УДК 517.968.23

Ж.Б. Алдашова
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы
e-mail: aldashova.zhanar1@yandex.kz

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА

Впервые существование и единственность решения, нетеровая разрешимость рассматриваемого сингулярного интегрального уравнения в $L_p(E), p > 2$ получены В.С. Виноградовым в работе "О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения". Эти результаты продолжены И.И. Комяком в $L_p(E), p > 1$, для случая более общего уравнения в работе "О разрешимости одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений". А в данной статье изучена разрешимость одного сингулярного интегрального уравнения в пространствах Бесова $B^{\alpha}_{p,1}(E), 1 < p < 2, \alpha = \frac{2}{p} - 1$ не вложенные в $L_q(E)$ ни при каком $q > 2$. Разрешимость рассматриваемого сингулярного интегрального уравнения эквивалентно непрерывной разрешимости дифференциального уравнения Бельтрами $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \mu(z)\frac{\partial w}{\partial z}$=0. Доказана нетеровая разрешимость сингулярного интегрального уравнения, показано, что индекс равен нулю и ядро состоит только из нуля.В явном виде приведены операторы-регуляризаторы для рассматриваемого уравнения. Эти результаты дают существование непрерывного гомеоморфизма уравнения Бельтрами.

Ключевые слова: сингулярный оператор, сингулярное интегральное уравнение, уравнение Бельтрами, регуляризатор, ограниченный оператор, индекс оператора, гомеоморфизм, обратный оператор.

Zh. B. Aldashova

About decidability of singular integral equation in Besov space

The existence and uniqueness of solutions of singular integral equation in $L_p(E), p > 2$ obtained by V.S. Vinogradov in the paper "On the solvability of a singular integral equation". These results continued by I.I. Komyak in $L_p(E), p > 1$ in the case of a more general equation in the paper "On the solvability of a class of two-dimensional singular integral equations". And in this article studied the solubility of a singular integral equation in Besov spaces $B^{\alpha}_{p,1}(E), 1 < p < 2, \alpha = \frac{2}{p} - 1$ but not embedded in $L_q(E)$ not any $q > 2$. Solvability of this equation is equivalent to continuous solvability of the differential Beltrami equation $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \mu(z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0$. Shown to be Noetherian solubility of singular integral equation, proved that the index is zero and the kernel consists only of zero.We explicitly construct the operator - regulyarizators have considered a singular integral. These results suggest the existence of a continuous homeomorphism of the Bel′trami equation.

Key words: {singular operator, singular equation, kernel of operator ,index of operator, homeomorphism, analytic functions, Bel′trami equation, bounded operator.}

Ж.Б. Алдашова

Бір сингуляр интегралдық теңдеудің Бесов кеңістігіндегі шешімі

Алғашқы рет $L_p(E), p > 2$ кеңістігінде қарастырылып жатқан сингуляр интегралдық теңдеудің шешімінің бар болуын және жалғыздығын В.С. Виноградов "Бір сингуляр интегралдық теңдеудің шешілуі туралы"атты жұмысында көрсеткен. Ал бұл нәтижелер $L_p(E), p > 1$ үшін сингуляр интегралдық теңдеудің жалпы түріне И.И.Комяк "Бір екіөлшемді сингуляр интегралдық теңдеулер класының шешілуі туралы"атты жұмысында жалғастырған. Ал бұл мақалада бір сингуляр интегралдық теңдеудің ешқандай $q > 2$ кезінде $L_q(E)-$ға енгізілмеген Бесов класындағы $B^{\alpha}_{p,1}(E), 1 < p < 2, \alpha = \frac{2}{p} - 1$ шешімі толығымен қарастырылады. Қарастырылып жатқан сингуляр интегралдық теңдеудің шешілімі Бельтрами дифференциалдық теңдеуінің $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \mu(z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ үзіліссіз шешіліміне эквивалентті. Оның нетерлік шешілімі көрсетілген. Индексінің нөлге тең екені және ядросы тек қана нөлден тұратыны дәлелденген. Анық түрде оператор - регуляризаторлар құрастырылған. Бұл нәтижелер Бельтрами теңдеуінің үзіліссіз гомеоморфизмі бар екенін көрсетеді.

Түйін сөздер: {сингуляр оператор, сингуляр интегралдық теңдеу, кері оператор, шенелген оператор, аналитикалық функция, оператордың өзегі, оператордың индексі.}

Постановка задачи.Расссмотрим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\rho(z) - \mu(z)(S\rho)(z) = f(z), \tag{1}$$

где

$$(S\rho)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta \tag{2}$$

сингулярный интегральный оператор, понимаемый в смысле главного значения по Коши, E - двумерная комплексная плоскость, $z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta$, $\rho(z), f(z)$ принадлежат пространству Бесова $B^{\alpha}_{p,1}(E), 1 < p < 2, \alpha = \frac{2}{p} - 1$ и $\mu(z) \in B^{\alpha+1}_{p,1}(E)$ и удовлетворяет неравенству

$$|\mu(z)| \leq q < 1. \tag{3}$$

Заметим, что имеет место вложение $B^{\alpha}_{p,1}(E) \subset_{\rightarrow} L_2(E)$ при $1 < p < 2, \alpha = \frac{2}{p} - 1$, но не вложено в $L_q(E)$ ни при каком $q > 2$, а $B^{\alpha+1}_{p,1}(E)$ вложено в пространство $C(E)$ непрерывных на E функций [1].

Условие (3) является условием эллиптичности уравнения Бельтрами. Мы ищем решение $\rho(z)$ уравнения (1) в классе $B^{\alpha}_{p,1}(E), 1 < p < 2, \alpha = \frac{2}{p} - 1$. Следуя В.С. Виноградову, докажем следующие теоремы:

Теорема 1 Оператор $I - \mu S$, где $I-$ тождественный оператор, нетеров в $B^{\alpha}_{p,1}(E), 1 < p < 2, \alpha = \frac{2}{p} - 1$.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$R = (I - \mu^n S^n)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (\mu S)^k,$$

где $n-$ целое число.

Известно [2], что R является двусторонним регуляризатором для $I-\mu S$ в классе $L_p(E), p>2$, и при этом мы знаем [1]

$$||S_E f||_{B^{\alpha}_{p,1}(E)\to B^{\alpha}_{p,1}(E)} = ||S_E f||_{L_p(E)\to L_p(E)}. \tag{4}$$

Убедимся, что существует обратный оператор $(I-\mu^n S^n)^{-1}$ и ограниченный в $B^{\alpha}_{p,1}(E)$. Норма оператора S в $L_2(E)$ равна единице и он имеет ограниченный оператор [3], поэтому норма S^n в $L_2(E)$ тоже равна единице. Норма же оператора S^n в $L_p(E)$ оценивается максимумом модуля преобразования Фурье ядра этого оператора и числа p [5].

Используя формулу для преобразования Фурье ядра оператора S^n [6]

$$\Im((-1)^n \tfrac{n}{\pi}\tfrac{e^{-i\cdot 2n\theta}}{r^2(z,\zeta)}) = \tfrac{(-1)^n\cdot n}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}(ln\tfrac{1}{|cos\gamma|}-\tfrac{i\pi}{2}signcos\gamma)e^{i\cdot 2n\theta}d\theta$$

можно показать, что

$$||S||^n_{L_p(E)} < nA_p,$$

где постоянная $A_p = ||S_E||_{L_p(E)\to L_p(E)}, p>1$, и не зависит от n.

Зафиксируем теперь число p. Так как

$$||\mu^n S^n||_{L_p(E)} \le q^n n A_p,$$

тогда при достаточно большом n выполняется следующее неравенство [3],[6]:

$$||\mu^n S^n||_{L_p(E)} < 1.$$

В силу (4) имеем:

$$||S||^n_{B^{\alpha}_{p,1}(E)} < nA_p, ||\mu^n S^n||_{B^{\alpha}_{p,1}(E)} \le q^n n A_p, ||\mu^n S^n||_{B^{\alpha}_{p,1}(E)} < 1.$$

Тогда по известной теореме из анализа существует ограниченный обратный оператор $(I-\mu^n S^n)^{-1}$, который действует из $B^{\alpha}_{p,1}(E)$ в $B^{\alpha}_{p,1}(E)$. Из этого следует, что оператор

$$R = (I-\mu^n S^n)^{-1}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(\mu S)^k$$

является ограниченным оператором в $B^{\alpha}_{p,1}(E), 1<p<2, \alpha=\frac{2}{p}-1$.

Покажем, что R является левым регуляризатором оператору $I-\mu S$:

$$R\cdot(I-\mu S) = [(I-\mu^n S^n)^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}(\mu S)^k)](I-\mu S) =$$

$$= (I-\mu^n S^n)^{-1}(I+\mu S+(\mu S)^2+...+(\mu S)^{n-1})(I-\mu S) =$$

$$= (I-\mu^n S^n)^{-1}(I+\mu S+...+(\mu S)^{n-1}-\mu S-...-(\mu S)^{n-1}-(\mu S)^n) =$$

$$= (I-\mu^n S^n)^{-1}(I-(\mu S)^n) = (I-\mu^n S^n)^{-1}\cdot(I-\mu^n S^n+D_1) =$$

$$= \frac{I - \mu^n S^n + D_1}{I - \mu^n S^n} = I + \frac{D_1}{I - \mu^n S^n} = I + D_2,$$

где D_1 вполне непрерывный оператор в $B^{\alpha}_{p,1}(E)$, так как известно [7], что операторы $\mu^k S^k - (\mu S)^k, k = 1, 2, ..., n$ вполне непрерывны в $B^{\alpha}_{p,1}(E)$.

Следовательно, оператор

$$D_2 = \tfrac{D_1}{I - \mu^n S^n},$$

как произведение вполне непрерывного и ограниченного операторов, тоже является вполне непрерывным в $B^{\alpha}_{p,1}(E)$. Если оператор $I - \mu S$ умножим справа на R, то рассуждая аналогично, получим, что R является и правым регуляризатором для $I - \mu S$. Значит оператор $I - \mu S$ нетеров в $B^{\alpha}_{p,1}(E), 1 < p < 2, \alpha = \frac{2}{p} - 1$.

Теорема 2 Индекс оператора $I - \mu S$ в $B^{\alpha}_{p,1}(E), 1 < p < 2, \alpha = \frac{2}{p} - 1$ равен нулю.

Доказательство. Из теоремы 1 семейство операторов $V_\lambda = I - \lambda\mu S$, $\lambda \in [0, 1]$ является нетеровым в $B^{\alpha}_{p,1}(E)$, так как

$$|\lambda\mu(z)| = |\mu_1(z)| \le q < 1.$$

Ясно, что $IndI = 0$. Следовательно, в силу свойства гомотопности оператор $I - \mu S$ тоже имеет нулевой индекс в $B^{\alpha}_{p,1}(E) : Ind(I - \mu S) = 0$.

Теорема 3 Ядро оператора $I - \mu S$ в $B^{\alpha}_{p,1}(E), 1 < p < 2, \alpha = \frac{2}{p} - 1$ состоит только из нулевого элемента.

Доказательство. Покажем, что однородное уравнение

$$\rho(z) - \mu(z)(S\rho)(z) = 0 \tag{5}$$

имеет только нулевое решение в $B^{\alpha}_{p,1}(E)$. Пусть $\rho(z)-$ не нулевое решение уравнения (5) в классе $B^{\alpha}_{p,1}(E), 1 < p < 2, \alpha = \frac{2}{p} - 1$.

Рассмотрим функцию

$$w(z) = (T_E\rho)(z) - (T_E\rho)(0) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E [\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}]\rho(\zeta)d\xi d\eta. \tag{5$'$}$$

Можно непосредственно проверить, что $w(z)$ удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} - \mu(z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Имеет место следующая оценка [1]:

$$||w(z)||_{B^{\alpha+1}_{p,1}(E)} = ||T_E\rho(z) - T_E\rho(0)||_{B^{\alpha+1}_{p,1}(E)} \le K_p||\rho(z)||_{B^{\alpha}_{p,1}(E)}|z|^{1-\frac{2}{p}}, \tag{7}$$

где постоянная K_p зависит только от p.

Возьмем теперь $p_0 < 2$ настолько близким к 2, чтобы $q||S||_{B^{\alpha}_{p_0,1}(E)} < 1$. Известно [9], что

$$\chi(z) = z - \tfrac{1}{\pi}\iint\limits_E [\tfrac{1}{\zeta - z} - \tfrac{1}{\zeta}]\widetilde{\rho}(\zeta)d\xi d\eta,$$

где $\widetilde{\rho}(\zeta) \in B^{\alpha}_{p_0,1}(E)$, является гомеоморфным решением уравнения Бельтрами.

Из результатов работ [1], [9] следует существование постоянной C такой, что сам гомеоморфизм и его обратный удовлетворяет оценкам:

$$|\chi(z)| \leq C|z|, |z(\chi)| \leq C|\chi|. \tag{8}$$

По теореме из [10] о представлении решений системы (6), имеем

$$w(z) = \Phi(\chi(z)), \tag{9}$$

где $\Phi(z)-$ целая функция от χ. Из условия (7), (8) следует

$$||\Phi(z)||_{B^{\alpha+1}_{p,1}(E)} = ||w(z)||_{B^{\alpha+1}_{p,1}(E)} = ||T_E\rho(z) - T_E\rho(0)||_{B^{\alpha+1}_{p,1}(E)} \leq K_p||\rho(z)||_{B^{\alpha}_{p,1}(E)}|z|^{1-\frac{2}{p}}.$$

Такая целая функция $\Phi(\chi)$ по теореме Лиувилля является постоянной величиной т.е. $\Phi(z) = const$, а значит в силу (9) $w(z) = const$. Отсюда $\rho(z) = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \equiv 0$.

Заключение. Доказано нетеровая разрешимость сингулярного интегрального уравнения. Показано, что индекс равен нулю и ядро состоит только из нуля. В явном виде приведены операторы - регуляризаторы для рассмотриваемого уравнения в пространствах Бесова $B^{\alpha}_{p,1}(E), 1 < p < 2, \alpha = \frac{2}{p} - 1$.

Эти результаты применимы для доказательства нетеровости в классах Бесова более общих сингулярных интегральных уравнений.

Список литературы

[1] *Блиев Н.К.* Обобщенные аналитические функции в дробных пространсвах. - Алма - Ата: Наука, 1985. - 46 с.

[2] *Виноградов В.С.* О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения // Докл. АН СССР. - 1978.- Т. 241.- № 2. - С. 272 - 274.

[3] *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. - М. Физматгиз, 1959. - 89 с.

[4] *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. - М. : Физматгиз, 1962. - 76 с.

[5] *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.- М. : Мир, 1973. - 40 с.

[6] *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. - М.: Высшая школа, 1977. - 62 с.

[7] *Задина Х.У.* Сингулярные интегральные операторы и задача Римана - Гильберта для эллиптической системы первого порядка на плоскости в дробных пространствах: дис. на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: 01.01.02/ Институт математики и механики. - Алма-Ата, 1989. - 36 с.

[8] *Блиев Н.К.* Гомеоморфизмы уравнения Бельтрами в дробных пространствах // Диф. и интегр. уравнения. Краевые задачи. - Тбилиси. - 1979. - С. 33 - 43.

[9] *Комяк И. И.* О разрешимости одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений // Докл АН СССР.- 1980. - Т. 250. - № 6. - С. 1307 - 1310.

[10] *Блиев Н.К.* Эллиптические системы дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости в дробных пространствах и краевые задачи.- Докт. дисс.- М.: МИ АН СССР. - 1980. - 187 с.

List of references

[1] *Bliev N.K.* Obobshhennye analiticheskie funkcii v drobnyh prostranstvah. – Alma-Ata : Nauka, 1985. - 160 s.

[2] *Vinogradov V.S.* O razreshimosti odnogo singuljarnogo integral′nogo uravnenija // Dokl. AN. SSSR. - 1978. - T. 241. - № 2. - S. 272-274.

[3] *Vekua I.N.* Obobshhennye analiticheskie funkcii.- M.: Fizmatgiz, 1959. - 89 c.

[4] *Mihlin S.G.* Mnogomernye singuljarnye integraly i integral′nye uravnenija . – M. : Fizmatgiz, 1962. - 76 s .

[5] *Stejn I.* Singuljarnye integraly i differencial′nye svojstva funkcij. – M.: Mir, 1973. - 40 s.

[6] *Mihlin S.G.* Linejnye uravnenija v chastnyh proizvodnyh. - M.: Vysshaja shkola, 1977. - 62 s.

[7] *Zadina H.U.* Singuljarnye integral′nye operatory i zadacha Rimana – Gil′berta dlja jellipticheskoj sistemy pervogo porjadka na ploskosti v drobnyh prostranstvah: dis. na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskih nauk: 01.01.02 / Institut matematiki i mehaniki. – Alma-Ata , 1989. -36 s.

[8] *Bliev N.K.* Gomeomorfizmy uravnenija Bel′trami v drobnyh prostranstvah // Dif. i integr. uravnenija. Kraevye zadachi. – Tblisi. - 1979. - S. 33-43.

[9] *Komjak I.I.* O razreshimosti odnogo klassa dvumernyh singuljarnyh integral′nyh uravnenij // Dokl AN SSSR. – 1980.- T. 250.- № 6. – S. 1307-1310.

[10] *Bliev N.K.* Jellipticheskie sistemy differencial′nyh uravnenij pervogo porjadka na ploskosti v drobnyh prostranstvah i kraevye zadachi:Dokt. diss. – M.: MIAN SSSR. - 1980. - 187 s.

Поступила в редакцию 10 января 2013 года