4-бөлім	Раздел 4	Section 4
Қолданылмалы математика	Прикладная математика	Applied Mathematics

МРНТИ 27.25.15 DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v108.i4.07

А.Т. Рахымова[1], М.Б. Габбасов[2,*], К.М. Шапен[1]

[1]Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан

[2]Компания системных исследований "Фактор", г. Нур-Султан, Казахстан

*e-mail: mars0@mail.ru

ОБ ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ЧИСЕЛ

Впервые теория четырехмерных чисел была введена У.Р. Гамильтоном в 1843 г, которая называется теорией кватернионов. В данной теории умножение является некоммутативной операцией, вследствие чего не удалось построить полноценный математический анализ функциональных пространств. В 2003 году была опубликована новая теория функций четырех переменных казахскими математиками Б. Маукеевым и М.М. Абеновым, где вводится коммутативное умножение, которая позволяет решать трехмерные модели механики аналитическим методом. Более полное изложение новой теории М.М. Абенов опубликовал в 2019 году в виде монографии. В ходе развития данной теории М.М. Абеновым и М.Б. Габбасовым были найдены все четырехмерные пространства с коммутативным умножением, которым присвоены обозначения М2 - М7, и появилась необходимость исследования данных пространств. Данная работа изучает один из этих пространств, а именно пространство четырехмерных чисел М5. Целью исследования данной работы является изучение свойств четырехмерных чисел пространства М5 и обоснование его значимости. В работе получены новые результаты об алгебре пространства М5, введены различные нормы и метрики, рассмотрены свойства числовых последовательностей.

Ключевые слова: четырехмерное число, спектр, собственное значение, симплектический модуль, спектральная норма.

А.Т. Рахымова[1], М.Б. Габбасов[2,*], К.М. Шапен[1]

[1]Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

[2]"Фактор" жүйелік зерттеулер компаниясы, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

*e-mail: mars0@mail.ru

Төрт өлшемді сандардың бір кеңістігі туралы

Төрт өлшемді сандар теориясын алғаш рет В. Р. Гамильтон 1843 жылы енгізді, оны кватерниондар теориясы деп атады. Бұл теорияда енгізілен көбейту ережесі коммутативті емес, сондықтан функционалды кеңістіктердің толыққанды математикалық талдауы іске асырылмады. 2003 жылы төрт өлшемді сандар функциясының жаңа теориясын математиктер Б. Мәукеев пен М.М. Әбенов ашты, олар коммутативті болатын көбейту ережесін енгізді, бұл теория механиканың үш өлшемді модельдерін аналитикалық әдіспен шешуге мүмкіндік береді. Жаңа теорияның толық мазмұнын М.М. Әбенов 2019 жылы өзінің монографиясында басып шығарды. Бұл теорияны зерттеу барысында М.М. Әбенов және М.Б. Ғаббасов М2 - М7 белгілеуімен ерекшеленетін, көбейту ережесі коммутативті болатын барлық төрт өлшемді кеңістіктерді анықтады, осы орайда табылған кеңістіктерді зерттеу қажеттігі туындады. Бұл жұмыста осы кеңістіктердің бірі, атап айтқанда М5 төрт өлшемді сандар кеңістігі зерттелген.

Бұл жұмыстың мақсаты М5 кеңістігінің төрт өлшемді сандарының қасиеттерін зерттеу және оның маңыздылығын негіздеу болып табылады. Зерттеліп отырған жұмыста М5 кеңістігінің алгебрасы жайында жаңа нәтижелер алынды, әртүрлі нормалар мен метрикалар енгізілді, сандық тізбектердің қасиеттері қарастырылды.

Түйін сөздер: төрт өлшемді сан, спектр, меншікті мәндер, симплексті модуль, спектралды норма.

A.T. Rakhymova[1], M.B. Gabbassov[2,*], K.M. Shapen[1]
[1]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
[2]System research company "Factor", Nur-Sultan, Kazakhstan
*e-mail: mars0@mail.ru

On one space of four-dimensional numbers

The theory of four-dimensional numbers was first introduced by W.R. Hamilton in 1843, which is called the theory of quaternions. In this theory multiplication is a non-commutative operation, as a result of which it was not possible to construct a full-fledged mathematical analysis of functional spaces. In 2003, a new theory of functions of four-dimensional variables was published by Kazakh mathematicians B. Maukeev and M.M. Abenov, where commutative multiplication is introduced, which allows solving three-dimensional models of mechanics by the analytical method. A more complete presentation of the new theory was published in 2019 by M.M. Abenov in a monograph. While developing this theory, M.M. Abenov and M.B. Gabbasov found all four-dimensional spaces with commutative multiplication, which were assigned the designations M2 - M7, and it became necessary to study these spaces. This paper studies one of these spaces, namely the space of four-dimensional numbers M5. The purpose of this paper is to study the properties of four-dimensional numbers of the space M5 and substantiate its significance. In this study, new results are obtained on an algebra of the space M5, various norms and metrics are introduced, and the properties of number sequences are considered.

Key words: four-dimensional number, spectrum, eigenvalue, symplectic module, spectral norm.

1 Введение

Впервые пространство четырехмерных чисел описал У.Р.Гамильтон [1], который назвал это пространство пространством кватернионов. Он ввел операции сложения, вычитания, умножения и деления между четырехмерными числами (кватернионами) и построил некоммутативную алгебру четырехмерных чисел [2–12]. Согласно теореме Фробениуса [13, 14], поле кватернионов является единственной ассоциативной, но некоммутативной алгеброй без делителей нуля. В 2003 году казахстанские математики Маукеев Б. и Абенов М.М. опубликовали монографию [15], в которой определили новое пространство четырехмерных чисел с ассоциативной и коммутативной алгеброй с делителями нуля. Данная теория оказалась продуктивной и в 2019 году Абенов М.М. опубликовал монографию [16], в которой построены соответствующие алгебра и математический анализ на основе четырехмерных чисел, которую автор назвал «четырехмерной математикой».

Четырехмерная математика позволяет рассмотреть пространство четырехмерных чисел как естественное расширение пространства одномерных и двумерных (комплексных) чисел. Как следствие, все базовые операции, работающие в теории функций действительного и комплексного переменных [17–24], сохраняются и в новом пространстве .

В дальнейшем Абенов М.М., совместно с Габбасовым М.Б., описал все анизотропные четырехмерные пространства, которые являются ассоциативными и коммутативными с делителями нуля [25]. Таких пространств оказалось шесть и им были присвоены обозначения M2, M3, M4, M5, M6, M7. Все эти пространства также можно рассматривать как расширение действительного и комплексного пространств. В работе [16] подробно описана четырехмерная математика над пространством M3. В данной работе мы исследуем один из этих пространств имеющий отличительный индекс пространства, как M5.

Основным отличием пространства M5 от первоначального пространства M3 является то, что в записи $X = x_1J_1 + x_2J_2 + x_3J_3 + x_4J_4$, базисные элементы $J_1, J_4 \in Re$, а $J_2, J_3 \in Im$ в том смысле, что $J_1 \cdot J_1 = J_4 \cdot J_4 = J_1$, $J_2 \cdot J_2 = J_3 \cdot J_3 = -J_1$ [10]. Это имеет определенные преимущества в физическом смысле, где J_1, J_2, J_3 можно рассмотреть как трехмерная координата

$(x,\ y,\ z)$ в пространстве, что объясняет $J_1 \in Re$, $J_2, J_3 \in Im$, а J_4 как временной показатель (t) который фиксирует передвижения тела по времени.

Замена принадлежностей пространств J_3 и J_4 и другое определение операции умножения приводят к изменению вида основной матрицы четырехмерного числа, что в свою очередь приводит к изменению вида спектра и собственных значений, а также спектральной метрики.

2 Материал и методы

2.1 Алгебраические операции

Рассмотрим множество четырехмерных чисел $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, где $x_i \in R$, $i = 1, 2, 3, 4$, которое обозначим через M5.

Два числа $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ считаются равными, если $x_i = y_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

При этом, операции сложения и вычитания введем как покоординатное сложение и вычитание, которые являются ассоциативными и коммутативными. Операцию умножения определяем так, чтобы она была ассоциативной и коммутативной.

Определение 1 *Произведением чисел* $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *и* $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ *назовем число* $Z = X \cdot Y = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, *где*

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 \\ z_2 &= x_2y_1 + x_1y_2 - x_4y_3 - x_3y_4 \\ z_3 &= x_3y_1 - x_4y_2 + x_1y_3 - x_2y_4 \\ z_4 &= x_4y_1 + x_3y_2 + x_2y_3 + x_1y_4 \end{aligned} \tag{1}$$

Теорема 1 *Введенная операция умножения удовлетворяет следующим условиям:*

1. $X \cdot Y = Y \cdot X$ *(коммутативность умножения);*
2. $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$ *(ассоциативность умножения);*
3. $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$ *(сочетательность умножения относительно сложения),*

для любых $X, Y, Z \in R^4$.

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Число $(x_1, 0, 0, 0)$ будем называть действительным числом, а число $(x_1, x_2, 0, 0)$ – комплексным числом.

Из соотношений (1) следует, что при умножении действительного числа a на четырехмерное число происходит покоординатное умножение на a, то есть $(a, 0, 0, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = (ax_1, ax_2, ax_3, ax_4)$.

Следующие четыре числа называются базисными числами: $J_1 = (1, 0, 0, 0)$, $J_2 = (0, 1, 0, 0)$, $J_3 = (0, 0, 1, 0)$, $J_4 = (0, 0, 0, 1)$.

Тогда любое четырехмерное число $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ можно представить в виде разложения по базисным числам $X = x_1 \cdot J_1 + x_2 \cdot J_2 + x_3 \cdot J_3 + x_4 \cdot J_4$.

Определение 2 *Симплектическим модулем четырехмерного числа* $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *в пространстве M5 называется действительное число:*

$$|X| = \sqrt[4]{\left[(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2\right] \cdot \left[(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2\right]}. \tag{2}$$

Тогда модуль комплексного числа $x = (x_1, x_2, 0, 0)$ равен

$$|x| = \sqrt{|x_1^2 + x_2^2|}.$$

Определение 3 *Число $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ назовем сопряженным числом к четырехмерному числу $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, если:*

$$x_1^* = x_1\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2\right) + 2x_2x_3x_4,$$

$$x_2^* = x_2\left(-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2\right) - 2x_1x_3x_4,$$

$$x_3^* = x_3\left(-x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2\right) - 2x_1x_2x_4,$$

$$x_4^* = x_4\left(-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) + 2x_1x_2x_3.$$

Соответственно, сопряженные числа к базисным числам имеют вид:

$$J_1^* = J_1, J_2^* = -J_2, J_3^* = -J_3, J_4^* = J_4.$$

Сопряженное число к комплексному числу $x = (x_1, x_2, 0, 0)$ имеет вид $|x|^2\,(x_1, -x_2, 0, 0)$.

Лемма 1 *Пусть $X \in M5$, тогда $X \cdot X^* = |X|^4 J_1$.*

Доказывается непосредственной проверкой.

Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – четырехмерное число, модуль которого отличен от нуля. Тогда умножая обе части равенства $X \cdot X^* = |X|^4 J_1$ на число $\dfrac{1}{|X|^4}$ получим $X \cdot \dfrac{X^*}{|X|^4} = J_1$. Число

$$X^{-1} = \frac{1}{|X|^4} \cdot X^* = \left(\frac{x_1^*}{|x|^4}, \frac{x_2^*}{|x|^4}, \frac{x_3^*}{|x|^4}, \frac{x_4^*}{|x|^4}\right) \tag{3}$$

назовем обратным числом к X.

Тогда операцию деления четырехмерных чисел определим как $\dfrac{Y}{X} = Y \cdot X^{-1} = \dfrac{1}{|X|^4} X^* \cdot Y$, если $|X| \neq 0$.

Теорема 2 *Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, а $X^{-1} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ – обратное число к X. Тогда элементы обратного числа выражаются следующим образом:*

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_1 - x_4}{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2} + \dfrac{x_1 + x_4}{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2}\right), \\ y_2 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_2 + x_3}{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2} + \dfrac{x_2 - x_3}{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2}\right), \\ y_3 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_2 + x_3}{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2} - \dfrac{x_2 - x_3}{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2}\right), \\ y_4 = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x_1 - x_4}{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2} + \dfrac{x_1 + x_4}{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2}\right). \end{cases}$$

Доказательство В силу формулы (3) и определения 3, находим элементы обратного числа $X^{-1} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

$$y_1 = \frac{1}{|X|^4} \cdot X^* = \frac{x_1\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2\right) + 2x_2x_3x_4}{\left[(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2\right] \cdot \left[(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{x_1\left(2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2\right) + x_4(-4x_1x_4 + 4x_2x_3)}{\left[(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2\right] \cdot \left[(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{x_1\left((x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2\right)}{\left[(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2\right] \cdot \left[(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2\right]} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{x_4((x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_1 + x_4)^2 - (x_2 - x_3)^2)}{\left[(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2\right] \cdot \left[(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - x_4}{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2} + \frac{x_1 + x_4}{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2}\right)$$

Остальные элементы находятся аналогичным образом.

Определение 4 *Четырехмерное число называется невырожденным, если $|X| \neq 0$, и вырожденным, если $|X| = 0$.*

Опишем вырожденные числа. Из уравнения $|X| = 0$ получим, что существуют два типа вырожденных чисел в рассматриваемом пространстве, а именно, числа вида $(c_1, c_2, -c_2, c_1)$ и $(c_1, c_2, c_2, -c_1)$ при произвольных действительных c_1 и c_2.

Числа вида $(c_1, c_2, -c_2, c_1)$ назовем вырожденными числами первого типа, а числа вида $(c_1, c_2, c_2, -c_1)$ – вырожденными числами второго типа.

Очевидно, единственным вырожденным числом, относящимся и к первому, и ко второму типу является число $0 = (0{,}0{,}0{,}0)$. Обозначим множество всех вырожденных чисел первого типа через O_I, а множество всех вырожденных чисел второго типа через O_{II}.

Теорема 3 *Вырожденные числа обладают следующими свойствами:*

1. *Если $X, Y \in O_I$, то $X + Y \in O_I$, $X - Y \in O_I$, $X \cdot Y \in O_I$.*
2. *Если $X, Y \in O_{II}$, то $X + Y \in O_{II}$, $X - Y \in O_{II}$, $X \cdot Y \in O_{II}$.*
3. *Если $X \in O_I, Y \in O_{II}$, то $X \cdot Y = 0 = (0, 0, 0, 0)$.*
4. *Если $X \in O_I$, $Y \notin O_I \cup O_{II}$, то $X \cdot Y \in O_I$.*
5. *Если $X \in O_{II}$, $Y \notin O_I \cup O_{II}$, то $X \cdot Y \in O_{II}$.*

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Переходим к определению спектра четырехмерного числа. Сопоставим каждому четырехмерному числу $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ некоторую матрицу $F(x)$ следующего вида:

$$F(X) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Отображение $F : X \to F(X)$ является взаимно-однозначным. Действительно, двум разным числам X и Yсоответствуют разные матрицы и для любой матрицы указанного вида можно найти соответствующее четырехмерное число.

Теорема 4 *Отображение $F : X \to F(X)$ для произвольных четырехмерных чисел X, Y обладает следующими свойствами:*

1. $F(X \pm Y) = F(X) \pm F(Y)$;
2. $F(cX) = cF(X)$ *для любого* $c \in R$;
3. $F(XY) = F(X)F(Y)$;
4. $F(X^{-1}) = F^{-1}(X)$;
5. $\det(F(X)) = |X|^4$;
6. $\det(F(X) \pm F(Y)) = |X \pm Y|^4$;
7. $\det(F(\alpha X)) = |\alpha X|^4$;
8. $\det(F(X)F(Y)) = |XY|^4$;
9. $\det(F^{-1}(X)) = |X^{-1}|^4$, *где X – невырожденное число.*

Доказательство Свойства 1) и 2) очевидны. Докажем свойство 3).

$$F(X)F(Y) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 \\ y_2 & y_1 & -y_4 & -y_3 \\ y_3 & -y_4 & y_1 & -y_2 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \end{pmatrix} = B,$$

где B – результирующая матрица. Вычислим элементы матрицы B:

$$b_{11} = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 = z_1; \quad b_{12} = x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 - x_4y_3 = z_2;$$
$$b_{13} = -x_1y_3 + x_2y_4 - x_3y_1 + x_4y_2 = -z_3; \quad b_{14} = -x_1y_4 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_4y_1 = -z_4;$$

$$b_{21} = x_2y_1 + x_1y_2 - x_4y_3 - x_3y_4 = z_2; \quad b_{22} = -x_2y_2 + x_1y_1 + x_4y_4 - x_3y_3 = z_1;$$
$$b_{23} = -x_2y_3 - x_1y_4 - x_4y_1 - x_3y_2 = -z_4; \quad b_{24} = x_2y_4 - x_1y_3 + x_4y_2 - x_3y_1 = -z_3;$$

$$b_{31} = x_3y_1 - x_4y_2 + x_1y_3 - x_2y_4 = z_3; \quad b_{32} = x_3y_2 + x_4y_1 + x_1y_4 + x_2y_3 = z_4;$$
$$b_{33} = -x_3y_3 + x_4y_4 + x_1y_1 - x_2y_2 = z_1; \quad b_{34} = -x_3y_4 - x_4y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 = z_2;$$

$$b_{41} = x_4y_1 + x_3y_2 + x_2y_3 + x_1y_4 = z_4; \quad b_{42} = -x_4y_2 + x_3y_1 - x_2y_4 + x_1y_3 = z_3;$$
$$b_{43} = -x_4y_3 - x_3y_4 + x_2y_1 + x_1y_2 = z_2; \quad b_{44} = x_4y_4 - x_3y_3 - x_2y_2 + x_1y_1 = z_1,$$

где $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) = X \cdot Y$.

Докажем свойство 4. По формуле (3) $X^{-1}=\frac{1}{|X|^4}X^*$, следовательно,

$$\left(x^{-1}\right)_1=\frac{1}{|x|^4}x_1\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2\right)+2x_2x_3x_4,$$

$$\left(x^{-1}\right)_2=\frac{1}{|x|^4}x_2\left(-x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2\right)-2x_1x_3x_4,$$

$$\left(x^{-1}\right)_3=\frac{1}{|x|^4}x_3\left(-x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2\right)-2x_1x_2x_4,$$

$$\left(x^{-1}\right)_4=\frac{1}{|x|^4}x_4\left(-x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)+2x_1x_2x_3,$$

соответственно матрица

$$F\left(X^{-1}\right)=\begin{pmatrix} \left(x^{-1}\right)_1 & -\left(x^{-1}\right)_2 & -\left(x^{-1}\right)_3 & \left(x^{-1}\right)_4 \\ \left(x^{-1}\right)_2 & \left(x^{-1}\right)_1 & -\left(x^{-1}\right)_4 & -\left(x^{-1}\right)_3 \\ \left(x^{-1}\right)_3 & -\left(x^{-1}\right)_4 & \left(x^{-1}\right)_1 & -\left(x^{-1}\right)_2 \\ \left(x^{-1}\right)_4 & \left(x^{-1}\right)_3 & \left(x^{-1}\right)_2 & \left(x^{-1}\right)_1 \end{pmatrix},$$

а матрица

$$F\left(X\right)=\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Умножая эти матрицы друг на друга получим, что $F\left(X^{-1}\right)\cdot F\left(X\right)=E$, где E – единичная матрица, что доказывает требуемое.

Докажем свойство 5. По определению детерминанта

$$detF\left(X\right)=x_1\begin{vmatrix} x_1 & -x_4 & -x_3 \\ -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix}+x_2\begin{vmatrix} x_2 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_2 & x_1 \end{vmatrix}-$$

$$-x_3\begin{vmatrix} x_2 & x_1 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}-x_4\begin{vmatrix} x_2 & x_1 & -x_4 \\ x_3 & -x_4 & x_1 \\ x_4 & x_3 & x_2 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя определители в последнем равенстве убеждаемся, что

$$\begin{vmatrix} x_1 & -x_4 & -x_3 \\ -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix}=x_1^*,\qquad \begin{vmatrix} x_2 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_2 & x_1 \end{vmatrix}=-x_2^*,$$

$$\begin{vmatrix} x_2 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_2 & x_1 \end{vmatrix}=-x_3^*,\qquad \begin{vmatrix} x_2 & x_1 & -x_4 \\ x_3 & -x_4 & x_1 \\ x_4 & x_3 & x_2 \end{vmatrix}=x_4^*.$$

Тогда $detF\left(X\right)=x_1x_1^*-x_2x_2^*-x_3x_3^*+x_4x_4^*=\left(x\cdot x^*\right)_1=|X|^4$.

Докажем свойство 6. Используя свойства 1) и 5) имеем

$$\det\left(F\left(X\right) \pm F\left(Y\right)\right) = \det\left(F\left(X \pm Y\right)\right) = \left|X \pm Y\right|^4.$$

Доказательства свойств 7, 8, 9 выполняется аналогично.

Таким образом, между пространством четырехмерных чисел и пространством (4×4)-матриц вида (4) существует биекция, которая сохраняет арифметические операции, то есть существующая биекция является гомоморфизмом.

Определение 5 *Спектром четырехмерного числа X называется совокупность характеристических чисел соответствующей матрицы $F(X)$.*

Составим характеристическое уравнение для определения спектра четырехмерного числа $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\begin{vmatrix} x_1-\mu & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1-\mu & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1-\mu & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} &\mu^4 - 4x_1\mu^3 + 2\left(3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2\right)\mu^2 + \\ &+\left(-4x_1^3 + 4x_1x_2^2 + 4x_1 + 4x_1x_4^2 + 8x_2x_3x_4\right)\mu + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - \\ &\qquad - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_1^2x_4^2 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_2^2x_4^2 - 2x_3^2x_4^2 - 8x_1x_2x_3x_4 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Перепишем уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mu^4 - 4x_1\mu^3 + 2\left(3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2\right)\mu^2 + \left(-4x_1^3 + 4x_1x_2^2 + 4x_1x_3^2 + 4x_1x_4^2 + 8x_2x_3x_4\right)\mu + \\ &\qquad + \left[(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2\right]\left[(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2\right] = 0. \end{aligned}$$

Решая уравнение (5) находим четыре характеристических числа четырехмерного числа x:

$$\begin{cases} \mu_1 = x_1 - x_4 + (x_2 + x_3)\,i, \\ \mu_2 = x_1 - x_4 - (x_2 + x_3)\,i, \\ \mu_3 = x_1 + x_4 + (x_2 - x_3)\,i, \\ \mu_4 = x_1 + x_4 - (x_2 - x_3)\,i. \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, спектр четырехмерного числа $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ состоит из четырех попарно комплексно-сопряженных чисел вида (6). Обозначим спектр числа x через $\Lambda(X)$ и рассмотрим отображение $S : X \to \Lambda(X)$.

Теорема 5 *Отображение S является взаимно-однозначным и отображением на, то есть биекцией.*

Доказательство Пусть $X \neq Y$, покажем, что тогда $\Lambda(X) \neq \Lambda(Y)$. Допустим противное, тогда это означает, что $\mu_i\left(x\right) = \mu_i\left(y\right),\ i = 1, 2, 3, 4$, следовательно,

$$\begin{aligned} &x_1 - x_4 + (x_2 + x_3)\,i = y_1 - y_4 + (y_2 + y_3)\,i, \\ &x_1 - x_4 - (x_2 + x_3)\,i = y_1 - y_4 - (y_2 + y_3)\,i, \\ &x_1 + x_4 + (x_2 - x_3)\,i = y_1 + y_4 + (y_2 - y_3)\,i, \\ &x_1 + x_4 - (x_2 - x_3)\,i = y_1 + y_4 - (y_2 - y_3)\,i. \end{aligned}$$

Перенеся правые части в левую часть и приведя подобные члены получим

$$\begin{aligned}
&(x_1 - y_1) - (x_4 - y_4) + ((x_2 - y_2) + (x_3 - y_3))\, i = 0,\\
&(x_1 - y_1) - (x_4 - y_4) - ((x_2 - y_2) + (x_3 - y_3))\, i = 0,\\
&(x_1 - y_1) + (x_4 - y_4) + ((x_2 - y_2) - (x_3 - y_3))\, i = 0,\\
&(x_1 - y_1) + (x_4 - y_4) - ((x_2 - y_2) - (x_3 - y_3))\, i = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда получим

$$x_1 - y_1 = 0,\ x_2 - y_2 = 0,\ x_3 - y_3 = 0,\ x_4 - y_4 = 0$$

или $X - Y = 0$. Мы получили противоречие с условием $X \neq Y$.

Обратно, покажем, что любому спектру, состоящему из чисел вида (6) может соответствовать одно и только одно четырехмерное число. Действительно, пусть

$$\mu_1 = a + bi, \quad \mu_2 = a - bi, \quad \mu_3 = c + di, \quad \mu_4 = c - di$$

есть спектр некоторого четырехмерного числа. Тогда из формул (6) следует, что

$$x_1 = \frac{a+c}{2},\ x_2 = \frac{c-a}{2},\ x_3 = \frac{b+d}{2},\ x_4 = \frac{d-c}{2}\ .$$

Следствие 1 *Единственным числом, имеющим нулевой спектр является число* $0 = (0,0,0,0)$.

Замечание 1 *Спектрами базисных чисел являются* $\Lambda(J_1) = (1,1,1,1)$, $\Lambda(J_2) = (i,-i,i,-i)$, $\Lambda(J_3) = (i,-i,-i,i)$, $\Lambda(J_4) = (-1,-1,1,1)$.

Теорема 6 *Для любого четырехмерного числа* $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *справедливо равенство*

$$|X|^4 = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4.$$

Доказательство. Из соотношений (6) следует, что

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = (x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2, \quad \mu_3 \cdot \mu_4 = (x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2.$$

Следовательно, из равенства (2) следует $\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4 = |X|^4$.

Следствие 2 $|J_1| = 1,\ |J_2| = 1,\ |J_3| = 1,\ |J_4| = 1$.

Теорема 7 *Справедливы следующие соотношения:*

1. $\mu_i(X \pm Y) = \mu_i(X) \pm \mu_i(Y)$ *для любых* $X \in R^4$, $Y \in R^4$, $i = 1,2,3,4$;
2. $\mu_i(X \cdot Y) = \mu_i(X) \cdot \mu_i(Y)$ *для любых* $X \in R^4$, $Y \in R^4$, $i = 1,2,3,4$;
3. $\mu_i(b \cdot X) = b \cdot \mu_i(X)$, *для любых* $X \in R^4$, $b \in R^1$, $i = 1,2,3,4$;
4. $\mu_i(X^{-1}) = (\mu_i(X))^{-1}$ *для любого невырожденного* $X \in R^4$, $i = 1,2,3,4$,
5. $\mu_i(X^n) = \mu_i^n(X)$, *для любых* $X \in R^4$, $i = 1,2,3,4$, $n \in N$;

где $\mu_i(X)$ – i*-ый компонент спектра четырехмерного числа* X.

Доказательство. Справедливость соотношения 1) очевидна.

Докажем соотношение 2). Согласно (1) и (6)

$$\mu_1\left(X\cdot Y\right)=\left(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3+x_4y_4-x_1y_4-x_4y_1-x_2y_3-x_3y_2\right)+$$
$$\left(x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1-x_2y_4+x_3y_1-x_3y_4-x_4y_2-x_4y_3\right)\cdot i,$$
$$\mu_2\left(X\cdot Y\right)=\left(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3+x_4y_4-x_1y_4-x_4y_1-x_2y_3-x_3y_2\right)+$$
$$\left(-x_1y_2-x_1y_3-x_2y_1+x_2y_4-x_3y_1+x_3y_4+x_4y_2+x_4y_3\right)\cdot i,$$
$$\mu_3\left(X\cdot Y\right)=\left(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3+x_4y_4+x_1y_4+x_4y_1+x_2y_3+x_3y_2\right)+$$
$$\left(x_1y_2-x_1y_3+x_2y_1+x_2y_4-x_3y_1-x_3y_4+x_4y_2-x_4y_3\right)\cdot i,$$
$$\mu_4\left(X\cdot Y\right)=\left(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3+x_4y_4+x_1y_4+x_4y_1+x_2y_3+x_3y_2\right)+$$
$$\left(-x_1y_2+x_1y_3-x_2y_1-x_2y_4+x_3y_1+x_3y_4-x_4y_2+x_4y_3\right)\cdot i.$$

Аналогично,

$$\begin{array}{ll}
\mu_1\left(X\right)=\left(x_1-x_4\right)+\left(x_2+x_3\right)\cdot i, & \mu_1\left(Y\right)=\left(y_1-y_4\right)+\left(y_2+y_3\right)\cdot i,\\
\mu_2\left(X\right)=\left(x_1-x_4\right)-\left(x_2+x_3\right)\cdot i, & \mu_2\left(Y\right)=\left(y_1-y_4\right)-\left(y_2+y_3\right)\cdot i,\\
\mu_3\left(X\right)=\left(x_1+x_4\right)+\left(x_2-x_3\right)\cdot i, & \mu_3\left(Y\right)=\left(y_1+y_4\right)+\left(y_2-y_3\right)\cdot i,\\
\mu_4\left(X\right)=\left(x_1+x_4\right)-\left(x_2-x_3\right)\cdot i, & \mu_4\left(Y\right)=\left(y_1+y_4\right)-\left(y_2-y_3\right)\cdot i.
\end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1\left(X\right)\cdot\mu_1\left(Y\right)=&\left(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3+x_4y_4-x_1y_4-x_4y_1-x_2y_3-x_3y_2\right)+\\&+\left(x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1-x_2y_4+x_3y_1-x_3y_4-x_4y_2-x_4y_3\right)\cdot i=\mu_1(x\cdot y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_2\left(X\right)\cdot\mu_2\left(Y\right)=&\left(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3+x_4y_4-x_1y_4-x_4y_1-x_2y_3-x_3y_2\right)+\\&+\left(-x_1y_2-x_1y_3-x_2y_1+x_2y_4-x_3y_1+x_3y_4+x_4y_2+x_4y_3\right)\cdot i=\mu_2(x\cdot y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_3\left(X\right)\cdot\mu_3\left(Y\right)=&\left(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3+x_4y_4+x_1y_4+x_4y_1+x_2y_3+x_3y_2\right)+\\&+\left(x_1y_2-x_1y_3+x_2y_1+x_2y_4-x_3y_1-x_3y_4+x_4y_2-x_4y_3\right)\cdot i=\mu_3(x\cdot y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_4\left(X\right)\cdot\mu_4\left(Y\right)=&\left(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3+x_4y_4+x_1y_4+x_4y_1+x_2y_3+x_3y_2\right)+\\&+\left(-x_1y_2+x_1y_3-x_2y_1-x_2y_4+x_3y_1+x_3y_4-x_4y_2+x_4y_3\right)\cdot i=\mu_4(x\cdot y).\end{aligned}$$

Соотношение 3) следует из соотношения 2).

Докажем соотношение 4). Из соотношения 2) следует, что $\mu_i\left(X\cdot X^{-1}\right)=\mu_i(X)\cdot\mu_i(X^{-1})$. С другой стороны $X\cdot X^{-1}=J_1$. Из соотношений (6) следует, что $\mu_i\left(J_1\right)=1$ для всех $i=1,2,3,4$. Следовательно, $\mu_i\left(X^{-1}\right)=\dfrac{1}{\mu_i(X)}$.

Соотношение 5) также следует из соотношения 2).

Определив спектр четырехмерного числа находим его спектральную норму.

2.2 Определение нормы в четырехмерном пространстве M5

Определение 6 *Четырехмерное пространство называется нормированным, если в нем задана некоторая норма, которая удовлетворяет следующим условиям [13]:*
1) $\|X\| \geq 0$, $\|X\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $X = 0$,
2) $\|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$,
3) $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.

Лемма 2 $\|X\|_C = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2} + \sqrt{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2}\right)$ *является нормой четырехмерного пространства M5.*

Доказательство. В качестве доказательства проверяем выполнение условий определения 6. Первые два условия очевидны, докажем неравенство треугольника.

Для удобства рассмотрим два раздельных неравенства:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)^2 \geq 0, \qquad (C_1D_2 - C_2D_1)^2 \geq 0,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 – произвольные вещественные числа. Раскрываем скобки и после алгебраических преобразований получаем

$$2A_1A_2B_1B_2 \leq {A_1}^2{B_2}^2 + {A_2}^2{B_1}^2, \qquad 2C_1C_2D_1D_2 \leq {C_1}^2{D_2}^2 + {C_2}^2{D_1}^2.$$

Добавим к обеим частям первого неравенства $(A_1A_2)^2 + (B_1B_2)^2$, и второго неравенства $(C_1C_2)^2 + (D_1D_2)^2$, и извлекая корень напишем

$$A_1A_2 + B_1B_2 \leq \sqrt{\left({A_1}^2 + {B_1}^2\right)\left({A_2}^2 + {B_2}^2\right)},$$

$$C_1C_2 + D_1D_2 \leq \sqrt{\left({C_1}^2 + {D_1}^2\right)\left({C_2}^2 + {D_2}^2\right)}.$$

Умножив на 2 и добавляя к обеим частям первого неравенства ${A_1}^2 + {A_2}^2 + {B_1}^2 + {B_2}^2$ и второго неравенства ${C_1}^2 + {C_2}^2 + {D_1}^2 + {D_2}^2$, соответственно и повторно извлекая корень получим

$$\sqrt{(A_1 + A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2} \leq \sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2} + \sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2},$$

$$\sqrt{(C_1 + C_2)^2 + (D_1 + D_2)^2} \leq \sqrt{{C_1}^2 + {D_1}^2} + \sqrt{{C_2}^2 + {D_2}^2},$$

откуда следует

$$\frac{1}{2}\sqrt{(A_1 + A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(C_1 + C_2)^2 + (D_1 + D_2)^2} \leq$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2} + \frac{1}{2}\sqrt{{C_1}^2 + {D_1}^2} + \frac{1}{2}\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2} + \frac{1}{2}\sqrt{{C_2}^2 + {D_2}^2}$$

Введем следующие замены переменных:

$$A_1 = x_1 - x_4, A_2 = y_1 - y_4, ,\ B_1 = x_2 + x_3, B_2 {=} y_2 + y_3$$

$$C_1 = x_1 + x_4, C_2 = y_1 + y_4, D_1 = x_2 - x_3, D_2 = y_2 - y_3$$

Подставляя их в выражения получим

$$\|X + Y\|_C \leq \|X\|_C + \|Y\|_C$$

Лемма доказана.

Определение 7 *Спектральной нормой элемента $X \in R^4$ пространства M5 называется неотрицательное число:*

$$\|X\|_C = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2} + \sqrt{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2}\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} |\mu_k^x| \tag{7}$$

Описание спектральной нормы и ее свойств более подробно приведен в работе [16].

Лемма 3 $\|X\|_E = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2}$ *является нормой четырехмерного пространства M5.*

Доказательство. В качестве доказательства проверим выполнение условий определения 6. Рассмотрим следующее неравенство

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_4 - x_4y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_2y_4 - x_4y_2)^2 +$$
$$(x_3y_4 - x_4y_3)^2 \geq 0.$$

Раскрывая скобки перепишем следующим образом

$$\begin{aligned} &2x_1y_1x_2y_2 + 2x_1y_1x_3y_3 + 2x_1y_1x_4y_4 + 2x_2y_2x_3y_3 + 2x_2y_2x_4y_4 + 2x_3y_3x_4y_4 \leq \\ &\leq (x_1y_2)^2 + (x_1y_3)^2 + (x_1y_4)^2 + (x_2y_1)^2 + (x_2y_3)^2 + (x_2y_4)^2 + \\ &\qquad + (x_3y_1)^2 + (x_3y_2)^2 + (x_3y_4)^2 + (x_4y_1)^2 + (x_4y_2)^2 + (x_4y_3)^2. \end{aligned}$$

Добавляя $(x_1y_1)^2$, $(x_2y_2)^2$, $(x_3y_3)^2$, $(x_3y_3)^2$, $(x_4y_4)^2$ к обеим частям неравенства получаем

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 \leq \left(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2\right)\left(y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 + y_4{}^2\right)$$

Взяв корень и умножив на 2 получаем

$$2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_4y_4 \leq 2\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 + y_4{}^2}$$

или

$$\begin{aligned} &(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2 + (x_4 + y_4)^2 \leq \\ &\leq x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 + 2\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 + y_4{}^2} + \\ &\qquad + y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 + y_4{}^2, \end{aligned}$$

что эквивалентно

$$\|X + Y\|_E \leq \|X\|_E + \|Y\|_E.$$

Лемма доказана.

Определение 8 *Евклидовой нормой элемента $X \in R^4$ пространства M5 называется неотрицательное число:*

$$\|X\|_E = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{k=1}^{4} |\mu_k^x|^2} \tag{8}$$

Теорема 8 *Между спектральной (7) и евклидовой (8) нормами справедливы следующие неравенства*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|X\|_E \le \|X\|_C \le \|X\|_E.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие неравенства $0 \le \sqrt{A^2 - B^2} \le A$, где $0 \le |B| \le A$. Добавляя ко всем частям неравенств A получим $A \le A + \sqrt{A^2 - B^2} \le 2A$, или $2A \le A + B + 2\sqrt{A^2 - B^2} + A - B \le 4A$. И после несложных преобразований получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{A} \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{A+B} + \sqrt{A-B}\right) \le \sqrt{A} \tag{9}$$

Обозначим $A = \sum_{i=1}^{4} {x_i}^2$, $B = 2\,(x_1x_4 - x_2x_3)$, где $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, и (9) перепишем следующим образом

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sum_{i=1}^{4} {x_i}^2} \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{4} {x_i}^2 + 2\,(x_1x_4 - x_2x_3)} + \sqrt{\sum_{i=1}^{4} {x_i}^2 - 2\,(x_1x_4 - x_2x_3)}\right) \le \sqrt{\sum_{i=1}^{4} {x_i}^2},$$

что равносильно

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|X\|_E \le \|X\|_C \le \|X\|_E$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема утверждает, что нормы $\|X\|_E$ и $\|X\|_C$ эквивалентны. Таким образом, четырехмерное пространство R^4 является нормированным пространством.

Обозначим через N_0 подмножество четырехмерных чисел, удовлетворяющих условию

$$x_1x_4 = x_2x_3$$

Теорема 9 ***(свойства норм)*** *Множество элементов N_0 замкнуто относительно умножения и справедливы следующие равенства:*

1. *для любых $X, Y \in N_0$ $\|X\|_E = \|X\|_C$, $\|X \cdot Y\|_C = \|X\|_C \cdot \|Y\|_C$, $\|X \cdot Y\|_E = \|X\|_E \cdot \|Y\|_E$;*
2. *для любых $X, Y \in O_I$ $\|X\|_E = \sqrt{2}\|X\|_C$, $\|X \cdot Y\|_C = 2 \cdot \|X\|_C \cdot \|Y\|_C$, $\|X \cdot Y\|_E = \sqrt{2} \cdot \|X\|_E \cdot \|Y\|_E$;*
3. *для любых $X, Y \in O_{II}$ $\|X\|_E = \sqrt{2}\|X\|_C$, $\|X \cdot Y\|_C = 2 \cdot \|X\|_C \cdot \|Y\|_C$, $\|X \cdot Y\|_E = \sqrt{2} \cdot \|X\|_E \cdot \|Y\|_E$.*

Доказательство. Пусть $X, Y \in N_0$ и $Z = X \cdot Y$. Тогда из определения 1 умножения получим

$$z_1z_4 - z_2z_3 = (x_1x_4 - x_2x_3)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2\right) + (y_1y_4 - y_2y_3)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) = 0,$$

то есть $Z \in N_0$. Замкнутость N_0 относительно умножения доказана.

Докажем первое утверждение. Равенство $\|X\|_E = \|X\|_C$ при $X \in N_0$ следует из соотношения

$$\|X\|_C = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\|X\|_E^2 - 2(x_1x_4 - x_2x_3)} + \sqrt{\|X\|_E^2 + 2(x_1x_4 - x_2x_3)}\right).$$

Далее

$$\begin{aligned}&\|X\|_C = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{[(x_1-x_4)(y_1-y_4)-(x_2+x_3)(y_2+y_3)]^2+[(x_2+x_3)(y_1-y_4)+(x_1-x_4)(y_2+y_3)]^2}+\right.\\ &\left.+\sqrt{[(x_1+x_4)(y_1+y_4)-(x_2-x_3)(y_2-y_3)]^2+[(x_2-x_3)(y_1+y_4)+(x_1+x_4)(y_2-y_3)]^2}\right).\end{aligned}$$

Раскрывая скобки и приведя подобные члены получим

$$\begin{aligned}&\|X\|_C = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\left[(x_1-x_4)^2+(x_2+x_3)^2\right]\left[(y_1-y_4)^2+(y_2+y_3)^2\right]}+\right.\\ &\left.\sqrt{\left[(x_1+x_4)^2+(x_2-x_3)^2\right]\left[(y_1+y_4)^2+(y_2-y_3)^2\right]}\right) = \|X\|_E\|Y\|_E = \|X\|_C\|Y\|_C,\end{aligned}$$

так как $X, Y \in N_0$. Третье равенство следует из первых двух.

Докажем второе утверждение. Пусть $X = (x_1, x_2, -x_2, x_1) \in O_I$. Тогда

$$\|X\|_C = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \|X\|_E = \sqrt{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Если $Y = (y_1, y_2, -y_2, y_1) \in O_I$, то

$$X \cdot Y = (2x_1y_1 - 2x_2y_2, 2x_2y_1 + 2x_1y_2, -2x_2y_1 - 2x_1y_2, 2x_1y_1 - 2x_2y_2).$$

Следовательно,

$$\|XY\|_C = \frac{1}{2}\sqrt{16(x_1y_1 - x_2y_2)^2 + 16(x_2y_1 + x_1y_2)^2} = 2\|X\|_C\|Y\|_C.$$

Третье равенство следует из первых двух. Теорема доказана.

Таким образом, на вырожденных числах спектральная норма достигает своего относительного минимума, на множестве N_0 она достигает своего относительного максимума и совпадает с евклидовой нормой.

2.3 Числовая последовательность и ее предел

Определение 9 *Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое четырехмерное число $A^{(n)} = \left(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, a_4^{(n)}\right)$. Совокупность элементов $A^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots,$ называется последовательностью четырехмерных чисел, или просто последовательностью. Каждый элемент $A^{(n)}$ называется элементом этой последовательности, а число n – его номером.*

Числовую последовательность с элементами $A^{(n)}$ обозначим $\left\{A^{(n)}\right\}$ [?].

Определение 10 *Последовательность четырехмерных чисел* $\left\{A^{(n)}\right\}$ *является сходящейся, если существует такое четырехмерное число* A*, что для любого* $\epsilon > 0$ *найдется такой номер* n_ϵ*, что для всех* $n \geq n_\epsilon$ *выполняется неравенство* $\left\|A^{(n)} - A\right\|_\Lambda < \epsilon$*. При этом четырехмерное число* A *называется пределом последовательности четырехмерных чисел* $\left\{A^{(n)}\right\}$.

Четырехмерные последовательности, не являющиеся сходящимися, называются расходящимися.

Теорема 10 *Последовательность четырехмерных чисел* $\left\{A^{(n)}\right\}$ *сходится тогда и только тогда, когда каждая компонента сходится как одномерная последовательность.*

Доказательство.

1. Пусть последовательность четырехмерных чисел $\left\{A^{(n)}\right\}$ сходится к числу A, то по определению 10 получаем $\left\|A^{(n)} - A\right\|_C < \epsilon$, для всех $n > n_\epsilon$. Раскрывая $A^{(n)}$ и A на компоненты, получим

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(a_1^{(n)} - a_4^{(n)} - a_1 + a_4\right)^2 + \left(a_2^{(n)} + a_3^{(n)} - a_2 - a_3\right)^2} + \\ + \frac{1}{2}\sqrt{\left(a_1^{(n)} + a_4^{(n)} - a_1 - a_4\right)^2 + \left(a_2^{(n)} - a_3^{(n)} - a_2 + a_3\right)^2} < \epsilon. \quad (10)$$

Из (10) следует

$$\sqrt{\left(a_1^{(n)} - a_4^{(n)} - a_1 + a_4\right)^2 + \left(a_2^{(n)} + a_3^{(n)} - a_2 - a_3\right)^2} < 2\epsilon,$$

$$\sqrt{\left(a_1^{(n)} + a_4^{(n)} - a_1 - a_4\right)^2 + \left(a_2^{(n)} - a_3^{(n)} - a_2 + a_3\right)^2} < 2\epsilon.$$

Выполним несложные алгебраические операции

$$\left(a_1^{(n)} - a_4^{(n)} - a_1 + a_4\right)^2 < 4\epsilon^2,$$

$$\left(a_2^{(n)} + a_3^{(n)} - a_2 - a_3\right)^2 < 4\epsilon^2,$$

$$\left(a_1^{(n)} + a_4^{(n)} - a_1 - a_4\right)^2 < 4\epsilon^2,$$

$$\left(a_2^{(n)} - a_3^{(n)} - a_2 + a_3\right)^2 < 4\epsilon^2,$$

$$\left|\left(a_1^{(n)} - a_1\right) - \left(a_4^{(n)} - a_4\right)\right| < 2\epsilon,$$

$$\left|\left(a_2^{(n)} - a_2\right) - \left(a_3^{(n)} - a_3\right)\right| < 2\epsilon,$$

$$\left|\left(a_1^{(n)} - a_1\right) + \left(a_4^{(n)} - a_4\right)\right| < 2\epsilon,$$

$$\left|\left(a_2^{(n)} - a_2\right) + \left(a_3^{(n)} - a_3\right)\right| < 2\epsilon.$$

После суммирования и вычитания получим

$$\left|a_1^{(n)}-a_1\right|<4\epsilon,\quad \left|a_2^{(n)}-a_2\right|<4\epsilon,\quad \left|a_3^{(n)}-a_3\right|<4\epsilon,\quad \left|a_4^{(n)}-a_4\right|<4\epsilon.$$

2. Пусть теперь последовательность четырехмерных чисел $\left\{\mathrm{A}^{(\mathrm{n})}\right\}$ сходится к числу A покомпонентно как одномерные последовательности, т.е.

$$\left|a_1^{(n)}-a_1\right|<\epsilon,\quad \left|a_2^{(n)}-a_2\right|<\epsilon,\quad \left|a_3^{(n)}-a_3\right|<\epsilon,\quad \left|a_4^{(n)}-a_4\right|<\epsilon.$$

Проводя предыдущие алгебраические операции в другую сторону, несложно получить оценку

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(a_1^{(n)}-a_4^{(n)}-a_1+a_4\right)^2+\left(a_2^{(n)}+a_3^{(n)}-a_2-a_3\right)^2}+ \\ +\frac{1}{2}\sqrt{\left(a_1^{(n)}+a_4^{(n)}-a_1-a_4\right)^2+\left(a_2^{(n)}-a_3^{(n)}-a_2+a_3\right)^2}<2\epsilon.$$

или $\left\|A^{(n)}-A\right\|_C<2\epsilon$. Теорема доказана.

Таким образом, если расходится хотя бы одна компонента последовательности четырехмерных чисел, то последовательность является расходящейся.

Пример 1 *Пусть* $A^{(n)}=\left(\frac{n}{a^n};\ \frac{1}{n};\ \frac{5n+5}{n};\ \frac{1}{n^5}\right)$, *эта последовательность сходится, так как сходятся все компоненты* $\lim_{x\longrightarrow\infty}A^{(n)}\ =A=(0,\ 0,\ 5,\ 0)$.

Пример 2 *Пусть* $A^{(n)}=\left(\sin\ n;\ \frac{1}{n};\ \frac{5n+5}{n^4};\ \frac{n^5}{e^n}\right)$, *эта последовательность расходящаяся, так как первый элемент последовательности является расходящимся.*

3 Заключение

В данной статье приведено описание пространства M5 четырехмерных чисел, в котором введены операции сложения, вычитания и умножения, а также определены их свойства коммутативности, ассоциативности умножения и сочетательности умножения относительно сложения. Определены нормы и метрика в рассматриваемом пространстве и доказаны свойства норм.

Исследованы последовательности четырехмерных чисел, определены их свойства, а также доказаны критерии сходимости. Результаты проделанной работы показывают, что пространство четырехмерных чисел M5 является естественным расширением соответствующих пространств вещественных и комплексных чисел.

Список литературы

[1] William R. Hamilton. Lectures on Quaternions: containing a systematic statement of a new mathematical method. – Dublin University Press, 1853. – 868 pp.

[2] A. Sudbery, Quaternionic analysis // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1979. – V. 85. – P. 199-225.

[3] A. Buchman, "A brief history of quaternions and the theory of holomorphic functions of quaternionic variables", https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/46/HOMSIGMAA/Buchmann.pdf

[4] Tsit Lam. Hamilton's quaternions // Handbook of Algebra. – 2003. – №3. – P. 429-454. DOI: https://doi.org/10.1016/S1570-7954(03)80068-2

[5] D. Eberly, "Quaternion algebra and calculus" https://www.geometrictools.com/Documentation/Quaternions.pdf

[6] S.L. Alder. Quaternionic quantum field theory // Commun. Math. Phys. – 1986. – V. 104. – P. 611-656.

[7] S.L. Adler. Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields. – New York: Oxford University Press, 1995.

[8] A. Baker. Right eigenvalues for quaternionic matrices: A topological approach // Linear Algebra Appl. – 1999. – V. 286. – P. 303-309.

[9] A. Brauer. Limits for the characteristic roots of matrices II // Duke Math. J. – 1947 – V. 14. – P. 21-26.

[10] J.L. Brenner. Matrices of quaternions // Pac. J. Math. – 1959. – V. 1. – P. 329-335.

[11] A. Cayley. On certain results relating to quaternions // Philos. Mag. – 1845. – V. 26. – P. 141-145.

[12] L. Chen. Definition of determinant and Cramer solution over the quaternion field // Acta Math. Sinica (N.S.). – 1991. – V. 7. – P. 171-180.

[13] Кантор И.Л, Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973. – 144 с.

[14] A. Skowronski and K. Yamagata. Frobenius Algebras I. Basic Representation Theory. – European mathematical society publishing house, 2012. – 662 c.

[15] Маукеев Б.И., Абенов М.М. Начальные главы теории функций бикомплексного переменного. – Алматы: ТОО «МТИА», 2003. – 58 с.

[16] Абенов М.М. Четырехмерная математика: Методы и приложения. Научная монография. – Алматы.: Издательство, 2019. – 176 с.

[17] L. Hsu. On symmetric, orthogonal, and skew symmetric matrices // Proc. Edinburg Math. Soc., ser. 2. – 1953. – V. 10. – P. 37-44.

[18] R. Bellman. Notes on matrix theory // Amer. Math. Monthly. – 1953. – V. 60. – P. 173-175.

[19] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. – 716 с.

[20] Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 280 с.

[21] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.

[22] Сидоров В.Ю., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982. – 488 с.

[23] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

[24] Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. К структуре ортогональной матрицы // Труды Физ.-мат. Отдела ВУАН. Киев. – 1929. – С. 1-8.

[25] Абенов М.М., Габбасов М.Б. Анизотропные четырехмерные пространства или новые кватернионы. – Препринт, Нур-Султан. – 2020.

References

[1] William R. Hamilton, *Lectures on Quaternions: containing a systematic statement of a new mathematical method* (Dublin University Press, 1853, 868 pp.).

[2] A. Sudbery, "Quaternionic analysis", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **85**(1979), 199-225.

[3] A. Buchman, "A brief history of quaternions and the theory of holomorphic functions of quaternionic variables", https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/46/HOMSIGMAA/Buchmann.pdf

[4] Tsit Lam, "Hamilton's quaternions", *Handbook of Algebra* 3(2003), 429-454. DOI: https://doi.org/10.1016/S1570-7954(03)80068-2

[5] D. Eberly, "Quaternion algebra and calculus", https://www.geometrictools.com/Documentation/Quaternions.pdf

[6] S.L. Alder, "Quaternionic quantum field theory", *Commun. Math. Phys.* **104**(1986), 611-656.

[7] S.L. Adler, *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields* (New York: Oxford University Press, 1995).

[8] A. Baker, "Right eigenvalues for quaternionic matrices: A topological approach", *Linear Algebra Appl.* **286**(1999), 303-309.

[9] A. Brauer, "Limits for the characteristic roots of matrices II", *Duke Math. J.* **14**(1947), 21-26.

[10] J.L. Brenner, "Matrices of quaternions", *Pac. J. Math.* **1**(1959), 329-335.

[11] A. Cayley, "On certain results relating to quaternions", *Philos. Mag.* **26**(1845), 141-145.

[12] L. Chen, "Definition of determinant and Cramer solution over the quaternion field", *Acta Math. Sinica (N.S.)* **7**(1991), 171-180.

[13] Kantor I.L., Solodovnikov A.S., *Giperkompleksnie chisla [Hyper complex numbers]* (M.: Nauka, 1973, 144 p.) [in Russian].

[14] A. Skowronski and K. Yamagata, *Frobenius Algebras I. Basic Representation Theory* (European mathematical society publishing house, 2012, 662 pp.)

[15] Maukeev B.E., Abenov M.M., *Nachal'nie glavy teorii funksii bikompleksnogo peremennogo [The initial chapters of the theory of functions of a bicomplex variable]* (Almaty: LLP «MTIA», 2003, 58 pp.) [in Russian].

[16] Abenov M.M., *Chetirehmernaya matematika. Metody i prilozheniya. Nauchnaya monographia [Four-dimensional mathematics: Methods and applications. Scientific monograph]* (Almaty: Publishing House, 2019, 176 pp.)

[17] L. Hsu, "On symmetric, orthogonal, and skew symmetric matrices", *Proc. Edinburg Math. Soc., ser. 2.* **10**(1953), 37-44.

[18] R. Bellman, "Notes on matrix theory", *Amer. Math. Monthly* **60**(1953), 173-175.

[19] Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funksii kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of a complex variable]* (M.: Nauka, 1965, 716 pp.) [in Russian].

[20] Bitsadze A.V., *Osnovi teorii analyticheskih funksii kompleksnogo peremennogo [Fundamentals of the theory of analytic functions of a complex variable]* (M.: Nauka, 1984, 280 pp.) [in Russian].

[21] Kolmogorov A.N., Fomin S.V., *Elemenri teorii funksii i funksional'nogo analyza [Elements of function theory and functional analysis]* (M.: Nauka, 1989, 624 pp.) [in Russian].

[22] Sidorov V.Yu., Fedoryuk M.I., Shabunin M., *Leksii po teorii funksii kompleksnogo peremennogo [Theory of functions of complex variables]* (M.: Nauka, 1982, 488 pp.) [in Russian].

[23] Gantmakher F.R., *Teoriya matrits [Matrix theory]* (M.: Nauka, 1967, 576 pp.) [in Russian].

[24] Gantmakher F.R. and Krein M.G., *K stukture ortogonal'noi matrisi [To a structure of orthogonal matrix]* (Trudy Fiz.-Mat. Otdela VUAN, Kiev, 1929, P. 1-8) [in Russian].

[25] Abenov M.M., Gabbassov M.B., *Anyzotropnie chetirehmernie prostranstva ili novie kvaternioni [Anisotropic four-dimensional spaces or new quaternions]* (Preprint, Nur-Sultan, 2020) [in Russian].