УДК 517.927.4

А.Б. Тунгатаров

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан; e-mail: tun-mat@list.ru

Задача Коши для одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка *

В работе доказано существование непрерывных решений задачи Коши в окрестности некоторой точки x_0 числовой прямой для одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Для доказательства теоремы Пеано использованы построенное автором общее решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами и принцип неподвижной точки Шаудера. Метод построения общего решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами и само общее решение могут быть полезны для решения различных прикладных задач естествознания. Для простоты изложения коэффициент и нелинейная часть обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка взяты из класса непрерывных функции. Их можно взять из класса измеримых и существенно ограниченных функции. Легко можно проверить, что результаты работы остаются в силе и в этом случае.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, теорема Пеано, непрерывное решение, принцип Шаудера, общее решение.

A.B. Tungatarov

Cauchy problem for class of second order nonlinear ordinary differential equations

In the work for class of second order nonlinear ordinary differential equations with variable coefficients in the neighbourhood of a point x_0 of real line the existence of continuous solutions of Cauchy problem is proved. Constructed by the author the general solution of the second order linear differential equations with variable coefficients and Schauder's principle for fixed point are used for proving of the Peano's theorem. Construction method of the general solution of linear differential equations of the second order with variable coefficients and the general solution can be useful for solving of different applied problems of natural science. For simplicity, the coefficient and nonlinear part of ordinary differential equation of the second order are taken of class of continuous functions. It can be taken of class measurable and essentially limited functions. It is easy to verify, that the results of the work are true in this case.

Key words: {Nonlinear equation, Peano's theorem, continuous solution, Schauder's principle, general solution.}

*Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 527/ГФ, 2013г.-2015г.

Ә.Б. Түнғатаров

Сызықты емес екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулердің бір классы үшін Коши есебі

Мақалада сызықты емес екінші ретті жәй дифференциалдық бір классы үшін Коши есебі шешілген. Жұмыста бір екінші ретті сызықты емес жәй дифференциалдық теңдеулер классы үшін сан өсіндегі кезкелген x_0 нүктесінің бір аймағында Коши есебінің үзіліссіз шешімдерінің барлығы дәлелденеді. Пеано теоремасының дәлелденуі үшін автор құрған сызықтық айнымалы коэффициенттері бар екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімі және Шаудердің қозғалмайтын нүкте принципі пайдаланылады. Екінші ретті айнымалы коэффициенттері бар сызықты жәй дифференциалды теңдеулердің жалпы шешімін табу әдісі және сол жалпы шешім әртүрлі қолданбалы есептерді шешуде пайдаға асуы мүмкін. Мақаланы оңай оқу үшін теңдеудің коэффициенті мен сызықты емес бөлігін үзіліссіз функциялар класынан алынған. Оларды тек өлшенетін және ақырлы функциялар класынан алуға болады. Мұндай жағдайда да мақаланың нәтижелерінің дұрыс болатындығын оңай көрсетуге болады.

Түйін сөздер: {Сызықты емес теңдеу, Пеано теоремасы, үзіліссіз шешім, Шаудер принципі, жалпы шешім.}

1.Введение.

Пусть $-\infty < x_1 < x_0 < x_2 < \infty$. Рассмотрим в $[x_1, x_2]$ уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a(x)u = f(x, u), \tag{1}$$

где $a(x) \in C[x_1, x_2]$, а функция $f(x, u)$ непрерывна по совокупности переменных в области $|x - x_0| \le \delta, |u - \alpha| \le \sigma$. Здесь $u(x_0) = \alpha$; δ и σ - положительные числа, $\delta < |x_2 - x_1|$. Связь между числами δ и σ определим в дальнейшем.

Ищем решения уравнения (1) из класса $C^2[x_1, x_2]$, удовлетворяющие начальным условиям

$$u(x_0) = \alpha, u'(x_0) = \beta, \tag{2}$$

где α и β - заданные действительные числа.

В настоящей работе мы доказываем теорему Пеано о существовании решений уравнения (1) из класса

$$C^2[x_0 - \delta, x_0 + \delta], \tag{3}$$

удовлетворяющие условиям (2).

При доказательстве теоремы Пеано мы применим принцип Шаудера [1]. Следует отметить, что эта теорема будет справедлива и в более общем случае, когда $a(x) \in S[x_1, x_2]$ и $u(x) \in W^2_\infty[x_1, x_2] \cap C[x_1, x_2]$. Здесь $S[x_1, x_2]$ - класс существенно ограниченных и измеримых в $[x_1, x_2]$ функций, а $W^2_\infty[x_1, x_2]$ - класс функции $f(x)$, для которых $f''(x) \in S[x_1, x_2]$.

В работе [2-4] нами построено общее решение уравнения

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a(x)u = 0 \tag{4}$$

При доказательстве существования непрерывных решений задачи Коши для уравнения (1) мы существенно используем общее решение уравнения (4), построенное в [2-4]. Можно отметить, что общее решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в математической литературе за исключением указанных наших работ не имеется.

2.Приведение уравнения (1) к интегральному уравнению.

В работах [2-4] построено общее решение уравнения (4) в виде

$$u(x) = c_1 I_1(x) + c_2 I_2(x), \tag{5}$$

где c_1, c_2 - произвольные действительные числа,

$$I_1(x) = x - x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x), I_2(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x),$$

$$a_1(x) = -\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{y}(t-x_0)a(t)dtdy, b_1(x) = -\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{y}a(t)dtdy,$$

$$a_k(x) = -\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{y}a(t)a_{k-1}(t)dtdy, b_1(x) = -\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{y}a(t)b_{k-1}(t)dtdy,$$

$(k = \overline{2,\infty})$.

Функции $I_1(x)$ и $I_2(x)$ составляют линейно независимую систему и удовлетворяют уравнению (4):

$$I_1''(x) + a(x)I_1(x) = 0, I_2''(x) + a(x)I_2(x) = 0 \tag{6}$$

и начальным условиям

$$I_1(x_0) = I_2'(x_0) = 0, I_2(x_0) = I_1'(x_0) = 1 \tag{7}$$

Имеют место следующие легко проверяемые неравенства:

$$|I_1(x)| \le \frac{1}{\sqrt{|a|_1}} sh(\sqrt{|a|_1}|x-x_0|), |I_2(x)| \le ch(\sqrt{|a|_1}|x-x_0|), \tag{8}$$

$$|I_1(x)| \le |x-x_0| ch(\sqrt{|a|_1}|x-x_0|), |I_2(x)-1| \le \sqrt{|a|_1}|x-x_0| sh(\sqrt{|a|_1}|x-x_0|), \tag{9}$$

$$|I_1(x_4) - I_1(x_3)| \le |x_4 - x_3| ch\delta_1, |I_2(x_4) - I_2(x_3)| \le \frac{|x_4-x_3|}{\sqrt{|a|_1}} sh\delta_1, \tag{10}$$

где $|a|_1 = \max\limits_{x_1 \le x \le x_2} |a(x)|, \delta_1 = \sqrt{|a|_1}\delta, x_1 \le x_3 < x_4 \le x_2$.

Покажем, что Вронскиан функций $I_1(x)$ и $I_2(x)$ равен минус единице:

$$W(x) = -1 \tag{11}$$

В силу (6) имеем

$$W'(x) = (I_1(x)I_2(x) - I_2(x)I_1'(x))' = I_1(x)I_2''(x) -$$

$$-I_2(x)I_1''(x) = a(x)(-I_1(x)I_2(x) + I_2(x)I_1(x)) = 0$$

Поэтому $W(x) = const$. Но из (7) следует, что $W(x_0) = -1$. Следовательно, имеет место (11).

Следуя методу вариации произвольных постоянных, решения уравнения (1) ищем в виде

$$u(x) = c_1(x)I_1(x) + c_2(x)I_2(x), \tag{12}$$

где $c_1(x), c_2(x)$ - неизвестные функции из класса $C^1[x_1, x_2]$, Считая пока правую часть уравнения (1) известной, по методу вариации произвольных постоянных получим систему для определения функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$:

$$c_1'(x)I_1(x) + c_2'(x)I_2(x) = 0,$$

$$c_1'(x)I_1'(x) + c_2'(x)I_2'(x) = f(x, u).$$

Отсюда в силу (11) имеем

$$c_1(x) = \int\limits_{x_0}^{x} I_2(t)f(t, u)dt + c_1, c_2(x) = -\int\limits_{x_0}^{x} I_1(t)f(t, u)dt + c_2, \tag{13}$$

где c_1 и c_2 произвольные действительные числа. Из (12) и (13) следует

$$u(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x, t)f(t, u)dt + c_1I_1(x) + c_2I_2(x), \tag{14}$$

где $K(x, t) = I_1(x)I_2(t) - I_2(x)I_1(t)$.

Теперь покажем, что любое решение уравнения (14) из класса $C[x_1, x_2]$ удовлетворяет уравнению (1).

Теорема 1. Любое решение уравнения (14) из класса $C[x_1, x_2]$ принадлежит классу $C^2[x_1, x_2]$ и удовлетворяет уравнению (1).

Доказательство. Очевидно, что правая часть уравнения (14) принадлежит классу $C^1[x_1, x_2]$. Поэтому из (14) получим

$$u'(x) = I_1'(x)\int\limits_{x_0}^{x} I_2(t)f(t, u)dt - I_2'(x)\int\limits_{x_0}^{x} I_1(t)f(t, u)dt + c_1I_1'(x) + c_2I_2'(x) \tag{15}$$

Правая часть равенства (15) принадлежит классу $C^2[x_1, x_2]$. Поэтому $u(x) \in C^2[x_1, x_2]$. Следовательно, из (15) в силу (6) и (11) вытекает

$$u''(x) = -a(x)(\int\limits_{x_0}^{x} K(x, t)f(t, u)dt + c_1I_1(x) + c_2I_2(x)) +$$

$$+f(x,u) = -a(x)u(x) + f(x,u)$$

Теорема доказана.

3. Доказательство существования непрерывных решений задачи Коши для уравнения (1).

В пункте 2 доказано, что любое решение уравнения (14) из класса $C[x_1, x_2]$ принадлежит классу $C^2[x_1, x_2]$ и удовлетворяет уравнению (1). Теперь мы рассмотрим решения уравнения (14), удовлетворяющие начальным условиям (2). Для этого из (14) и (15) с учетом (7) получим $c_2 = \alpha, c_1 = \beta$. Итак, любое решение из класса $C[x_1, x_2]$ уравнения

$$u(x) = (Au)(x), \tag{16}$$

где

$$(Au)(x) = \beta I_1(x) + \alpha I_2(x) + \int\limits_{x_0}^{x} K(x,t)f(t,u)dt,$$

будет и решением задачи Коши для уравнения (1).

Пусть

$$(\gamma K_1 + |\beta| ch\delta_1 + |\alpha|\sqrt{|a|_1} sh\delta_1)\delta \leq \sigma, \tag{17}$$

где $K_1 = \max\limits_{x_1<x,t<x_2} |K(x,t)|, \gamma$ - максимум функции $|f(x,u)|$ в область $|x-x_0| < \delta, |u-\alpha| < \sigma$. Неравенства (17) всегда можно добиться за счет малости числа δ. Имеет место

Теорема 2 (Пеано). Пусть $a(x) \in C[x_1, x_2]$, а функция $f(x,u)$ непрерывна по совокупности переменных в область $|x - x_0| < \delta, |u - \alpha| \leq \sigma$. Тогда на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, где число δ удовлетворяет условию (17), существует хотя бы одно решение уравнения (1) из класса (3), удовлетворяющее условию (2).

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно доказать существование решений из класса $C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ уравнения (16).

Пусть $||u|| = \max\limits_{|x-x_0|<\delta} |u(x)|$. Рассмотрим оператор A, определенный равенством

$$(Au)(x) = \beta I_1(x) + \alpha I_2(x) + \int\limits_{x_0}^{x} K(x,t)f(t,u)dt$$

на шаре $||u - \alpha|| \leq \sigma$ пространства $C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Покажем, что оператор A вполне непрерывен на этом шаре. Если последовательность $\{u_n(x)\}$, принадлежащая шару $||u - \alpha|| \leq \sigma$, равномерно сходится к функции $u(x)$, очевидно, принадлежащий тому же шару, то в силу непрерывности функции $f(x,u)$ последовательность $\{f(x, u_n(x))\}$ равномерно сходится к функции $f(x, u(x))$ на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Отсюда в силу возможности предельного перехода под знаком интеграла при равномерной сходимости следует, что последовательность $\{(Au_n(x))\}$ равномерно сходится к $(Au)(x)$, т.е. оператор A непрерывен на шаре $||u - \alpha|| \leq \sigma$.

Для любого элемента $u(x)$ шара $||u - \alpha|| \leq \sigma$ в силу неравенств (8) получим

$$|(Au)(x)| \leq \frac{|\beta|}{\sqrt{|a|_1}} sh\delta_1 + |\alpha| ch\delta_1 + \gamma K_1 \delta \tag{18}$$

Если x_3 и x_4 - две любые точки отрезка $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, то в силу неравенств (10) будем иметь

$$|(Au)(x_4)-(Au)(x_3)| \leq K_1\gamma|x_4-x_3|+|\beta|ch\delta_1|x_4-x_3|+\frac{|\alpha|sh\delta_1}{\sqrt{|a|_1}}|x_4-x_3| =$$

$$= (K_1\gamma+|\beta|ch\delta_1+\frac{|\alpha|sh\delta_1}{\sqrt{|a|_1}})|x_4-x_3| \qquad (19)$$

Неравенства (18) и (19) в силу теоремы Арцела показывает, что оператор A преобразует шар $||u-\alpha|| \leq \sigma$ в компактное множество. Покажем теперь, что оператор A преобразует этот шар в себя. В самом деле, в силу неравенств (9) следует

$$|(Au)(x)-\alpha| \leq |\int\limits_{x_0}^{x} K(x,t)f(t,u)dt|+|\beta||I_1(x)|+\alpha|I_2(x)-1| \leq$$

$$\leq \gamma K_1\delta+|\beta|ch\delta_1\delta+|\alpha|\sqrt{|a|_1}sh\delta_1\delta = (\gamma K_1+|\beta|ch\delta_1+|\alpha|\sqrt{|a|_1}sh\delta_1)\delta$$

и в силу неравенства (17) отсюда получим

$$|(Au)(x)-\alpha| < \sigma$$

Таким образом, оператор A удовлетворяет всем условиям теоремы Шаудера. Поэтому существует неподвижная точка этого оператора, т.е., такая функция $u(x)$, что

$$u(x) = \beta I_1(x)+\alpha I_2(x)+\int\limits_{x_0}^{x} K(x,t)f(t,x)dt$$

Следовательно, в силу теоремы 1 существует решение задачи Коши для уравнения (1). Теорема доказана.

Замечание.

Легко можно проверить, что теорема Пеано будет справедлива и в более общем случае, когда $a(x) \in S[x_1,x_2]$ и $u(x) \in W^2_\infty[x_1,x_2] \cap C[x_1,x_2]$.

Список литературы

[1] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 519 с.

[2] *Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K.* General solution of second order linear ordinary differential equations with variable coefficients // Journal of Inequalities and Special Functions ISSN: 2217-4303.URL:HTTP://www.ILIRIAS.COM –2012,– v. 3, Issue 4, – P. 42-49.

[3] *Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K.* Cauchy problem for one class of ordinary differential equations. // International Journal of Mathematical Analysis, –2012, – v. 6, № 14, – P. 695-699.

[4] *Тунгатаров А., Ахмед-Заки Д.К.* Задача Коши для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2011. –№ 3 (70). – С. 31-35.

List of references

[1] *Lusternik L.A., Sobolev V.I.* Elementy funkzional'nogo analiza. – M.: Nauka, 1965. – 519 p.

[2] *Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K.* General solution of second order linear ordinary differential equations with variable coefficients // Journal of Inequalities and Special Functions ISSN: 2217-4303.URL:HTTP://www.ILIRIAS.COM –2012,– v. 3, Issue 4, – P. 42-49.

[3] *Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K.* Cauchy problem for one class of ordinary differential equations. // International Journal of Mathematical Analysis, –2012, – v. 6, № 14, – P. 695-699.

[4] *Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K.* Zadacha Koshi dla odnogo klassa obyknovennyh differenzial'nyh uravnenii vtorogo poradka // Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf. – 2011. –№ 3 (70). – P. 31-35.

Поступила в редакцию 6 января 2013 года