

**Р.А. Кайыров**

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан  
e-mail: kairov.rustem@mail.ru

## ЖАҢА ТРИПОД ТҮРДЕГІ 3-PRRS ПАРАЛЛЕЛЬ МАНИПУЛЯТОРДЫҢ КИНЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУЫ

Тұйық кинематикалық тізбек параллель манипулятордың (ПМ) беріктігін жоғарлатып, жетекші түйіндерге түсіретін күшті азайтады. Жоғары жүккөтергіштік пен жақсы динамикалық көрсеткіштер мұндай жүйелерді өндірістің көптеген салаларында қолдануға мүмкіндік береді. Қазіргі кезде тәжірибеде көбінесе Стюарт платформасы негізінде жасалған алты еркіндік дәрежелі, алты аяқты параллель манипуляторлар (гексопод) қолданылады. Мұндай параллель манипулятордың қозғалмалы платформасы алты аяқпен қозғалысқа келтірілетіндіктен оның жұмыс аймағы кіші болады. Параллель роботтың жұмыс аймағының ұлғаюын жылжымалы платформаны тірекпен байланыстыратын аяқтардың санын кеміту арқылы алуға болады. Үш аяқты параллель роботтар (трипод) негізінен үш еркіндік дәрежеге ие болады, яғни олар еркіндік дәрежесі алтыға тең жылжымалы платформаның кеңістіктегі берілген қозғалысын толық қамтамасыз ете алмайды. Жұмыста әрқайсысы PRRS (P - ілгерлемелі, R - айналмалы, S - сфералық кинематикалық жұптар) кинематикалық тізбектен тұратын алты еркіндік дәрежелі және үш аяқты жаңа 3-PRRS трипод түрдегі ПМ ұсынылады. Жұмыстың мақсаты манипулятордың жұмыс аймағын анықтап, жылдамдықтың тура және кері кинематикалық есептерін шешу болып табылады. Айналмалы кинематикалық жұптар берілген ПМ аяқтарының қозғалысына шектеу жасайтындығы белгілі, осыған байланысты қозғалмалы платформаның центрінің кеңістіктегі орны  $X_P, Y_P, Z_P$  мен бағдарын  $\psi, \theta, \varphi$  анықтайтын параметрлердің арасындағы тәуелділіктер ескеріліп, жұмыс аймағы анықталды. Аяқтардың контурларының тұйықталу теңдеулерінен Якоби матрицалары құрылды, айналмалы кинематикалық жұптардың шектеу теңдеулері бойынша ол матрицаларға толықтыру жасау арқылы, жылдамдықтың тура және кері кинематикалық есептері шешілді. Осылайша алты еркіндік дәрежелі жаңа 3-PRRS трипод түрдегі ПМ Стюарт платформасына қарағанда аяқтар саны алтыдан үшке азайтылды және ілгерлемелі кинематикалық жұптарды айналмалы кинематикалық жұптарға алмастыру арқылы жұмыс аймағы ұлғайтылды.

**Түйін сөздер:** трипод, параллель манипулятор, жұмыс аймағы, Якоби матрицасы, контурлардың тұйықталу теңдеуі, кинематикалық талдау.

Р.А. Кайыров

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан  
e-mail: kairov.rustem@mail.ru

### Кинематический анализ нового параллельного манипулятора 3-PRRS типа трипод

Замкнутая кинематическая цепь увеличивает прочность параллельных манипуляторов (ПМ) и снижает нагрузки, приложенные к ведущим звеньям. Высокая грузоподъемность и хорошие динамические показатели позволяют использовать такие системы во многих отраслях промышленности. В настоящее время на практике в основном используются ПМ с шестью степенями свободы и с шестью ногами (гексаподы) на основе платформы Стюарта. Поскольку подвижная платформа такого ПМ приводится в движение шестью ногами, его рабочая зона будет небольшой. Увеличение рабочей зоны параллельного робота можно получить за счет уменьшения количества ног, соединяющих подвижную платформу со стойкой. ПМ с тремя ногами (триподы) обычно имеют три степени свободы, то есть они не могут полностью обеспечить заданное движение мобильной платформы с шестью степенями свободы. В работе представлен новый ПМ 3-PRRS типа трипод с шестью степенями свободы и тремя ногами, каждая из которых состоит из кинематической цепи PRRS (P - поступательные, R - вращательные, S - сферические кинематические пары). Целью работы является определение рабочей зоны и решение прямой и обратной кинематической задачи скорости ПМ. Известно, что вращательные кинематические пары ограничивают движение ног дан-

ного параллельного манипулятора, в связи с этим рабочая зона определялась с учетом зависимости между параметрами, определяющими положение  $X_P, Y_P, Z_P$  и ориентацию  $\psi, \theta, \varphi$  центра движущейся платформы в пространстве. Из уравнений замкнутости контуров кинематических цепей были построены матрицы Якоби, решены прямая и обратная скоростные задачи кинематики путем добавления в матрицу Якоби уравнений ограничения вращательных кинематических пар. Таким образом, в новом ПМ 3-PRRS типа трипод с шестью степенями свободы были уменьшены количество ног с шести до трех по сравнению с платформой Стюарта и увеличена рабочая зона за счет замены поступательных кинематических пар вращательными кинематическими парами.

**Ключевые слова:** трипод, параллельный манипулятор, рабочая зона, матрица Якоби, уравнения замкнутости контуров, кинематический анализ.

R.A. Kaiyrov

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

PhD student, e-mail: kairov.rustem@mail.ru

### Kinematic analysis of a new 3-PRRS tripod type parallel manipulator

The closed kinematic chain increases the strength of the parallel manipulator (PM) and reduces the loads applied to the drive links. High carrying capacity and good dynamic performance allow the use of such systems in many industries. Currently, in practice, mainly PM with six degrees of freedom and six legs (hexapods), based on the Stewart platform, are used. Since the moving platform of such PM is driven by six legs, its workspace will be small. An increase in the workspace of a parallel robot can be obtained by reducing the number of legs connecting the moving platform to the base. PM with three legs (tripods) usually has three degrees of freedom, and, they cannot fully provide a given movement of a moving platform with six degrees of freedom. The paper presents a new 3-PRRS type tripod with six degrees of freedom and three legs, each of which consists of PRRS kinematic chains (P - prismatic, R - revolute, S - spherical kinematic pairs). The purpose of the work is to determine the workspace and to solve the direct and inverse problem of speed of the tripod. It is known that revolute kinematic pairs restrict the movement to the legs of this tripod, therefore, the workspace was determined taking into account the relationship between the parameters that determine the position  $X_P, Y_P, Z_P$  and orientation  $\psi, \theta, \varphi$  of the moving platform center in space. The Jacobi matrixes were derived from the equations of the closed loops, the direct and inverse velocity problems of kinematics are solved by adding the constraints equations of revolute kinematic pairs to the matrix. Thus, in the new PM 3-PRRS type tripod with six degrees of freedom, the number of legs was reduced from six to three compared to the Stewart platform, and the workspace was increased by replacing the prismatic kinematic pairs by revolute kinematic pairs.

**Key words:** tripod, parallel manipulator, workspace, Jacobi matrix, equations for the closed loops, kinematic analysis.

## 1 Кіріспе

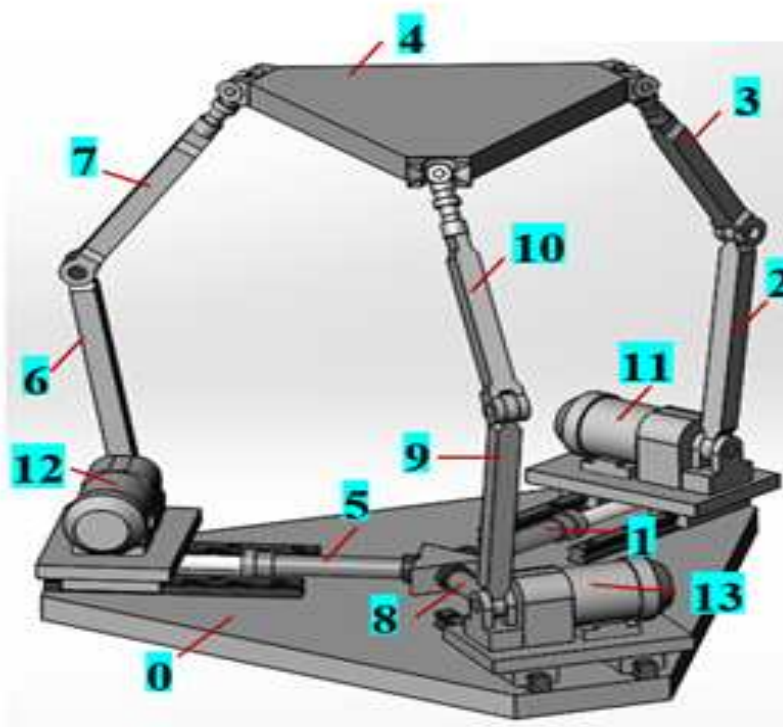
Қазіргі робототехниканың қалпын талдау [1–7] келесіні көрсетіп отыр: заманауи роботтардың көбісінің атқарушы механизмдері (манипуляторлары) ашық (антропоморфты) кинематикалық тізбек түріндегі сериялық манипуляторлар болып табылады. Сериялық манипуляторлар әмбебапты, кең жұмыс аймаққа және жоғары маневрлі болғанымен келесі кемшіліктерге ие: құрылымы арысты болғандықтан олардың қатаңдығы аз, жүккөтергіштігі нашар және позициялау дәлдігі төмен.

Роботтардың кинематикалық сұлбаларын жасаудағы баламалы әдіс ретінде тұйық кинематикалық тізбекке ие параллель манипуляторларды қолдану болып табылады [3, 8–10]. Сериялық манипуляторларға қарағанда параллель манипуляторлардың құрылымы қатаң болады және де жоғары жүккөтергіштікке, позициялаудың жоғары дәлдігіне және елеулі тез әрекеттілікке ие болады.

Белгілі үш аяқты параллель роботтарға жататындар: 3RRR [13–15] түрдегі сфералық

манипулятор (мұндағы R - айналмалы кинематикалық жұп), оның барлық алты айналмалы кинематикалық жұптардың айналу өстері бір нүктеде қиылысады және Дельта робот [16].

Үш аяқты және еркіндік дәрежесі алтыға тең параллель манипуляторлардың кейбір түрлері бар. Оларға әр үш аяғы ESR [17] (мұндағы E - жазықтық кинематикалық жұп), RRPS [18], RES [19], URS [20] (мұндағы U - әмбебап кинематикалық жұп) түріндегі кеңістіктік кинематикалық жұптарға ие параллель манипуляторлар жатады. Осы ПМ жазықтық және әмбебап кинематикалық жұптар қолданылатындықтан олардың құрылымы мен басқару жүйесі күрделі болады. 3RRPS [18] түрдегі ПМ бірінші кіріс айналмалы қозғалыс барлық параллель манипулятордың қозғалмайтын тіректің шеңбері бойынша айналуы арқылы іске асырылады, сондықтан бұл оның құрылымын күрделендіреді.

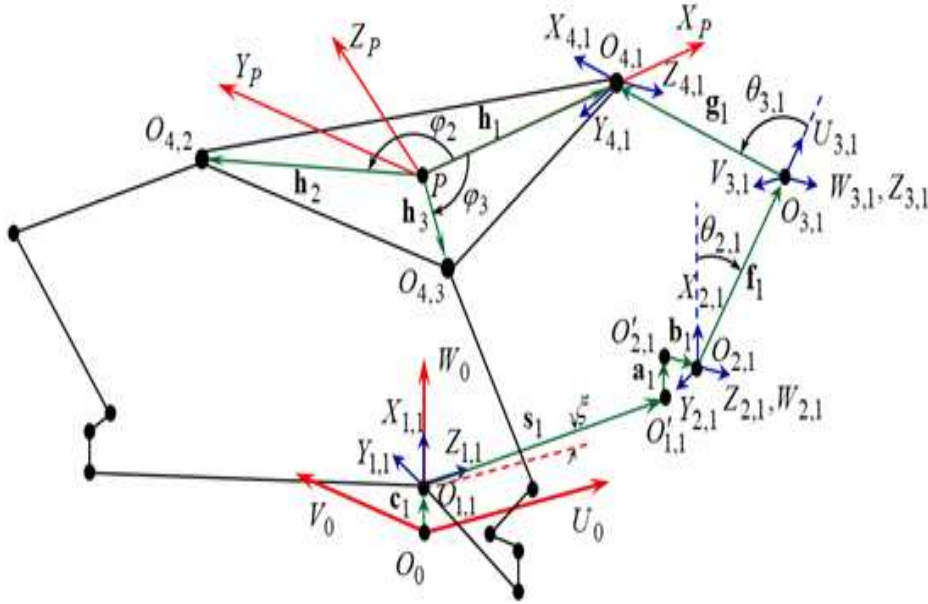


1-сурет - Жаңа трипод түрдегі 3-PRRS параллель манипулятордың 3D моделі

Қарастырылып отырған параллель манипуляторда кіріс ілгерілмелі кинематикалық жұптардың  $120^\circ$  бұрышпен орналасқан үш бағыттауыш бойымен ілгерілмелі қозғалуы гидроцилиндр арқылы іске асырылады. Кіріс кинематикалық жұптардың айналмалы қозғалысы үш гидроцилиндрдің штоктарымен бірге қозғалатын сервоприводтар арқылы іске асырылады. Аяқтарды жылжымалы платформамен біріктіретін сфералық кинематикалық жұптар оның қозғалысын шектемейді. Сондықтан алты жетектеменің қозғалысын басқара отырып қозғалмалы платформаның кез-келген берілген қозғалысын алуға болады.

## 2 Жұмыс аймағы

Негізгі  $O_0U_0V_0W_0$  декарттық координаттар жүйесі үш бұрышты бекітілген 0 платформаның центрінде (Сур.1)  $O_0$  орналасқан. Жергілікті  $PX_PY_PZ_P$  координаттар жүйесі сфералық топсалардың  $O_{4,1}, O_{4,2}, O_{4,3}$  центрі болып табылатын, қозғалмалы 4 платформаның  $P$  нүктесінде бекітілген.



2-сурет - Векторлар мен координаттар жүйелері

Ыңғайлылық үшін бастапқыда негізгі  $O_0U_0V_0W_0$  және жергілікті  $PX_PY_PZ_P$  координаттар жүйелері сәйкес келеді.

Негізгі координаттар жүйесінен сфералық топсалардың центрларына көшу матрицалары [21, 23, 24] жұмыстарда көрсетілген. Түрлендіру матрицаларының параметрлері 1-кестеде көрсетілген.

1-кесте – Түрлендіру матрицаларының параметрлері

$O_0U_0V_0W_0 \rightarrow OX_{1,i}Y_{1,i}Z_{1,i}$	$a_{01} = 0, b_{01} = 0, c_{01} = O_0O_{1,i} = c_i,$ $\alpha_{01} = \frac{\pi}{2}, \beta_{01} = 0, \gamma_{01} = \frac{\pi}{2} + \xi$
$O_{1,i}X_{1,i}Y_{1,i}Z_{1,i} \rightarrow O_{2,i}U_{2,i}V_{2,i}W_{2,i}$	$a_{12} = O'_{1,i}O'_{2,i} = a_i, b_{12} = O'_{2,i}O_{2,i} = b_i,$ $c_{12} = O_{1,i}O'_{1,i} = s_i, \alpha_{12} = \frac{3\pi}{2},$ $\beta_{12} = \theta_{2,i}, \gamma_{12} = \frac{\pi}{2}$
$O_{2,i}U_{2,i}V_{2,i}W_{2,i} \rightarrow O_{3,i}U_{3,i}V_{3,i}W_{3,i}$	$a_{23} = O_{2,i}O_{3,i}, b_{23} = 0, c_{23} = 0,$ $\alpha_{23} = 0, \beta_{23} = \theta_{3,i}, \gamma_{23} = 0$
$O_{3,i}U_{3,i}V_{3,i}W_{3,i} \rightarrow O_{4,i}X_{4,i}Y_{4,i}Z_{4,i}$	$a_{34} = O_{3,i}O_{4,i}, b_{34} = 0, c_{34} = 0,$ $\alpha_{34} = 0, \beta_{34} = 0, \gamma_{34} = 0$
$O_0U_0V_0W_0 \rightarrow O_PX_PY_PZ_P$	$a_{OP}, b_{OP}, c_{OP}, \alpha_{OP}, \beta_{OP}, \gamma_{OP}$

Бірінші кестеде таңдалған координаттар жүйелерінің түрлендіру матрицаларының параметрлері көрсетілген, онда  $s_i$  және  $\theta_{2,i}$  - жалпыланған координаталар,  $\xi$  - бірінші белсенді ілгерлемелі кинематикалық жұп пен  $U_0$  өсінің арасындағы бұрыш.

Берілгендер:

- барлық қозғалатын түйіндердің ұзындықтары  $l_{O_{2,i}O_{3,i}} = f_i, l_{O_{3,i}O_{4,i}} = g_i;$
- $a_{01,i}, b_{01,i}, c_{01,i}, \alpha_{01,i}, \beta_{01,i}, \gamma_{01,i}$ , абсолюттік  $O_0U_0V_0W_0$  координаттар жүйесіне қатысты  $O_{1,i}X_{1,i}Y_{1,i}Z_{1,i}$ , координаттар жүйелерінің орналасуын анықтайтын параметрлер;
- $h_i = l_{O_{4,i}P}$ ,  $\varphi_i$  жергілікті  $PX_PY_PZ_P$  координаттар жүйесіне қатысты сфералық кинематикалық жұптардың  $O_{4,i}$  полярлық координаталары;

- әр аяқтың түйіндер және кинематикалық жұптар геометриясын анықтайтын параметрлер.

Сфералық топсалардың  $O_{4,i}$  координаталары былайша анықталады

$$\left. \begin{aligned} -b_i c\gamma_i + s_i s\gamma_i - f_i s\gamma_i s\theta_{2,i} - g_i s\gamma_i s\theta_{23,i} &= U_{O_{4,i}} \\ -b_i s\gamma_i - s_i c\gamma_i + f_i c\gamma_i s\theta_{2,i} + g_i c\gamma_i s\theta_{23,i} &= V_{O_{4,i}} \\ c_i + a_i + f_i c\theta_{2,i} + g_i c\theta_{23,i} &= W_{O_{4,i}} \end{aligned} \right\}, i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

мұнда,  $\theta_{23,i} = \theta_{2,i} + \theta_{3,i}$ .

Айналмалы топсалардың механикалық шектеулерінің әсерінен параллель манипулятордың аяқтары, яғни RRS диадалары тек қана жазықтықтар бойынша қозғалатындығы белгілі. Сол жазықтықтардың теңдеулерін алу үшін, (1) жүйенің бірінші және екінші теңдеулерін сәйкесінше  $c\gamma_i$  және  $s\gamma_i$  алдын ала көбейту арқылы қосайық

$$c\gamma_i \cdot U_{O_{4i}} + s\gamma_i \cdot V_{O_{4i}} + b_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

ПМ жұмыс аймағын кері кинематикалық есеп бойынша қарастырайық. Қозғалмалы платформаның кеңістіктегі орналасуын келесі кіріс  $\mathbf{q} = [s_1, \theta_{2,1}, s_2, \theta_{2,2}, s_3, \theta_{2,3}]^T$  және шығыс  $\mathbf{X} = [X_P, Y_P, Z_P, \psi, \theta, \varphi]^T$  айнымалылары арқылы анықтауға болады. Біз негізгі санақ жүйесінің  $U_0, V_0$  және  $W_0$  өстеріне қатысты біртіндеп бұрылатын  $\psi, \theta$  және  $\varphi$  Эйлер бұрыштарын [12] қолданамыз. Қозғалмалы платформаның  $PX_P Y_P Z_P$  негізгі  $O_0 U_0 V_0 W_0$  координаттар жүйесіне қатысты қозғалысын келесі  $P = [X_P, Y_P, Z_P]^T$  орналасу векторы және  $3 \times 3$  өлшемді  $R_{OP}$  бұрылу матрицалары арқылы былайша анықтауға болады

$$\mathbf{R}_{OP} = R_y(\theta)R_x(\psi)R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{T}_{OP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ X_P & t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ Y_P & t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ Z_P & t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

мұнда,

$$\begin{aligned} t_{11} &= c\theta c\varphi + s\psi s\theta s\varphi, & t_{12} &= -c\theta s\varphi + s\psi s\theta c\varphi, & t_{13} &= c\psi s\theta, \\ t_{21} &= c\psi s\varphi, & t_{22} &= c\psi c\varphi, & t_{23} &= -s\psi, \\ t_{31} &= -s\theta c\varphi + s\psi c\theta s\varphi, & t_{32} &= s\theta s\varphi + s\psi c\theta c\varphi, & t_{33} &= c\psi c\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Сфералық топсалардың координаталары былайша анықталады

$$\begin{bmatrix} 1 \\ U_{O_{41}} \\ V_{O_{41}} \\ W_{O_{41}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{OP} \begin{bmatrix} 1 \\ h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ U_{O_{42}} \\ V_{O_{42}} \\ W_{O_{42}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{OP} \begin{bmatrix} 1 \\ -h/2 \\ h \cdot \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ U_{O_{43}} \\ V_{O_{43}} \\ W_{O_{43}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{OP} \begin{bmatrix} 1 \\ -h/2 \\ -h \cdot \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

(6)-теңдеулерден (2), (4) және (5) ескеру арқылы қозғалмалы платформаның қозғалысының шектелу теңдеулерін анықтаймыз

$$\left. \begin{aligned} (X_P + h \cdot t_{11})c\gamma_1 + (Y_P + h \cdot t_{21})s\gamma_1 + b &= 0 \\ \left[ X_P + \frac{h}{2}(\sqrt{3}t_{12} - t_{11}) \right] c\gamma_2 + \left[ Y_P + \frac{h}{2}(\sqrt{3}t_{22} - t_{21}) \right] s\gamma_2 + b &= 0 \\ \left[ X_P - \frac{h}{2}(\sqrt{3}t_{12} + t_{11}) \right] c\gamma_3 + \left[ Y_P - \frac{h}{2}(\sqrt{3}t_{22} + t_{21}) \right] s\gamma_3 + b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

мұнда,  $\xi - U_0$  мен  $s_1$  векторларының оң бағыттарының арасындағы бұрыш,  $\gamma_1 = \frac{\pi}{2} + \xi$ ,  $\gamma_2 = \frac{3\pi}{2} + \xi$ ,  $\gamma_3 = \xi - \frac{\pi}{6}$ ,  $\xi = s^{-1}(b/h)$ .

(7)-теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуінен үшінші теңдеуін сәйкесінше алдын ала  $s\gamma_2$  және  $s\gamma_3$  көбейту арқылы азайтатын болсақ,  $X_P$  былайша анықталады

$$X_P = \frac{h}{2} [t_{11} + (3 - 4c^2\xi)t_{22}] + hs(2\xi)t_{12} - 2bs\xi \quad (8)$$

Дәл осылай (7)-теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуінен үшінші теңдеуін сәйкесінше алдын ала  $s\gamma_2$  және  $s\gamma_3$  бөлу арқылы азайтатын болсақ,  $Y_P$  анықтаймыз

$$Y_P = \frac{h}{2} [t_{21} + (1 - 4c^2\xi)t_{12}] - hs(2\xi)t_{22} - 2bc\xi \quad (9)$$

(7)-теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуінен (8) және (9) ескере отырып келесі теңдеуді аламыз

$$(t_{11} + t_{22})s\xi + (t_{12} - t_{21})c\xi = \frac{2b}{h} \quad (10)$$

(10)-теңдеуден (5) теңдеуді ескере отырып келесі теңдеуді аламыз

$$Ac\varphi + Bs\varphi - \frac{2b}{h} = 0, \quad (11)$$

мұнда,  $A = (c\psi + c\theta)s\xi + s\psi s\theta c\xi$ ,  $B = s\psi s\theta s\xi - (c\psi + c\theta)c\xi$ .

(11)-теңдеуден ПМ әр аяғының екі құрастырылуына сәйкес шешімдер аламыз,

$$\varphi_{1,2} = \pm c^{-1} \left( \frac{C}{r} \right) + \alpha, \quad (12)$$

мұнда,  $\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{B}{A} \right)$ ,  $r = \sqrt{A^2 + B^2}$ .

Біз RRS диадалардың оң жақ құрастырылуына сәйкес келетін шешімді қолданамыз.

Осылайша,  $Z_P$ ,  $\psi$  және  $\theta$  тәуелсіз айнымалыларды беру арқылы (8), (9) және (12) теңдеулерден  $X_P$ ,  $Y_P$  және  $\varphi$  тәуелді параметрлерді анықтаймыз.

(6)-теңдеуден сфералық топсалардың координаталарын былайша анықтаймыз

$$\begin{aligned} W_{O_{4,1}} &= Z_P - h \cdot t_{31}, & W_{O_{4,2}} &= Z_P + \frac{h}{2} \cdot t_{31} - \frac{h\sqrt{3}}{2} \cdot t_{32}, \\ W_{O_{4,3}} &= Z_P + \frac{h}{2} \cdot t_{31} + \frac{h\sqrt{3}}{2} \cdot t_{32}. \end{aligned} \quad (13)$$

(3)-матрицаның белгілі қасиеттеріне байланысты келесі теңдік орынды

$$\left. \begin{aligned} t_{31} &= \pm \sqrt{1 - t_{11}^2 - t_{21}^2} \\ t_{32} &= \pm \sqrt{1 - t_{12}^2 - t_{22}^2} \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Сфералық топсалардың  $U_{O_{4,i}}$ ,  $V_{O_{4,i}}$  нүктелеріне (14) теңдік орындалатындай  $W_{O_{4,i}}$  координаталарының келесі төрт комбинациясы сәйкес келеді  $(+t_{31}, +t_{32}; -t_{31}, -t_{32}; +t_{31}, -t_{32}; -t_{31}, +t_{32})$ . Осы мәндердің ішінде тек қана алғашқы екеуі  $(+t_{31}, +t_{32}; -t_{31}, -t_{32})$  қозғалмалы платформанң қажетті орналасу шарттарын (7) қанағаттандырады, яғни кеңістіктегі кез-келген нүктеге ПМ центрі ең көп дегенде екі бағдарда жете алады. Ал кейбір нүктелерге тек қана бір бағдарда бара алады.

### 3 Якоби матрицаларын құру

Аяқтардың контурларының  $O_0O_{1,i}O'_{1,i}O'_{2,i}O_{3,i}O_{4,i}P$  тұйықталу теңдеулерін құрамыз

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{O_{1,i}} + \mathbf{s}_i + \mathbf{a}_{1'2',i} + \mathbf{c}_{2'2,i} + \mathbf{f}_i + \mathbf{g}_i - \mathbf{h}_i \quad (15)$$

мұнда,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{r}_P \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{OP} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_P \cdot c\gamma_P + b_P \cdot s\gamma_P \cdot s\alpha_P \\ a_P \cdot s\gamma_P - b_P \cdot c\gamma_P \cdot s\alpha_P \\ c_P + b_P \cdot c\alpha_P \end{bmatrix}. \quad (16)$$

(16)-теңдеуден көрініп тұрғандай координаттар жүйелерінің бас нүктелерінің радиус векторларын орын ауыстыру матрицалары бойынша келесі түрде анықтауға болады

$$\mathbf{r}_P = [U_P V_P W_P]^T = {}^0\tau_P = \tau(a_{OP}, b_{OP}, c_{OP}, \alpha_{OP}, \beta_{OP}, \gamma_{OP}) \quad (17)$$

және

$$\mathbf{r}_{1,i} = [U_{1,i} V_{1,i} W_{1,i}]^T = {}^0\tau_i = \tau(a_{01,i}, b_{01,i}, c_{01,i}, \alpha_{01,i}, \beta_{01,i}, \gamma_{01,i}). \quad (18)$$

Абсолюттік координаттар жүйесіндегі  $O_0U_0V_0W_0$  қалған векторлардың координаталарын келесі бұрылу ішкі матрицаларының көмегімен анықтаймыз

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= \overline{O_{2,i}O_{3,i}} = {}^0\mathbf{R}_{2,i} {}^{2,i}\mathbf{f}_i = {}^0\mathbf{R}_{1,i} \cdot {}^{1,i}\mathbf{R}_{2,i} \cdot \mathbf{f}_i = \\ &= \mathbf{R}(\alpha_{01,i}, \beta_{01,i}, \gamma_{01,i}) \cdot \mathbf{R}(\alpha_{12,i}, \beta_{12,i}, \gamma_{12,i}) \cdot {}^{2,i}\mathbf{f}_i. \end{aligned} \quad (19)$$

Келесі белгілеулерді енгіземіз  $\gamma_i = \gamma_{01,i}$  және берілген параметрлерді пайдаланып  $i = 1, 2, 3$  аяқтары үшін келесі векторларды анықтаймыз

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= \mathbf{R}(90^0, 0, \gamma_i) \cdot \mathbf{R}(270^0, \theta_{2,i}, 90^0) \cdot {}^{2,i}\mathbf{f}_i = \\ &= \begin{bmatrix} c\gamma_i & 0 & s\gamma_i \\ s\gamma_i & 0 & -c\gamma_i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ c\theta_{2,i} & -s\theta_{2,i} & 0 \\ -s\theta_{2,i} & -\theta_{2,i} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_i \cdot s\gamma_i \cdot s\theta_{2,i} \\ f_i \cdot c\gamma_i \cdot s\theta_{2,i} \\ f_i \cdot c\theta_{2,i} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \overline{O_{3,i}O_{4,i}} = {}^0\mathbf{R}_{3,i} {}^{2,i}\mathbf{g}_i = {}^0\mathbf{R}_{1,i} \cdot {}^{1,i}\mathbf{R}_{2,i} \cdot {}^{2,i}\mathbf{R}_{3,i} {}^{3,i}\mathbf{g}_i = \\ &= \mathbf{R}(\alpha_{01,i}, \beta_{01,i}, \gamma_{01,i}) \cdot \mathbf{R}(\alpha_{12,i}, \beta_{12,i}, \gamma_{12,i}) \cdot \mathbf{R}(\alpha_{23,i}, \beta_{23,i}, \gamma_{23,i}) {}^{3,i}\mathbf{g}_i = \\ &= \begin{bmatrix} c\gamma_i & 0 & s\gamma_i \\ s\gamma_i & 0 & -c\gamma_i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ c\theta_{2,i} & -s\theta_{2,i} & 0 \\ -s\theta_{2,i} & -\theta_{2,i} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta_{3,i} & -s\theta_{3,i} & 0 \\ s\theta_{3,i} & c\theta_{3,i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -g_i \cdot s\gamma_i \cdot s(\theta_{2,i} + \theta_{3,i}) \\ g_i \cdot c\gamma_i \cdot s(\theta_{2,i} + \theta_{3,i}) \\ g_i \cdot c(\theta_{2,i} + \theta_{3,i}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{h}_i = \overline{PO_{4,i}} = {}^0\mathbf{R}_P \cdot {}^P\mathbf{h}_i = \mathbf{R}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \begin{bmatrix} h_i \cdot c\varphi_i \\ h_i \cdot s\varphi_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

мұнда,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\varphi_3 = -\frac{2\pi}{3}$ .

Абсолюттік  $O_0U_0V_0W_0$  координаттар жүйесіне қатысты, (15)-теңдеудегі қалған векторлар анықталады.

Уақыт бойынша (15)-теңдеуден туынды аламыз

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_{O_{1,i}} + \dot{\mathbf{s}}_i + \dot{\mathbf{a}}_{1'2',i} + \dot{\mathbf{c}}_{2'2,i} + \dot{\mathbf{f}}_i + \dot{\mathbf{g}}_i - \dot{\mathbf{h}}_i \quad (23)$$

немесе  $\mathbf{r}_{O_{1,i}}$ ,  $\mathbf{a}_{1'2',i}$ ,  $\mathbf{c}_{2'2,i}$  векторларының тұрақты екендігін ескере отырып, мынаны аламыз

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{s}}_i \times \mathbf{e}_{1,i} + \dot{\theta}_{2,i} \times \mathbf{f}_i + \omega_i \times \mathbf{g}_i - \omega_P \times \mathbf{h}_i \quad (24)$$

мұнда,  $\dot{\mathbf{r}}_P = [\dot{U}_{OP}, \dot{V}_{OP}, \dot{W}_{OP}]^T = [\vartheta_{P_{U_0}}, \vartheta_{P_{V_0}}, \vartheta_{P_{W_0}}]^T$  - қозғалмалы платформаның центрінің, нүктесінің сызықтық жылдамдығы;  $\dot{\mathbf{s}}_{1,i} = \dot{s}_{1,i} \cdot \mathbf{e}_{1,i}$  - сызықтық жалпыланған жылдамдықтардың векторлары;  $\dot{\theta}_{2,i} = \dot{\theta}_{2,i} \mathbf{e}_{2,i}$  - бұрыштық жалпыланған жылдамдықтардың векторлары;  $\mathbf{e}_{2,i}$  -  $i$ -ші белсенді бұрыштық өстің бірлік векторы;  $\omega_i$  -  $i$ -ші аралық түйіннің бұрыштық жылдамдығы;  $\omega_P = [\omega_{P_{U_0}}, \omega_{P_{V_0}}, \omega_{P_{W_0}}]^T$  - қозғалмалы платформаның бұрыштық жылдамдығының векторы; Барлық векторлар абсолюттік  $O_0U_0V_0W_0$  координаттар жүйесіне қатысты анықталған.

(24)-теңдеудің екі жағын аралық түйіннің векторына скаляр көбейтеміз

$$\mathbf{g}_i^T \cdot \dot{\mathbf{r}}_P = \dot{s}_i \cdot \mathbf{g}_i^T \cdot \mathbf{e}_{1,i} + \mathbf{g}_i^T \cdot (\dot{\theta}_{2,i} \times \mathbf{f}_i) + \mathbf{g}_i^T \cdot (\omega_i \times \mathbf{g}_i) - \mathbf{g}_i^T \cdot (\omega_P \times \mathbf{h}_i) \quad (25)$$

немесе векторлардың өзара орналасуын ескере отырып, мынаны аламыз

$$\mathbf{g}_i^T \cdot \dot{\mathbf{r}}_P = \dot{s}_i \cdot (\mathbf{g}_i^T \cdot \mathbf{e}_{1,i}) + \dot{\theta}_{2,i} \cdot \mathbf{e}_{2,i} \cdot (\mathbf{f}_i \times \mathbf{g}_i) - \omega_P^T \cdot (\mathbf{h}_i \times \mathbf{g}_i). \quad (26)$$

Келесі белгілеулерді енгіземіз

$$\dot{\mathbf{X}} = [\dot{\mathbf{r}}_P^T, \omega_P^T], \quad \dot{\mathbf{q}} = [\dot{s}_1, \dot{\theta}_{2,1}, \dot{s}_2, \dot{\theta}_{2,2}, \dot{s}_3, \dot{\theta}_{2,3}]^T \quad (27)$$

және (26) теңдеуді келесі матрицалық түрге келтіреміз

$$\mathbf{J}_x \cdot \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_q \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (28)$$

мұнда,

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T & (\mathbf{h}_1 \times \mathbf{g}_1)^T \\ \mathbf{g}_2^T & (\mathbf{h}_2 \times \mathbf{g}_1)^T \\ \mathbf{g}_3^T & (\mathbf{h}_3 \times \mathbf{g}_3)^T \end{bmatrix}_{63},$$

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T \cdot \mathbf{e}_{1,1} & \mathbf{e}_{2,1}^T \cdot (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{g}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{g}_2^T \cdot \mathbf{e}_{1,2} & \mathbf{e}_{2,2}^T \cdot (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{g}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{g}_3^T \cdot \mathbf{e}_{1,3} & \mathbf{e}_{2,3}^T \cdot (\mathbf{f}_3 \times \mathbf{g}_3) \end{bmatrix}_{63}.$$

$\mathbf{J}_x$  және  $\mathbf{J}_q$  матрицалары кіріс және шығыс жалпыланған координаталарды байланыстыратын Якоби матрицалары болып табылады.



## 4 Жылдамдықтық талдау

### 4.1 Жылдамдықтың тура кинематикалық есебі

Жетекші түйіндердің жылдамдықтарын беріп, қозғалмалы платформаның жылдамдығын анықтау үшін, (28) матрицалық тәуелділік жеткіліксіз.  $\mathbf{J}_x$  матрицасын толықтыру үшін, келесі теңдеуді қарастырайық

$$\mathbf{O}_{4,i} = \mathbf{OP} + \mathbf{h}_i. \quad (29)$$

(29)-теңдеуді уақыт бойынша дифференциалдау арқылы келесі теңдеуді аламыз

$$\mathbf{V}_{O_{4,i}} = \dot{\mathbf{r}}_P + \omega_P \times \mathbf{h}_i. \quad (30)$$

Айналмалы кинематикалық жұптардың шектеулеріне байланысты, сфералық кинематикалық жұптардың жылдамдықтары  $\mathbf{V}_{O_{4,i}}$  әрқашанда айналмалы кинематикалық жұптардың айналу әстерінің бірлік векторларына  $\mathbf{e}_{2,i}$  және  $\mathbf{e}_{3,i}$  перпендикуляр болады. Ендеше (30) теңдеудің екі жағын  $\mathbf{e}_{2,i}$  векторына скаляр көбейтеміз

$$\mathbf{0} = \mathbf{e}_{2,i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_P + \mathbf{e}_{2,i} \cdot (\omega_P \times \mathbf{h}_i) \quad (31)$$

Векторлардың өзара орналасуларына байланысты келесі теңдеуді аламыз

$$\mathbf{e}_{2,i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_P + (\mathbf{h}_i \times \mathbf{e}_{2,i}) \cdot \omega_P = 0 \quad (32)$$

(32)-теңдеуді матрицалық түрде жазамыз

$$\mathbf{J}_g \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{6 \times 3} \quad (33)$$

мұнда,

$$\mathbf{J}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{2,1}^T & (\mathbf{h}_1 \times \mathbf{e}_{2,1})^T \\ \mathbf{e}_{2,2}^T & (\mathbf{h}_1 \times \mathbf{e}_{2,1})^T \\ \mathbf{e}_{2,3}^T & (\mathbf{h}_1 \times \mathbf{e}_{2,1})^T \end{pmatrix}$$

(28) және (33) теңдеулерді бірге жазамыз, сонымен бірге  $\mathbf{J}_q$  матрицасына толықтыру жасаймыз

$$\mathbf{J}_a \cdot \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_e \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (34)$$

мұнда,

$$\mathbf{J}_a = \begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} & n_{1x} & n_{1y} & n_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} & n_{2x} & n_{2y} & n_{2z} \\ g_{3x} & g_{3y} & g_{3z} & n_{3x} & n_{3y} & n_{3z} \\ -c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 & h_{1z} \cdot s\gamma_1 & -h_{1z} \cdot c\gamma_1 & h_{1y} \cdot c\gamma_1 - h_{1x} \cdot s\gamma_1 \\ -c\gamma_2 & -s\gamma_2 & 0 & h_{2z} \cdot s\gamma_2 & -h_{2z} \cdot c\gamma_2 & h_{2y} \cdot c\gamma_2 - h_{2x} \cdot s\gamma_2 \\ -c\gamma_3 & -s\gamma_3 & 0 & h_{3z} \cdot s\gamma_3 & -h_{3z} \cdot c\gamma_3 & h_{3y} \cdot c\gamma_3 - h_{3x} \cdot s\gamma_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} -g \cdot s\theta_{23,1} & f \cdot g \cdot s\theta_{3,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g \cdot s\theta_{23,2} & f \cdot g \cdot s\theta_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g \cdot s\theta_{23,3} & f \cdot g \cdot s\theta_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$s\theta_{23,i} = \sin(\theta_{2,i} + \theta_{3,i}), \quad s\theta_{3,i} = \sin \theta_{3,i}, \quad c\gamma_i = \cos \gamma_i, \quad s\gamma_i = \sin \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

#### 4.2 Жылдамдықтың кері кинематикалық есебі

Жылдамдықтың кері кинематикалық есебінің мақсаты 3-PRRS параллель манипулятордың белгілі орналасуы кезінде қозғалмалы платформаның берілген жылдамдықтарын қамтамасыз ету үшін, алты жетектегіштің қажетті жылдамдықтарын анықтау болып табылады.

Тәуелсіз айнымалылардың  $Z_P$ ,  $\psi$  және  $\theta$  белгілі мәндерін (5) теңдеуді ескеру арқылы (8), (9) және (12) теңдеулерге қойып тәуелді  $X_P$ ,  $Y_P$  және  $\varphi$  айнымалылардың мәндерін анықтауға болады. Келесі белгілеуді енгізейік  $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{Z}_P, \dot{\psi}, \dot{\theta}]$ , онда келесі теңдік орынды

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_r \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (35)$$

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_P}{\partial Z_P} & \frac{\partial X_P}{\partial \psi} + \frac{\partial X_P}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} & \frac{\partial X_P}{\partial \theta} + \frac{\partial X_P}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y_P}{\partial Z_P} & \frac{\partial Y_P}{\partial \psi} + \frac{\partial Y_P}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} & \frac{\partial Y_P}{\partial \theta} + \frac{\partial Y_P}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial Z_P} & \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

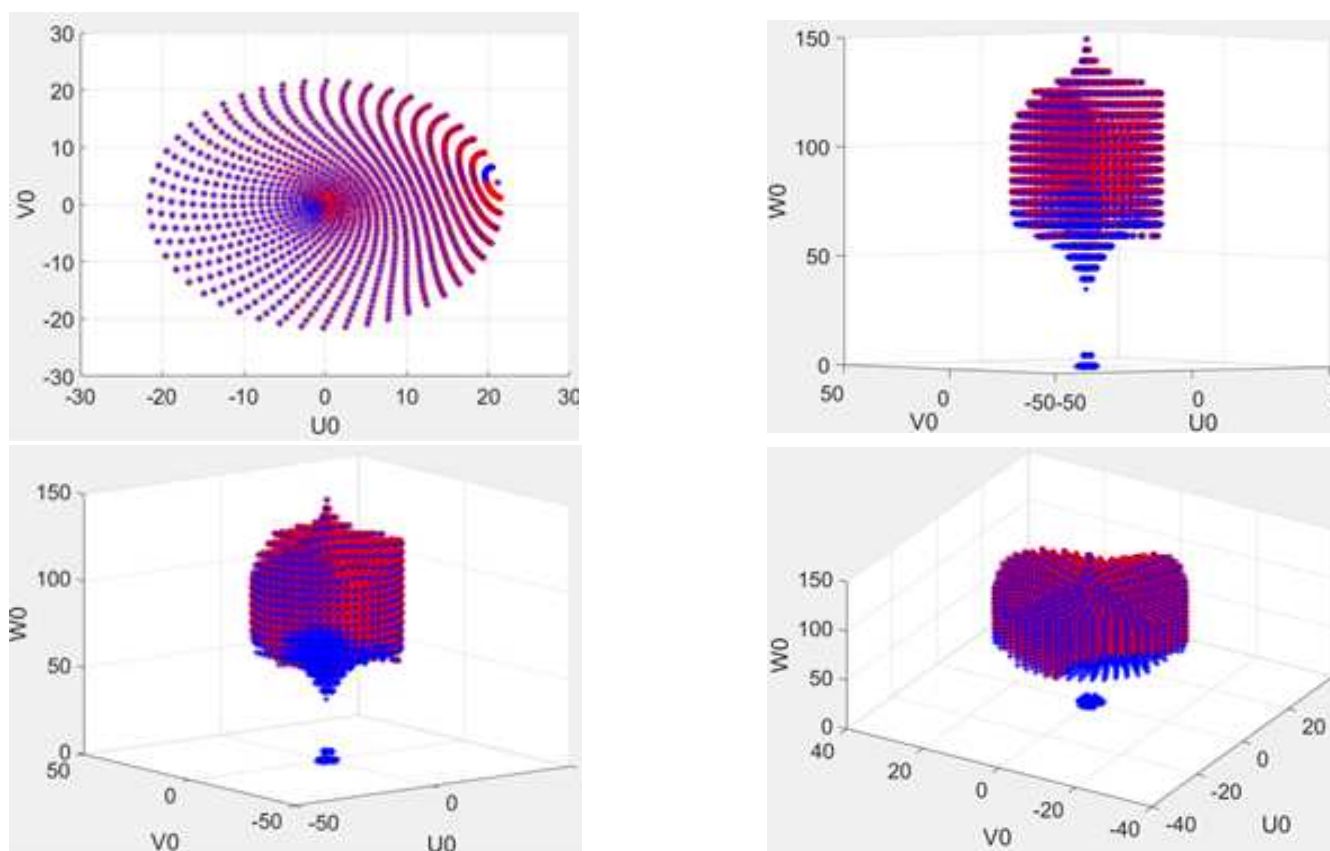
(28)-теңдеуден (35) ескеру арқылы мынаны аламыз

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_q^{-1} \cdot \mathbf{J}_x \cdot \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_r \quad (37)$$

(28)-теңдікте  $\mathbf{J}_q$  матрицасының өлшемі  $6 \times 3$ , сол себепті ол матрицаның кері матрицасын анықтау үшін оны  $3 \times 3$  өлшемге келтіреміз, яғни үш айналмалы жетектегіш түйіндерді қозғалтқан жағдайда үш ілгерлемелі жетектегіш түйіндерді бекітіп қоямыз және керісінше үш ілгерлемелі жетектегіш түйіндерді қозғалтқан жағдайда үш айналмалы жетектегіш түйіндерді бекітіп қоямыз.

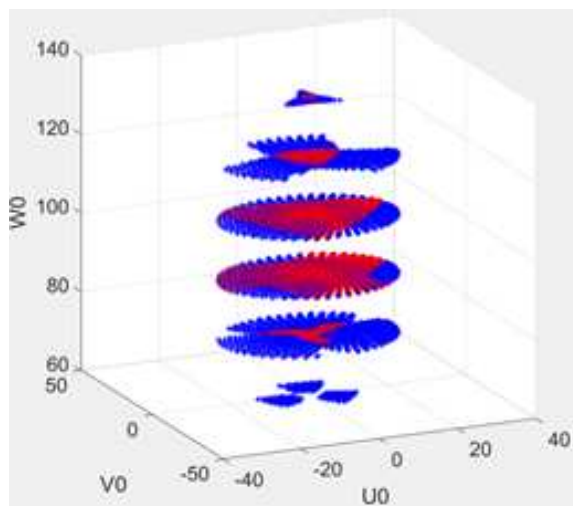
## 5 Сандық мысалдар

Тұрақты параметрлердің келесі мәндерінде:  $a_i = 15$ ,  $b_i = 8$ ,  $c_i = 5$ ,  $f_i = 60$ ,  $g_i = 70$ ,  $h = 43$  ПМ жұмыс аймағы анықталды. 3-суретте ілгерлемелі кинематикалық жұптарды бекітіп қойған жағдайда  $s_1 = s_2 = s_3 = 50$  және  $Z_P$  0 мен 170 аралығында 5 қадамымен, ал  $\psi$  және  $\theta$  екі цикл бойынша  $-\pi/2$  мен  $\pi/2$  аралығында  $\pi/50$  қадамы бойынша өзгерте отырып параллель манипулятордың кері кинематикалық есебі [21] шешілді, егер берілген нүктеде нақты  $\theta_{2,i}$  шешімдері бар болса бағдарлама кеңістікке нүкте қояды. Суретте қызыл "o" және көк "\*" бойынша ПМ жұмыс аймағының екі бағдары көрсетілген.

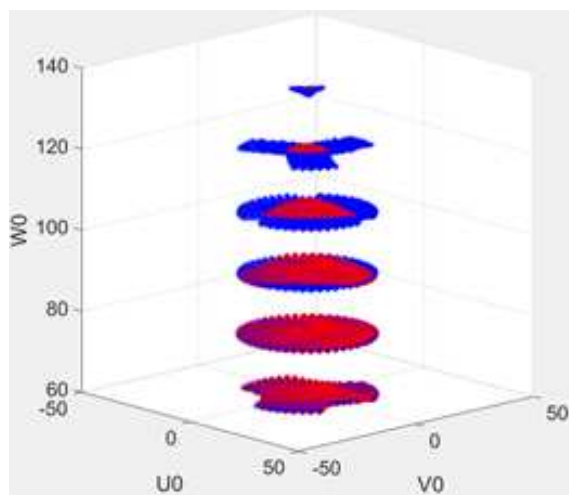


3-сурет - Жұмыс аймағы

4-суретте  $Z_P$  60 мен 135 аралығында 15 қадамымен, ал  $\psi$  және  $\theta$  екі цикл бойынша  $-\pi/2$  мен  $\pi/2$  аралығында  $\pi/50$  қадамы бойынша өзгертілген. 4-суреттен ілгерлемелі кинематикалық жұптардың өзгеруінің вертикал бағыттағы жұмыс аймағының өзгеруіне әсер ететіндігін байқауға болады, яғни ілгерлемелі кинематикалық жұптардың ара қашықтығы жақындаған жағдайда параллель манипулятордың жоғарғы жақтағы жұмыс аймағы кеңейеді, ал ара қашықтықтар алыстаған жағдайда төменгі жақтағы жұмыс аймағы кеңейетіндігін көре аламыз.



$s_1 = s_2 = s_3 = 40$   
**4-сурет** - ілгерлемелі кинематикалық жұптардың жұмыс аймағына әсері



$s_1 = s_2 = s_3 = 60$

Манипуляторды белгілі бір қалыпқа алып келеміз (кесте 2) және белсенді кинематикалық жұптарды белгілі бір жылдамдықпен қозғалтқан жағдайда (кесте 3) қозғалмалы платформаның лездік жылдамдықтарын анықтаймыз (кесте 4).

2-кесте –  $\theta_{3,i}$  мәндері ( $\theta_{2,1} = \theta_{2,2} = \theta_{2,3} = 0,7853, s_1 = s_2 = s_3 = 60$ )

	$\theta_{3,1}$	$\theta_{3,2}$	$\theta_{3,3}$		$\theta_{3,1}$	$\theta_{3,2}$	$\theta_{3,3}$
1	1,8061	2,3347	1,8387	7	1,8387	1,8061	2,3347
2	1,8061	2,3347	1,8387	8	1,8387	1,8061	2,3347
3	1,8061	2,3347	1,8387	9	1,8387	1,8061	2,3347
4	1,8200	1,8200	1,8387	10	2,3347	1,8387	1,8061
5	1,8200	1,8200	1,8387	11	2,3347	1,8387	1,8061
6	1,8200	1,8200	1,8387	12	2,3347	1,8387	1,8061

3-кесте – Кіріс параметрлері

	$\dot{s}_1$	$\dot{\theta}_{2,1}$	$\dot{s}_2$	$\dot{\theta}_{2,2}$	$\dot{s}_3$	$\dot{\theta}_{2,3}$
1	-1	0,2	-1	0,2	-1	0,2
2	0	0,2	0	0,2	0	0,2
3	-1	0	-1	0	-1	0
4	-1	0,2	-1	0,2	-1	0,2
5	0	0,2	0	-1	0	0,2
6	-1	0	-1	0	-1	0
7	-1	0,2	-1	0,2	-1	0,2
8	0	0,2	0	0,2	0	0,2
9	-1	0	-1	0	-1	0
10	-1	0,2	-1	0,2	-1	0,2
11	0	0,2	0	0,2	0	0,2
12	-1	0	-1	0	-1	0

## 4-кесте – Шығыс параметрлері

	$\vartheta_{P_{U_0}}$	$\vartheta_{P_{V_0}}$	$\vartheta_{P_{W_0}}$	$\omega_{P_{U_0}}$	$\omega_{P_{V_0}}$	$\omega_{P_{W_0}}$
1	2,3158	-2,1329	19,3295	-0,2341	-0,1473	-0,0159
2	2,0717	-1,9081	18,1863	-0,2094	-0,1317	-0,0142
3	0,2441	-0,2248	1,1432	-0,0246	-0,0155	-0,0016
4	0	0	24,4475	0	0	0
5	0	0	22,7647	0	0	0
6	0	0	1,6828	0	0	0
7	0,6892	3,0720	19,3295	0,2446	-0,1290	-0,0159
8	0,6166	2,7481	19,3295	0,2446	-0,1290	-0,0159
9	0,0726	0,3238	1,1432	0,0257	-0,0136	-0,0016
10	-3,0051	-0,9391	19,3295	-0,0105	0,2572	-0,015
11	-2,6883	-0,8400	18,1863	-0,0094	0,2472	-0,0142
12	-0,3168	-0,0990	1,1432	-0,0011	0,0291	-0,0016

## 6 Қорытынды

Жұмыста трипод түрдегі 3-PRRS ПМ жұмыс аймағын анықтау кезінде қозғалмалы платформаның центрі кеңістіктегі белгілі бір нүктеге тек қана екі бағдарда бара алатындығы белгілі болды. Белгілі бір вертикал жазықтықтағы параллель манипулятордың жұмыс аймағы шеңбер болатындығы анықталды және сол шеңбердің ішіндегі манипулятордың центрінің қозғалу траекториясы көрсетілді. Ілгерлемелі кинематикалық жұптардың қозғалысы вертикал бағыттағы жұмыс аймағының ұлғаюына әсер ететіндігі белгілі болды. Манипулятордың жылдамдығының тура және кері кинематикалық есептері шешілді және салыстырылды, сингулярлық конфигурациядан алыс аймақтарда шешімдердің абсолюттік алшақтығы 5% асқан жоқ.

## References

- [1] K.S. Fu, R.C. Gonzales, C.S.G. Lee, *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence* (Mc Graw - Hill Book Company, 1987).
- [2] T.Yoshikawa, *Foundation of Robotics: Analysis and Control* (MIT Press, 1990).
- [3] Lung-Wen Tsai, *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators* (John Wiley & Sons, Inc., New York/Singapore/Toronto, 1999).
- [4] Jorge Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods, and Algorithms, Fourth Edition* (Springer, 2014).
- [5] *Mekhanika promyshlennyh robotov. V trekh knigah / Pod redakciej K.V. Frolova, E.I. Vorob'eva [Mechanics of industrial robots. In three books / Edited by K. V. Frolov, E. I. Vorobyov]* (M.: "Higher School 1988) [in Russian].
- [6] K.C. Gupta, *Mechanics and Control of Robots* (Springer - Verlag, New York, 1997).
- [7] M.W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control* (John Wiley & Sons, Inc., 2006).
- [8] Jean - Pierre Merlet, *Parallel Robots* (Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London, 2004).
- [9] Marco Ceccarelli, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems* (Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London, 2004).

- 
- [10] *Parallel Robots: Theory and Applications. Series Editors: Merlet J.P., Briot Sébastien, Martinet P.* (Springer, 2018).
- [11] D. Stewart, "A Platform with 6 Degrees of Freedom", *Proceedings Institution of Mechanical Engineers, London* **180**(1965), 371-386.
- [12] Li Yangmin, Xu Qingsong, "Kinematic analysis of a 3-PRS parallel manipulator", *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* **23**(2007), 395-408.
- [13] C.M. Gosselin, J. Angeles, "The optimum kinematic design of a spherical three - degree - of freedom parallel manipulator", *Journal of Mech Transm Autom Des* **111**:2(1989), 202-207.
- [14] C. Gosselin, E. St-Pierre, and M. Gagni, "On the development of the Agile Eye", *IEEE Robotics & Automation Magazine* **3**(1996), 29-37.
- [15] Almas Shintemirov, Aibek Niyetkaliev and Matteo Rubagotti, "Numerical Optimal Control of a Spherical Parallel Manipulator Based on Unique Kinematic colutions", *Journal of LATEX Class Files* **13**:9(2015), February 2015.
- [16] R. Clavel, *Device for displacing and positioning an element in space* (WIPO Patent, W087/03528).
- [17] L.W. Tsai, F. Tahmasebi, "Synthesis and Analysis of a New Class of Six - Degrees - of - Freedom Parallel Manipulators", *Journal of Robotics Systems* **10**:5(1993), 561 - 580.
- [18] R.I. Alizade, N.R. Tagiyev, J. Duffy, "A Forward and Reverse Displacement Analysis of a 6 - DoF In-Parallel Manipulator", *Mechanism and Machine Theory* **29**:1(1994), 115-124.
- [19] C.L. Collins, G.L. Long, "The Singularity Analysis of an In - Parallel Hand Controller for Force - Reflected Teleopation", *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **11**:5(1995), 661 - 669.
- [20] C. Cleary, M. Uebel, *Jacobian Formulation for a Novel 6 - DoF Parallel Manipulator* (IEEE International Conference on Robotics and Automation, **3**, 1994), 2377 - 2382.
- [21] Zh. Baigunchekov, M.A. Laribi, A. Mustafa, R. Kaiyrov, B .Amanov, A. Kassinov, "Geometry and Inverse Kinematics of 3-PRRS Type Parallel Manipulator", *Advances in Intelligent Systems and Computing* **980**(2020), 12-18.
- [22] Zh. Baigunchekov, R.A. Kaiyrov, "Direct kinematics of a 3-PRRS type parallel manipulator", *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research* **9**:7(2020), 967-972.
- [23] Zh. Baigunchekov, M.A. Laribi, M. Izmambetov, Zh. Zhumasheva, R. Kaiyrov, "The First Type of Singularity of a 3-PRRS Parallel Manipulator", *Mechanisms and Machine Science* **84**(2020), 356-363.
- [24] Zh. Baigunchekov, R. Kaiyrov, *Workspace of a 3- PRRS type parallel manipulator* (EasyChair Preprint, №2271).