = \big(G(x,y,z,t-\tau,\sigma) + \beta_1(x,y,z,t)G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma), \\ \beta_1(x,y,z,t)G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma),\ \beta_1(x,y,z,t)G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)\big) \end{gathered} \tag{66}$$

$$\begin{gathered} P_2(x,y,z,t,t-\tau,\sigma) = \big(\beta_2(x,y,z,t)G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma),\ G(x,y,z,t-\tau,\sigma)+ \\ +\beta_2(x,y,z,t)G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma),\ \beta_2(x,y,z,t)G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)\big) \end{gathered} \tag{67}$$

$$\begin{gathered} P_3(x,y,z,t,t-\tau,\sigma) = \big(\beta_3(x,y,z,t)G_x(x,y,z,t-\tau,\sigma), \beta_3(x,y,z,t) \\ G_y(x,y,z,t-\tau,\sigma),\ G(x,y,z,t-\tau,\sigma) + \beta_3(x,y,z,t)G_z(x,y,z,t-\tau,\sigma)\big) \end{gathered} \tag{68}$$

Теперь соотношения (34)-(36) могут быть представлены в виде

$$U(x,y,z,t) = \alpha_1(x,y,z,t) + \int_0^t \int_\Omega P_1(x,y,z,t,t-\tau,\sigma)\chi(\sigma,\tau)d\sigma d\tau = S(x,y,z,t,\chi), \tag{69}$$

$$V(x,y,z,t) = \alpha_2(x,y,z,t) + \int_0^t \int_\Omega P_2(x,y,z,t,t-\tau,\sigma)\chi(\sigma,\tau)d\sigma d\tau = T(x,y,z,t,\chi), \tag{70}$$

$$W(x,y,z,t) = \alpha_3(x,y,z,t) + \int_0^t \int_\Omega P_3(x,y,z,t,t-\tau,\sigma)\chi(\sigma,\tau)d\sigma d\tau = Q(x,y,z,t,\chi). \tag{71}$$

Основной результат может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 6 *Уравнения Навье-Стокса (1)-(3) для вязкой несжимаемой жидкости при любых начальных условиях (6) имеют решения, удовлетворяющие уравнению неразрывности (4) в неограниченной области, тогда и только тогда, когда функция* $\Gamma(x,y,z,t)>0$ *для любых* $(x,y,z) \in \Omega = R^3$, $t \in T$, *где* $\Gamma(x,y,z,t)$ *определяется по формуле (27).*

Решения $v_x(x,y,z,t) = S(x,y,z,t,\chi)$, $v_y(x,y,z,t) = T(x,y,z,t,\chi)$, $v_z(x,y,z,t) = Q(x,y,z,t,\chi)$, *в общем случае не единственны и определяются формулами (69)-(71) соответственно.*

Решения $v_x(x,y,z,t) = S_0(x,y,z,t,\chi)$, $v_y(x,y,z,t) = T_0(x,y,z,t,\chi)$, $v_z(x,y,z,t) = Q_0(x,y,z,t,\chi)$ *единственны, если*

$$\begin{gathered} \int_0^t \int_\Omega P_1(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi(\sigma,\tau)d\sigma d\tau \equiv 0, \quad \int_0^t \int_\Omega P_2(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi(\sigma,\tau)d\sigma d\tau \equiv 0 \\ \int_0^t \int_\Omega P_3(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi(\sigma,\tau)d\sigma d\tau \equiv 0, \quad \forall (x,y,z) \in \Omega = R^3, \quad t \in T, \end{gathered} \tag{72}$$

где P_1, P_2, P_3 *определяются формулами (65)-(67) соответственно,* $S_0(x,y,z,t) = \alpha_1(x,y,z,t)$, $T_0(x,y,z,t) = \alpha_2(x,y,z,t)$, $Q_0(x,y,z,t) = \alpha_3(x,y,z,t)$, *определяются формулами (37)-(39).*

$$\pi(x,y,z,t-\tau,\sigma) = \begin{pmatrix} P_1(x,y,z,t-\tau,\sigma) \\ P_2(x,y,z,t-\tau,\sigma) \\ P_3(x,y,z,t-\tau,\sigma) \end{pmatrix},$$

условие (72) запишем в виде интегрального уравнения относительно $\chi(\sigma,\tau)$ так:

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \pi(x,y,z,t-\tau,\sigma)\chi(\sigma,\tau)d\sigma d\tau = 0. \tag{73}$$

Теорема 7 *Уравнения Навье-Стокса (1)-(3) для вязкой несжимаемой жидкости в неограниченной области при любых начальных условиях (6) имеют единственные решения, удовлетворяющие уравнению неразрывности (4) в неограниченной области, тогда и только тогда, когда:*

1) функция $\Gamma(x,y,z,t) > 0$ *для любых* $(x,y,z) \in \Omega = R^3$, $t \in T$;

2) матрица

$$\Delta(x,y,z,t) = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \pi\pi^* d\sigma d\tau, \ \ (x,y,z) \in \Omega = R^3, \ t \in T$$

порядка 3×3 *является положительно определенной, где* $v_x = S_0(x,y,z,t)$, $v_y = T_0(x,y,z,t)$, $v_z = Q_0(x,y,z,t)$.

Компоненты вектора $grad p$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left[\nu(S_{0xx} + S_{0yy} + S_{0zz}) - S_{0t} - S_0 S_{0x} - T_0 S_{0y} - Q_0 S_{0z} + F_x\right],$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\left[\nu(T_{0xx} + T_{0yy} + T_{0zz}) - T_{0t} - S_0 T_{0x} - T_0 T_{0y} - Q_0 T_{0z} + F_y\right],$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho\left[\nu(Q_{0xx} + Q_{0yy} + Q_{0zz}) - Q_{0t} - S_0 Q_{0x} - T_0 Q_{0y} - Q_0 Q_{0z} + F_z\right].$$

Доказательство. Если $\Delta(x,y,z,t) > 0$, $(x,y,z) \in \Omega = R^3$, $t \in T$, то интегральное уравнение (73) имеет решение $\chi(\sigma,\tau) \equiv 0$ (см. доказательство теоремы 1). Следовательно, выполнены условия (72). Теорема доказана.

7. Заключение

На основе результатов исследования в данной статье можно сделать следующее заключение.

Уравнения Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости при заданных начальных условиях, а также с условием неразрывности имеют единственные решения относительно компонентов скорости жидкости (см. теорема 7). Эти единственные решения в аналитическом виде определяются по формулам (60)-(62) (или (38)-(40)).

Основой предлагаемого подхода к построению решения уравнений Навье-Стокса является сведение исходной задачи к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода с последующим построением их общих решений. Для этого необходимо разделение исходного уравнения на две части. Первая часть уравнения движения относится к трем проекциям скорости жидкости с начальными условиями и условием неразрывности. Вторая часть содержит компоненты конвективного ускорения, напряженности поля массовых сил и градиента давления. Компоненты скорости движения жидкости, приведенные в первой части, порождаются обобщенными силами, содержащимися во второй части. Такое разделение приведено в (7)-(12).

Примечательно то, что в случае, когда уравнения движения Навье-Стокса имеют единственные решения относительно компонентов скорости движения при заданных начальных условиях и с условием неразрывности, компоненты обобщенной силы ω, μ, θ определяются однозначно. Именно однозначность значения послужила введению вспомогательных функций U, V, W, порожденных обобщенными силами ω_1, μ_1, θ_1 соответственно.

Научная новизна предлагаемого метода построения решения в аналитическом виде состоит в том, что компоненты обобщенной силы ω_1, μ_1, θ_1 определяются однозначно, когда U, V, W как компоненты вектора скорости удовлетворяют условиям неразрывности и прилипания при заданных начальных условиях. Следовательно, $\omega_1 = \omega$, $\mu_1 = \mu$, $\theta_1 = \theta$ в силу единственности решения уравнения Навье-Стокса. Тогда $v_x = S_0 = S(x, y, z, t)$, $v_y = T_0 = T(x, y, z, t)$, $v_z = Q_0 = Q(x, y, z, t)$ – аналитические решения уравнения Навье-Стокса.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Гидродинамика. – М.: Наука, 1950. – Т. 4 – 735 с.

[2] *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой жидкости несжимаемой жидкости // – М.: Наука, 1970. – 435 с.

[3] *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ // – М.: Мир, 1981. – 386 с.

[4] *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределлеными системами. Теория и приложения // – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 352 с.

[5] *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П., Севрюгин И.В.* К решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода для функции нескольких переменных // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2011. –№ 1 (68). – С. 21-30.

[6] *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П., Севрюгин И.В.* Управление тепловыми процессами // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2012, – № 1(72). – С. 14-26. (Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ Комитета науки МОН РК, грант № 0696 / ГФ, 2012 - 2014 гг.)

[7] *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П.* Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением // Сибирский математический журнал. – 2012, – т. 53, № 1. – С. 20-37.

[8] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики // – М.: Наука, 2004. – 798 с.

[9] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Том второй // – М.: Наука, 1974. – 656 с.

List of references

[1] *Landau L.D., Lifshits E.M.* Teoreticheskaya fizika. Gidrodinamika. – M.: Nauka, 1950. – T. 4 – 735 p.

[2] *Ladyzhenskaya O.A.* Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi zhidkosti neszhimaemoi zhidkosti // – M.: Nauka, 1970. – 435 p.

[3] *Temam R.* Uravneniya Nav'e-Stoksa. Teoriya i chislennyi analiz // – M.: Mir, 1981. – 386 p.

[4] *Fursikov A.V.* Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya // – Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1999. – 352 p.

[5] *Aisagaliev S.A., Belogurov A.P., Sevryugin I.V.* K resheniyu integral'nogo uravneniya Fredgol'ma pervogo roda dlya funktsii neskol'kih peremennyh // Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf. – 2011. –№ 1 (68). – P. 21-30.

[6] *Aisagaliev S.A., Belogurov A.P., Sevryugin I.V.* Upravlenie teplovymi protsessami // Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf. – 2012, – № 1(72). – P. 14-26. (Rabota vypolnena pri podderzhke grantovogo finansirovaniya nauchno-tehnicheskih programm Komiteta nauki MON RK, grant № 0696 / GF, 2012 - 2014 gg.)

[7] *Aisagaliev S.A., Belogurov A.P.* Upravlyaemost' i bystrodeistvie protsessa, opisyvaemogo parabolicheskim uravneniem s ogranichennym upravleniem // Sibirskii matematicheskii zhurnal. – 2012, – t. 53, № 1. – P. 20-37.

[8] *Tihonov A.N., Samarskii A.A.* Uravneniya matematicheskoi fiziki // – M.: Nauka, 2004. – 798 p.

[9] *Smirnov V.I.* Kurs vysshei matematiki. Tom vtoroi // – M.: Nauka, 1974. – 656 p.

Поступила в редакцию 18 февраля 2013 года